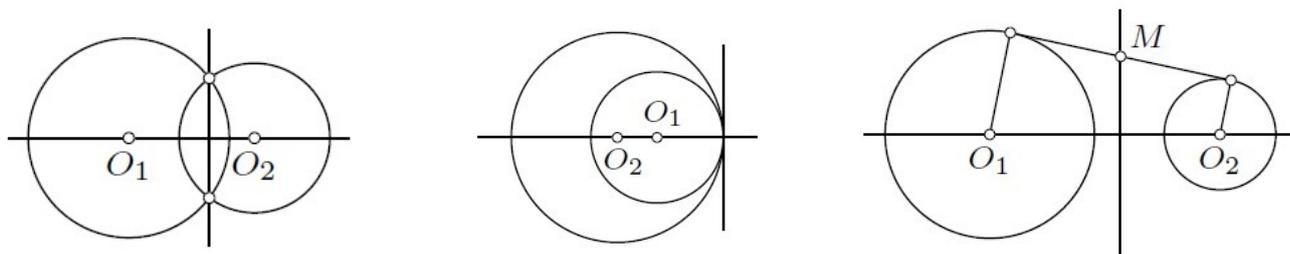


Радикальная ось

- ▷ *Напоминание.* Дана окружность ω радиуса r . На расстоянии d от её центра отмечена точка M . Величина $d^2 - r^2$ называется *степенью точки M относительно окружности ω* .
- ▷ *Радикальная ось* двух окружностей — множество точек плоскости, каждая из которых имеет одинаковые степени относительно этих окружностей.
- ▷ **Теорема.** Даны окружности ω_1 и ω_2 , центры которых не совпадают. Тогда для этих окружностей радикальная ось существует и является прямой линией, перпендикулярной линии центров.
1. Если две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух различных точках, то радикальная ось этих окружностей является прямой, проходящей через точки их пересечения.
 2. Если две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним или внутренним образом, то их радикальная ось совпадает с общей касательной в точке касания окружностей.
 3. Если две окружности ω_1 и ω_2 лежат одна вне другой, не касаясь, то радикальная ось содержит середины общих касательных этих окружностей.



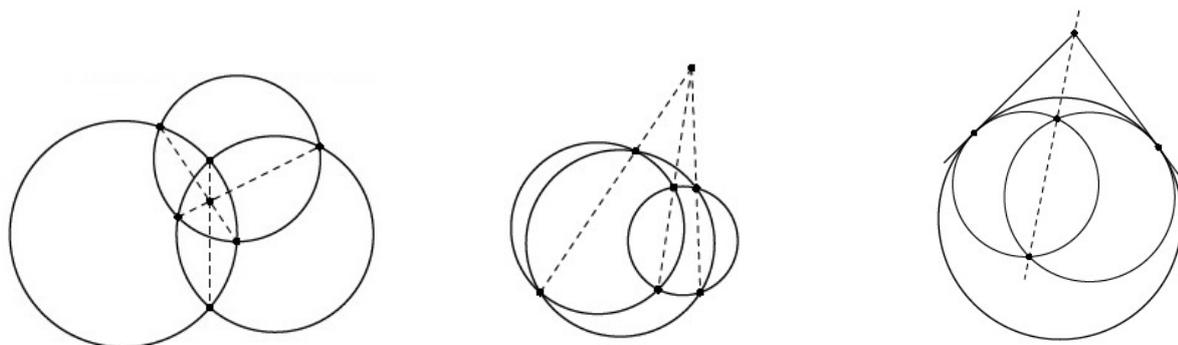
Задача 1. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через середину K диагонали AC .

Задача 2. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка M . Докажите, что общая хорда окружности с центром C и радиусом CA и окружности с центром M и радиусом MC проходит через середину AB .

- ▷ **Теорема.** Даны окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тогда радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.
- ▷ Точка пересечения радикальных осей трёх окружностей, взятых попарно, называется *радикальным центром* этих окружностей.

Радикальная ось (продолжение)

Задача 3. Докажите, что прямые на рисунках пересекаются в одной точке:



Задача 4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$, $AB \parallel CD$. Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали — в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.

Задача 5. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отметили точки M и N так, что $BM = ND$, $AM = CN$. Оказалось, что четырёхугольники $BMNC$ и $AMND$ — вписанные. Докажите, что $MN \parallel AD$.

Задача 6. Окружность с центром J касается стороны BC треугольника ABC в точке A_1 , а продолжений сторон AC и AB — в точках B_1 и C_1 соответственно, при этом прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны и пересекаются в точке D . Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую DJ . Найдите углы $\angle BEA_1$ и $\angle AEB_1$.

УКАЗАНИЕ. см. рисунок

