Инварианты почти вложений графов в плоскость и комбинаторная топология конфигурационных пространств

Э. АЛКИН, Е. БОРДАЧЕВА, А. МИРОШНИКОВ, А. СКОПЕНКОВ

Доклад по материалу

https://old.mccme.ru//circles//oim/alm_emb_jourus.pdf

Изображения без самопересечений графов на плоскости (т.е. вложения или плоские графы) активно изучаются. Также интересны изображения графов, имеющие «умеренные» самопересечения, например, *почти вложения* . Их изучение находится на стыке комбинаторной геометрии, компьютерной науки, геометрической и алгебраической топологии.

Мы определим целочисленные инварианты почти вложений: число оборотов, циклическое и триодическое числа Ву. Мы построим почти вложения, реализующие некоторые значения таких инвариантов. Имеются гипотезы и нерешенная проблема.

1. Число оборотов

Везде, кроме §7, рассматриваемые точки и ломаные расположены на плоскости.

Числом оборотов $w(l) = w(l, O)$ замкнутой ломаной $l = A_1 \ldots A_m$ вокруг не лежащей на ней точки O называется количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке O, а конец обходит ломаную в заданном порядке вершин. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(l) = 2\pi \cdot w(l, O) :=$$

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1$$

— сумма ориентированных углов.

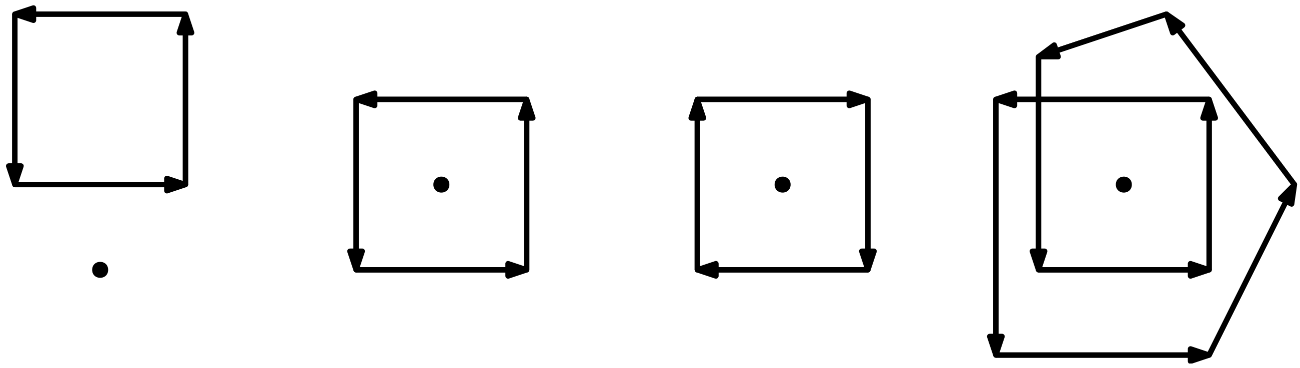


Рис. 1.1. Числа оборотов равны 0, $+1$, -1, $+2$

Пример 1.1. *Для любых целого числа n и точки O существует замкнутая ломаная, число оборотов которой вокруг O равно n.*

Утверждение 1.2. *Число оборотов $w(A_1 \ldots A_m)$ является целым числом.*

Следующие обозначение и результаты будут полезны.

Пусть $l = A_1 \dots A_m$ — ломаная, не проходящая через точку O. Определим действительное число $w'(l) = w'(l, O)$ формулой

$$2\pi \cdot w'(l) = 2\pi \cdot w'(l, O) :=$$

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{m-1}OA_m.$$

Очевидно, что

- $w'(A_1 \dots A_m A_1) = w(A_1 \dots A_m)$;
- $w'(A_1 \dots A_m) = w'(A_1 \dots A_j) + w'(A_j \dots A_m)$ для каждого $j = 1, \dots, m$;
- если точки $A_2, \dots, A_{m-1}$ лежат внутри угла $\angle A_1OA_m$, то $2\pi w'(A_1 \dots A_m) = \angle A_1OA_m$.

Утверждение 1.3. *Имеем* $\angle A_1OA_m = 2\pi w'(A_1 \dots A_m) + 2\pi n$ *для некоторого целого* n.

Обозначим через l^{-1} ломаную, полученную из ломаной l прохождением в противоположном порядке. Очевидно, что $w'(l) = -w'(l^{-1})$ для любой точки $O \notin l$.

Конкатенацией ломаных $l_1 = A_1 \ldots A_m C$ и $l_2 = CB_1 \ldots B_k$ называется ломаная

$$l_1 l_2 := A_1 \ldots A_m C B_1 \ldots B_k.$$

Конкатенацией замкнутых ломаных $l_1 = A_1 \ldots A_m C$ и $l_2 = B_1 \ldots B_k C$ называется замкнутая ломаная

$$l_1 l_2 := A_1 \ldots A_m C B_1 \ldots B_k C.$$

В этих обозначениях $w'(l_1 l_2) = w'(l_1) + w'(l_2)$ для любых точки O и ломаных l_1, l_2, не проходящих через O.

Для построения примеров в этом тексте не нужны сложные картинки — достаточно *простых* преобразований *простых* картинок. Например, полезно преобразование на рисунке 1.2. На этом и других рисунках мы изображаем *кривыми* ломаные с большим числом звеньев. Вершины ломаной расположены на кривой в порядке, обозначенном стрелками.

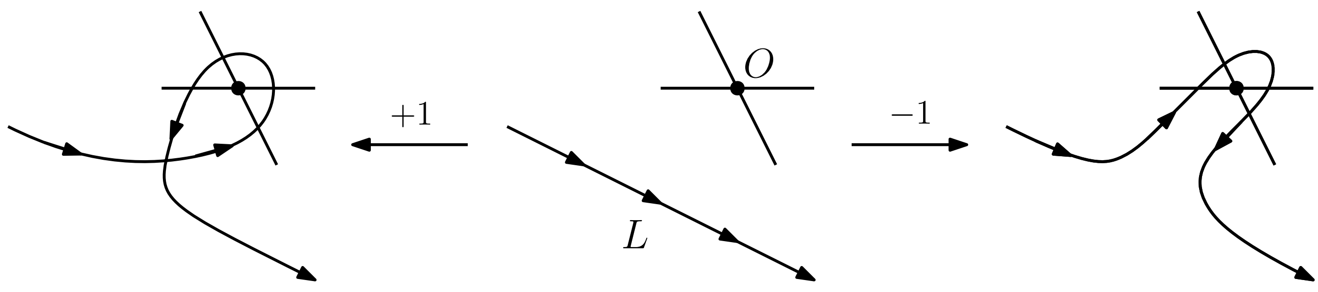


Рис. 1.2. «Пальцевые движения» ломаной l вокруг точки O: положительное (слева), отрицательное (справа)

2. Числа оборотов изображений графов

Говоря нестрого, граф планарен, если его можно нарисовать «без самопересечений» на плоскости. Строго говоря, граф называется *планарным*, если существует

(1) набор точек плоскости, соответствующих вершинам,

(2) вместе с набором (незамкнутых) ломаных на плоскости, каждая из которых соединяет те пары из набора точек, которые соответствуют парам смежных вершин графа,

(3) причем ломаные несамопересекающиеся, и никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной.

Обозначим через

• $[n]$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$;

• K_n полный граф на множестве $[n]$ вершин;

• $K_{m,n}$ полный двудольный граф с долями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию множества A).

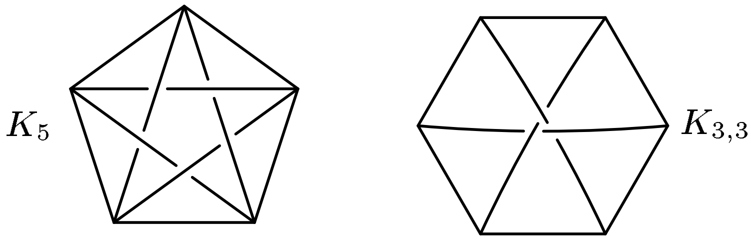


Рис. 2.1. Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

Мы рассматриваем изображения графов на плоскости, при которых ребра изображаются ломаными (и допускаются пересечения этих ломаных). Строго говоря, **отображением** (кусочно-линейным) $f : K \to \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость называется

(1) набор точек плоскости, соответствующих вершинам,

(2) вместе с набором (незамкнутых) ломаных на плоскости, каждая из которых соединяет те пары из набора точек, которые соответствуют парам смежных вершин графа.

(Это то же, что (1) и (2) из определения планарности.)

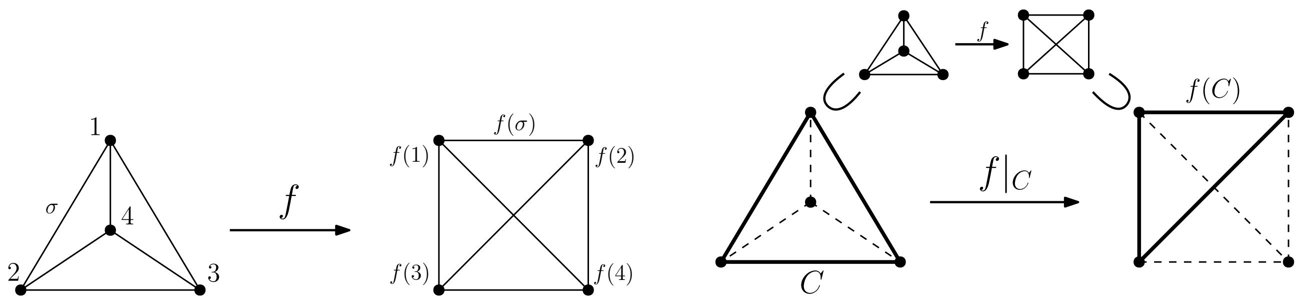


Рис. 2.2. Отображение $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ (слева); образ $f(C)$ и сужение $f|_C$ (справа)

Образ $f(\sigma)$ ребра σ (при отображении f) — это объединение отрезков соответствующей ломаной. **Образ** набора ребер — это объединение образов всех ребер из набора.

Сужение $f|_{ab}$ на ориентированное ребро ab — это соответствующая ломаная с началом $f(a)$ и концом $f(b)$. Ориентированный цикл в графе обозначается перечислением его вершин в порядке их следования (без запятых). **Сужением** $f|_C : C \to \mathbb{R}^2$ на ориентированный цикл $C = v_1 \dots v_n$ в графе K называется замкнутая ломаная $f|_{v_1v_2} \dots f|_{v_{n-1}v_n} f|_{v_nv_1}$ (рисунок 2.2).

Для вершины v и ориентированного цикла C в графе K, таких что $f(v) \notin f(C)$, положим

$$w_f(C, v) := w(f|_C, f(v)).$$

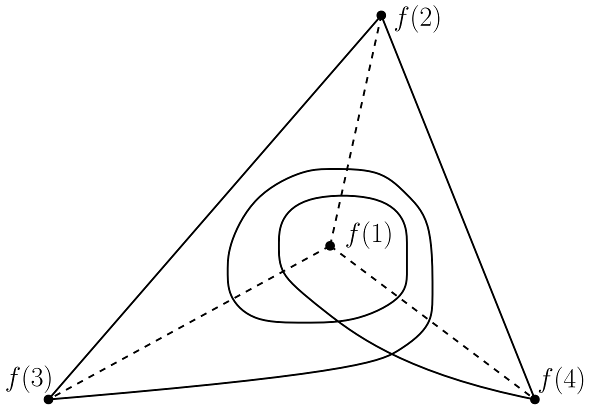


Рис. 2.3. Отображение $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(234, 1) = 3$

3. Почти вложения: определение

Одно из доказательств непланарности графа K_5 дает следующий результат.

Теорема 3.1 (Ханани-Татт; ван Кампен). *Для любого отображения $K_5 \to \mathbb{R}^2$ существуют два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

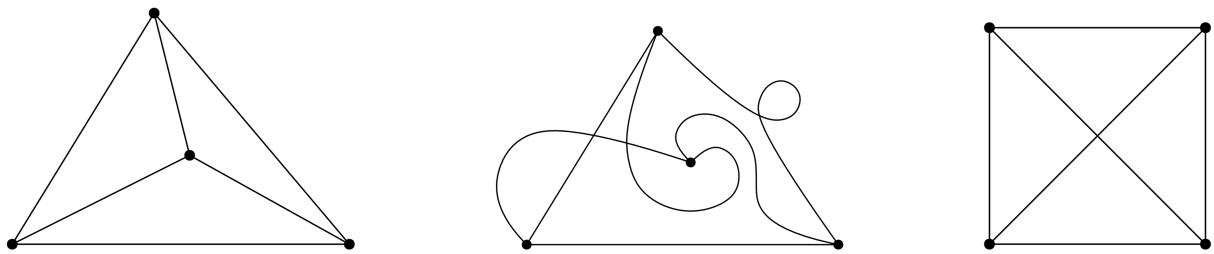


Рис. 3.1. Вложение, почти вложение и отображение (изображение), которое не является почти вложением

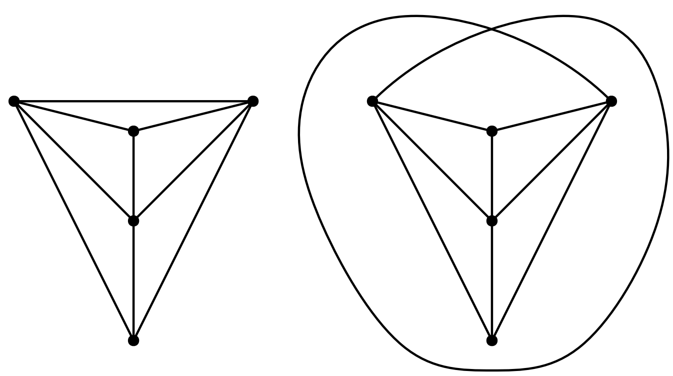


Рис. 3.2. Вложение и почти вложение графа K_5 без ребра

Отображение $f : K \to \mathbb{R}^2$ графа K называется **почти вложением**, если $f(\alpha) \cap f(\beta) = \varnothing$ для любых двух несмежных симплексов (т.е. вершин и ребер) $\alpha, \beta \subset K$.

Т.е. если

(i) образы несмежных ребер не пересекаются,

(ii) образ любой вершины не лежит на образе никакого ребра, несмежного с этой вершиной,

(iii) образы различных вершин различны.

Теорема 3.1 означает, что не существует почти вложения графа K_5 в плоскость.

Замечание 3.2. Этот текст касается в первую очередь *инвариантов* почти вложений, а не проблем их *существования*. Поэтому мы сохраняем в определении свойства (ii, iii), выполнения которых можно добиться достаточно малым шевелением отображения, с сохранением свойства (i). *Если граф допускает почти вложение в плоскость, то граф планарен* (доказательство нетривиально). Однако существуют значения, реализуемые как инвариант некоторого почти вложения, но не реализуемые никаким вложением.

Почти вложения естественным образом возникают и применяются в топологической теории графов, в комбинаторной геометрии, в топологической комбинаторике и при изучении вложений (графов в поверхности и гиперграфов в многомерные евклидовы пространства).

4. Основные результаты: числа оборотов почти вложений графов

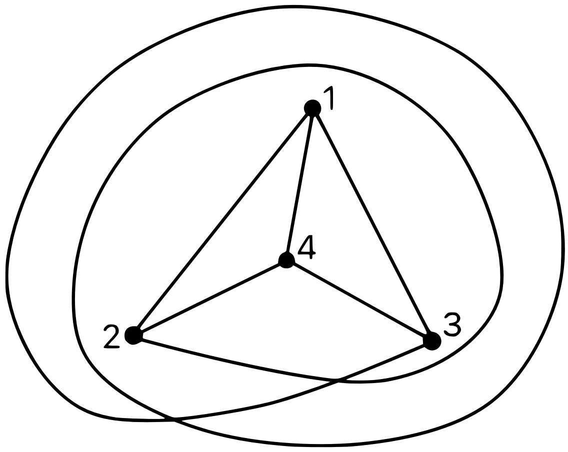


Рис. 4.1. Почти вложение $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 4) = 3$

Для почти вложения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ напомним, что $w_f(C, v) := w(f|_C, f(v))$ для вершины v и ориентированного цикла C, и обозначим

$$W_f := -w_f(234, 1) + w_f(134, 2) - w_f(124, 3) + w_f(123, 4).$$

Теорема 4.1. *Для любого почти вложения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ число W_f нечетно.*

Аналог теоремы 4.1 для вложений вместо почти вложений доказывается проще (он близок к теореме Жордана), а для отображений — неверен.

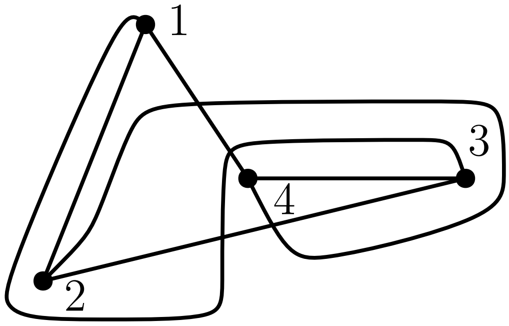


Рис. 4.2. (Е. Морозов) Почти вложение $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, такое что $W_f = 3 \neq \pm 1$

Гипотеза 4.2. *[ср. работы Э. Алкина и А. Мирошникова, а также А. Лазарева] Для любых целых чисел n_1, n_2, n_3, n_4, сумма которых нечетна, существует почти вложение $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j \in [4]$:*

$$w_f(234, 1) = n_1, \quad w_f(134, 2) = n_2,$$
$$w_f(124, 3) = n_3, \quad w_f(123, 4) = n_4.$$

К решению гипотезы 4.2 для чисел, знакопеременная сумма которых равна ± 1, подводит преобразование на рисунке 4.3.

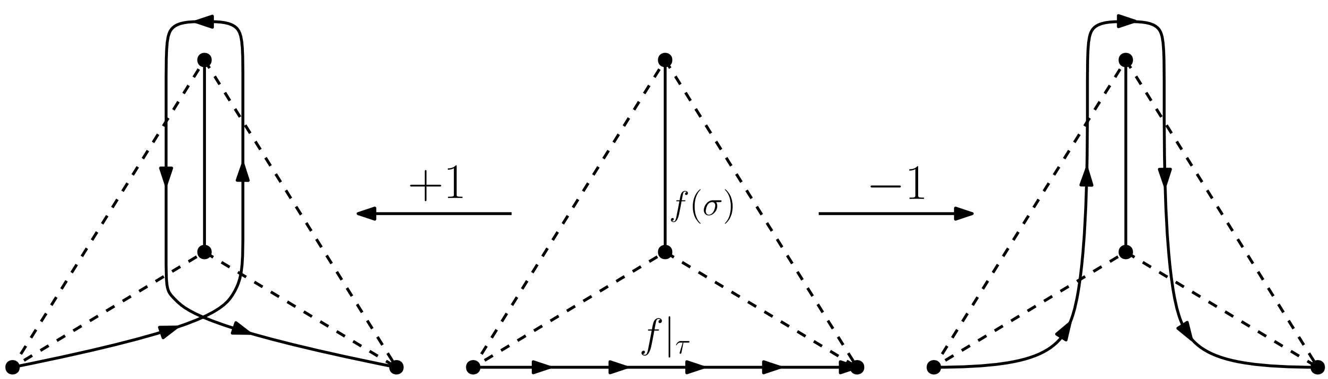


Рис. 4.3. «Пальцевые движения» ломаной $f|_\tau$ вокруг отрезка $f(\sigma)$: положительное (слева) и отрицательное (справа)

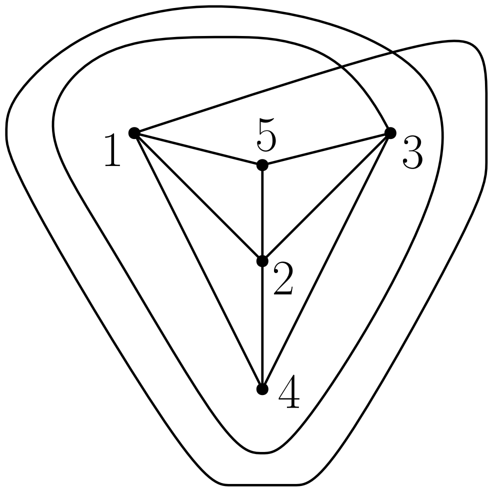


Рис. 4.4. Почти вложение $f : K_5 - 45 \to \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 5) = 3$

Теорема 4.3 (ср. теорему 4.1 и гипотезу 4.2). *Для любого почти вложения* $f : K_5 - 45 \to \mathbb{R}^2$ *имеем*

(a) $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) \equiv 1 \mod 2$*;*

(b) $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = \pm 1$*.*

Пункт (a) несложен и хорошо известен. Его аналог для отображений неверен. Аналог пункта (b) для вложений вместо почти вложений является более простым (он близок к теореме Жордана). Пункт (b) является недавним нетривиальным результатом Тимура Гараева.

Задача 4.4. Возьмем ребро ab графа $K_{3,3}$. Обозначим через $C = C_{ab}$ произвольно ориентированный цикл $K_{3,3} - a - b$ длины 4. Для любого почти вложения $f : K_{3,3} - ab \to \mathbb{R}^2$ имеем

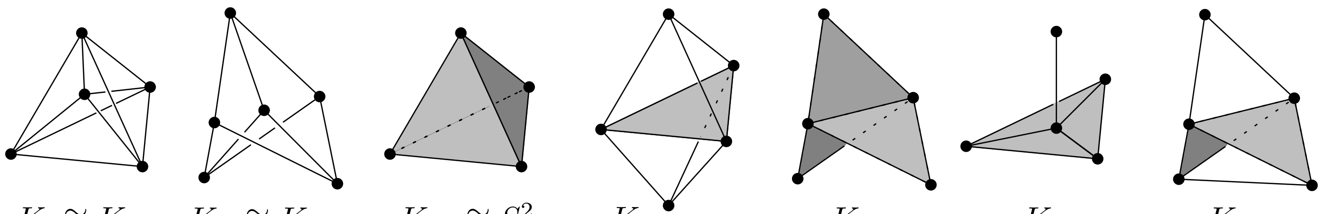
(a) $w_f(C, a) - w_f(C, b) \equiv 1 \mod 2$;

(b) (гипотеза) $w_f(C, a) - w_f(C, b) = \pm 1$.

Задача 4.5 (загадка)**.** Для почти вложения $f : K \to \mathbb{R}^2$ графа K рассмотрим набор целых чисел $w_f(C, v)$, где $v \in K$ — вершина, а C — ориентированный цикл в $K - v$. Опишите наборы, реализуемые почти вложениями $f : K \to \mathbb{R}^2$. Ответ для случая $K = K_4$ дается теоремой 4.1 и гипотезой 4.2. Ответ интересен даже когда K есть $K_5 - 45$, граф куба, граф октаэдра.

Возможно, это описание не имеет красивой формулировки. Тогда интересен алгоритм, который по набору целых чисел (соответствующих парам (C, v)) выясняет, реализуется ли этот набор некоторым почти вложением $f : K \to \mathbb{R}^2$.

Замечание 4.6 (мотивировки). *Гиперграфы* — многомерные аналоги графов: ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества вершин. Классическая задача топологии, комбинаторики и компьютерной науки — нахождение критериев (и алгоритмов) реализуемости гиперграфов в евклидовом пространстве данной размерности d.



$K_{\mathrm{I}} \cong K_5$ $K_{\mathrm{II}} \cong K_{3,3}$ $K_{\mathrm{III}} \cong S^2$ K_{IV} K_{V} K_{VI} K_{VII}

Рис. 4.5. Двумерные гиперграфы, не вложимые в плоскость

Такой критерий получен классиками топологии в 1930-1960-е гг. для $2d \geqslant 3k+3$, где k — размерность гиперграфа. Основанный на этом критерии полиномиальный алгоритм распознавания реализуемости получен в 2013. Алгоритмическая неразрешимость для $2d < 3k+2$ анонсирована в 2019 году на конференции в Обервольфахе (Марек Филаковский, Ульрих Вагнер и Стефан Жечев). Дыру нашел в 2020 году Аркадий Скопенков (она признана авторами). Не было доказано, что в многомерном аналоге для *вложений* теоремы 4.3.b (и примера 7.2.a) некоторый коэффициент зацепления равен ± 1.

В 2020 году Роман Карасев и А. Скопенков показали, что для *почти вложений* этот коэффициент зацепления может принимать любое нечетное значение. Их гипотеза об аналогичном результате для графов на плоскости опровергнута в 2023 году Тимуром Гараевым, см. теорему 4.3.b.

5. Триодическое число Ву

Определим новые инварианты, и интересные сами по себе, и полезные для изучения числа оборотов.

Назовем тройку ломаных l_1, l_2, l_3, соединяющих точку O с точками A_1, A_2, A_3 соответственно, **триодической**, если $A_i \notin l_j$ для всех $i \neq j$. (Другими словами, если ломаные образуют почти вложение $f : K_{3,1} \to \mathbb{R}^2$.)

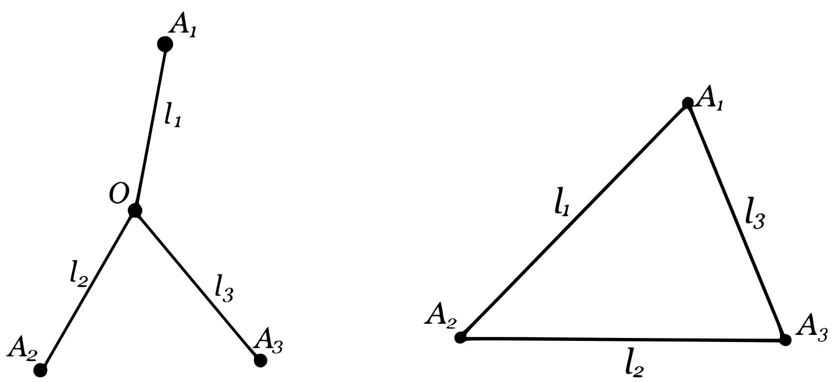


Рис. 5.1. Триод и треугольник

Для триодической тройки ломаных l_1, l_2, l_3 **триодическое число Ву** $\mathrm{wu}(l_1, l_2, l_3)$ определяется как число оборотов вектора в результате следующих вращений:

- от вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_3}$, при котором конец вектора движется по $l_2^{-1}l_3$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$, при котором начало вектора движется по $l_1^{-1}l_2$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_1}$, при котором конец вектора движется по $l_3^{-1}l_1$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3A_1}$ по $l_2^{-1}l_3$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_3A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3A_2}$ по $l_1^{-1}l_2$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_3A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$ по $l_3^{-1}l_1$.

Это равно удвоенному (нецелому) числу оборотов в результате первых трех из вышеприведенных вращений. Строго говоря,

$$\mathrm{wu}(l_1, l_2, l_3) :=$$
$$w'(l_2^{-1}l_3, A_1) + w'(l_1^{-1}l_2, A_3) + w'(l_3^{-1}l_1, A_2)+$$
$$w'(l_2^{-1}l_3, A_1) + w'(l_1^{-1}l_2, A_3) + w'(l_3^{-1}l_1, A_2) =$$
$$2\left(w'(l_2^{-1}l_3, A_1) + w'(l_1^{-1}l_2, A_3) + w'(l_3^{-1}l_1, A_2)\right).$$

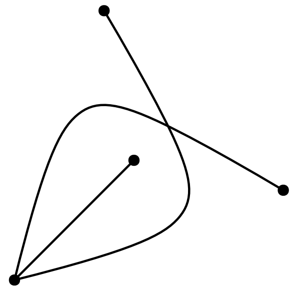


Рис. 5.2. Тройка ломаных с триодическим числом Ву ± 3

Пример 5.1. *(a) Для трех отрезков l_1, l_2, l_3, соединяющих вершины A_1, A_2, A_3 правильного треугольника с его центром O соответственно, триодическое число Ву равно ± 1 (рисунок 5.1, слева).*

(b) Для тройки ломаных на рисунке 5.2 триодическое число Ву равно ± 3.

(c) Для любого вложения $f : K_{3,1} \to \mathbb{R}^2$ триодическое число Ву равно ± 1.

(d) Для триодической тройки ломаных l_1, l_2, l_3 перестановка ломаных умножает их триодическое число Ву на знак перестановки.

Утверждение 5.2. *Для любой триодической тройки ломаных триодическое число Ву нечетно.*

Доказательство. Обозначим через l_1, l_2, l_3 ломаные, образующие триодическую тройку. Имеем

$$\mathrm{wu}(l_1, l_2, l_3) \overset{(1)}{=} 2\left(\frac{\angle A_2A_1A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3A_2A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1A_3A_2}{2\pi} + k_3\right) =$$
$$= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2\frac{\angle A_2A_1A_3 + \angle A_3A_2A_1 + \angle A_1A_3A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1$$

для некоторых целых k_1, k_2, k_3. $\square$

Пример 5.3. *Для любого целого n существует триодическая тройка ломаных, триодическое число Ву которых равно $2n+1$.*

Пример для $n = 2$ приведен на рисунке 5.3 слева.

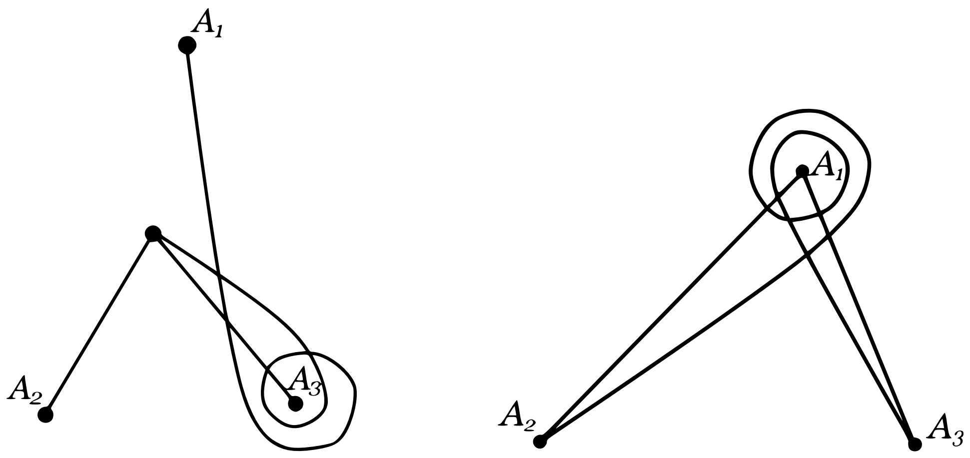


Рис. 5.3. Тройка ломаных, триодическое/циклическое (слева/справа) число Ву которой равно 5

6. Связь инвариантов друг с другом

...и с гомологиями взрезанного квадрата графа [DMN+, §5].

Нечетность числа $W(f)$ для почти вложения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ вытекает из утверждения 6.1.a и нечетности триодического числа Ву (утверждение 5.2).

Для почти вложения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ и $\{i, j, p, q\} = [4]$ обозначим

$$\mathrm{wu}_f(ij, ip, iq) := \mathrm{wu}(f|_{ij}, f|_{ip}, f|_{iq}).$$

Утверждение 6.1. *Для любого почти вложения $f : K_4 \to \mathbb{R}^2$ имеем*

(a) $W_f = \mathrm{wu}_f(41, 42, 43) = \mathrm{wu}_f(31, 34, 32) = \mathrm{wu}_f(21, 23, 24) = \mathrm{wu}_f(12, 14, 13)$.

Набросок доказательства. (Как можно придумать эти формулы, написано в замечании 6.2.b.)

Будем неявно использовать определения чисел Ву, а также следующие равенства:

• $w_f(ijk, v) = w'_f(ij, v) + w'_f(jk, v) + w'_f(ki, v)$, если $\{i, j, k, v\} = [4]$;

• $w'_f(ij, v) = -w'_f(ji, v)$ для любых ребра ij и вершины $v \notin ij$.

Для $\{i,j,p,q\}=[4]$ обозначим

$$\partial_f(ij\times pq):=$$

$$w'_f(ij,p)+w'_f(pq,j)+w'_f(ji,q)+w'_f(qp,i).$$

Поскольку f является почти вложением, то $\partial_f(ij\times pq)=0$ для любых $\{i,j,p,q\}=[4]$.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{matrix}\partial_f(12\times 34)\\ +2w'_f(21,3)\\ +2w'_f(12,4)\end{matrix} & \begin{matrix}\partial_f(23\times 14)\\ +2w'_f(32,1)\\ +2w'_f(23,4)\end{matrix} & \begin{matrix}\partial_f(31\times 24)\\ +2w'_f(13,2)\\ +2w'_f(31,4)\end{matrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{|ccc|c}
\hline
w'_f(43,1) & w'_f(32,1) & w'_f(24,1) & -w'_f(234,1)\\
w'_f(34,2) & w'_f(41,2) & w'_f(13,2) & w'_f(134,2)\\
w'_f(21,3) & w'_f(14,3) & w'_f(42,3) & -w'_f(124,3)\\
w'_f(12,4) & w'_f(23,4) & w'_f(31,4) & w'_f(123,4)\\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{matrix}\partial_f(12\times 43)\\ +2w'_f(43,1)\\ +2w'_f(34,2)\end{matrix} & \begin{matrix}\partial_f(23\times 41)\\ +2w'_f(41,2)\\ +2w'_f(14,3)\end{matrix} & \begin{matrix}\partial_f(31\times 42)\\ +2w'_f(24,1)\\ +2w'_f(42,3)\end{matrix}
\end{array}$$

Рис. 6.1. Различные группировки слагаемых в сумме W_f

Первое равенство пункта (a) доказывается так:

$$W_f \overset{(1)}{=}$$

$$=2\Big(w'_f(24,1)+w'_f(43,1)+w'_f(14,3)+$$

$$w'_f(42,3)+w'_f(34,2)+w'_f(41,2)\Big)+$$

$$+\partial_f(12\times 43)+\partial_f(23\times 41)+\partial_f(13\times 24)=$$

$$=\mathrm{wu}_f(41,42,43).$$

$$
\begin{array}{cccc}
\begin{array}{l}\partial(12\times 34)\\ +2(21\times 3)\\ +2(12\times 4)\end{array} & \begin{array}{l}\partial(23\times 14)\\ +2(32\times 1)\\ +2(23\times 4)\end{array} & \begin{array}{l}\partial(31\times 24)\\ +2(13\times 2)\\ +2(31\times 4)\end{array} & \\
\hline
\multicolumn{1}{|l}{43\times 1} & 32\times 1 & \multicolumn{1}{l|}{24\times 1} & -(234\times 1)\\
\multicolumn{1}{|l}{34\times 2} & 41\times 2 & \multicolumn{1}{l|}{13\times 2} & 134\times 2\\
\multicolumn{1}{|l}{21\times 3} & 14\times 3 & \multicolumn{1}{l|}{42\times 3} & -(124\times 3)\\
\multicolumn{1}{|l}{12\times 4} & 23\times 4 & \multicolumn{1}{l|}{31\times 4} & 123\times 4\\
\hline
\begin{array}{l}\partial(12\times 43)\\ +2(43\times 1)\\ +2(34\times 2)\end{array} & \begin{array}{l}\partial(23\times 41)\\ +2(41\times 2)\\ +2(14\times 3)\end{array} & \begin{array}{l}\partial(31\times 42)\\ +2(24\times 1)\\ +2(42\times 3)\end{array} &
\end{array}
$$

Рис. 6.2. Различные группировки слагаемых в сумме W_f (в кратких обозначениях)

$\square$

Замечание 6.2. (a) Формулы из доказательства утверждения 6.1 упростятся, если переобозначить $C\times_f v := w_f(C,v)$ для ориентированного цикла C в графе, и $C\times_f v := w'_f(C,v)$ для ориентированного пути C в графе. Кроме того, можно убрать индексы f (не влияющие на преобразования). См. рисунок 6.2. Тем самым, при доказательстве утверждения 6.1 «не обязательно» помнить ни о сумме углов, через которую определяются числа оборотов и числа Ву, ни об отображении f.

Это упрощение — проявление того, что за утверждением 6.1 стоят соотношения между *целочисленными одномерными циклами* во *взрезанном квадрате* графа K_4 [DMN+, §5]. Эти соотношения можно применять не только к доказательству утверждений типа 6.1, но и к их придумыванию (ибо вместо формул можно смотреть на картинки). Эти соотношения можно применять и к другим задачам.

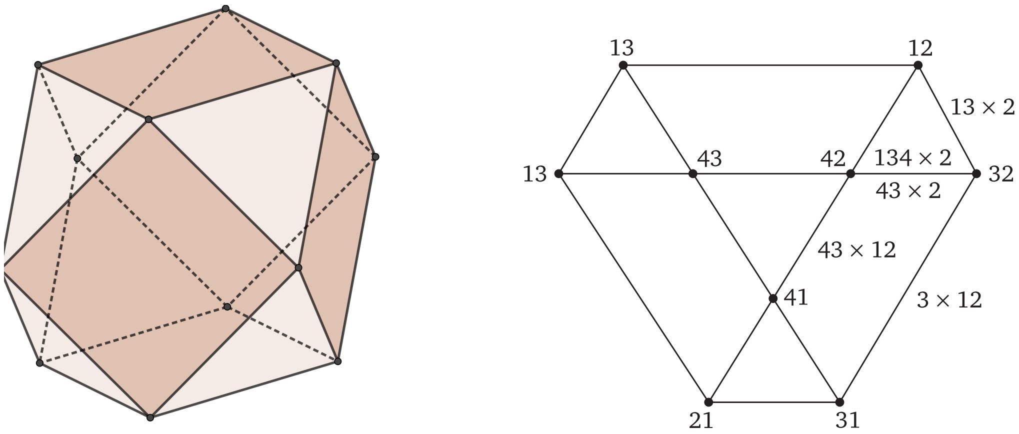


Рис. 6.3. Слева: магический кубооктаэдр. Справа: пояснение к магической формуле (не показана невидимая часть, проекция которой получена из изображения проекции вращением на $\pi/3$; нижнее 13 должно быть 23).

(b) (как придумать и геометрически интерпретировать утверждение 6.1.a) На рисунке 6.3

- 4×123 — центральный треугольник,
- 123×4 — невидимый центральный треугольник,
- 24×13 — нижняя левая трапецевидная грань,
- 13×24 — верхняя правая невидимая трапецевидная грань,
- $\mathrm{triod}(123, 4) \;:=\; 12, 14, 13, 43, 23, 24, \dots,$ где точками обозначена часть, симметричная написанной (получена заменой xy на yx); этот цикл разбивает кубооктаэдр на две равные части.

Интерпретация равенства $W_f = \mathrm{wu}_f(41, 42, 43)$:

$$\mathrm{triod}(123, 4)+\partial(12\times43)+\partial(23\times41)+\partial(31\times42) =$$
$$= -234 \times 1 + 134 \times 2 - 124 \times 3 + 123 \times 4.$$

Замечание 6.3 (классификация почти вложений)**.** (a) Непрерывная деформация (почти) вложения, в каждый момент которой отображение остается (почти) вложением, называется *(почти) изотопией.* Числа оборотов $w_f(C,v)$, числа Ву и инварианты, упоминаемые далее, являются инвариантами (почти) вложения $f : K \to \mathbb{R}^2$ относительно (почти) изотопии.

(b) Для почти вложения графа в плоскость рассмотрим триодические числа Ву его сужений на всевозможные триоды в графе. Для любого дерева если все эти числа у двух *вложений* равны, то эти вложения изотопны.

Гипотеза. *Для любого дерева (или хотя бы для графа $K_{n,1}$) если все триодические числа Ву сужений на всевозможные триоды в дереве у двух почти вложений равны, то эти почти вложения почти изотопны.*

(c) Для почти вложения графа в плоскость рассмотрим триодические и циклические числа Ву его сужений на всевозможные триоды и циклы в графе. Для любого графа если все эти числа у двух *вложений* равны, то эти вложения изотопны.

Гипотеза. *Для любого графа если все триодические и циклические числа Ву сужений на всевозможные триоды и циклы в графе у двух почти вложений равны, то эти почти вложения почти изотопны.*

Замечание 6.4. Кроме чисел оборотов $w_f(C, v)$ и чисел Ву имеются аналогичные «оборотные» инварианты почти вложений. (Каждый из них соответствует некоторому *целочисленному одномерному циклу* во взрезанном квадрате графа [DMN+, §5].)

Например, *n-одические числа Ву* можно аналогично определить для n ломаных с общей вершиной, образующих почти вложение графа $K_{n,1}$.

Гипотеза. *Любой «оборотный» инвариант почти вложений является* линейной комбинацией с рациональными коэффициентами *триодических и циклических чисел Ву, а также чисел оборотов.*

Аналог этой гипотезы по модулю 2 (даже без чисел оборотов, но для «симметричных» инвариантов) вытекает из описания Е. Бордачевой (2024) порождающих в одномерной группе гомологий по модулю 2 взрезанного квадрата графа.

7. Трехмерные аналоги

Теорема 7.1 (Линейная теорема Конвея-Гордона-Закса)**.** *Если никакие четыре из шести точек в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости, то существуют два зацепленных треугольника с вершинами в этих шести точках (т. е. первый треугольник пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке).*

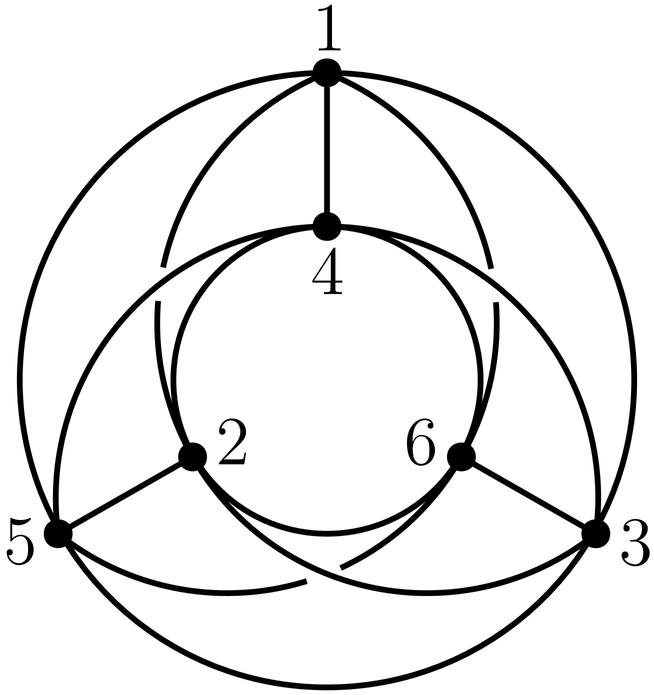


Рис. 7.1. Проекция на плоскость вложения $K_6 \to \mathbb{R}^3$

Пример 7.2. *(a) Для любого целого n в трехмерном пространстве существуют шесть точек, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых*

(a1) никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной,

(a2) коэффициент зацепления одной (неупорядоченной) пары непересекающихся циклов длины 3*, образованных ломаными, равен* $2n + 1$*, а также*

(a3) коэффициент зацепления любой другой пары непересекающихся циклов длины 3*, образованных ломаными, равен нулю.*

(b) (гипотеза) Возьмем любые 10 целых чисел $n_{123,456}, n_{124,356}, \ldots,$ *соответствующие 10 неупорядоченным разбиениям множества* $[6]$ *на два 3-элементных подмножества. Если сумма этих чисел нечетна, то в трехмерном пространстве существуют шесть точек* $1, 2, 3, 4, 5, 6$*, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых выполнено (a1), и коэффициент зацепления каждой пары* $\{ijk, pqr\}$ *непересекающихся циклов длины* 3*, образованных ломаными, равен* $n_{ijk,pqr}$.

Список литературы

[ABMt] * *Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, О. Никитенко, А. Скопенков,* Инварианты почти вложений графов в плоскость, https://turgor.ru/lktg/2024/3/index.html.

[ALM] *E. Alkin, A. Lazarev, A. Miroshnikov*, On winding numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.

[BF09] *K. Barnett, M. Farber.* Topology of Configuration Space of Two Particles on a Graph, I. Algebr. Geom. Topol. 9 (2009) 593–624. arXiv:0903.2180.

[Bo] *E. Bordacheva.* Symmetric 1-cycles in the deleted product of graph, https://old.mccme.ru//circles//oim/cath_bord_present.pdf.

[DMN+] * *С. Дженжер, А. Мирошников, О. Никитенко и А. Скопенков.* Циклы в графах и в гиперграфах, arXiv:2406.16705.

[FK19] *R. Fulek, J. Kynčl,* $\mathbb{Z}_2$-genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article No. 39; pp. 39:1–39:16, https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.

[Ga23] *T. Garaev*, On drawing K_5 minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.

[IKN+] *A. Inoue, N. Kimura, R. Nikkuni, K. Taniyama*, Crossing numbers and rotation numbers of cycles in a plane immersed graph, J. of Knot Theory and Its Ramif. 31:11, 2250076 (2022). arXiv:2205.01013.

[KK18] * *А. Канель-Белов, П. Кожевников*, О кратности покрытия ориентированными многоугольниками, Квант, N5 (2018), 20–24, https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf.

[KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov.* Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, Discr. Comp. Geom., 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.

[RS] * Введение в топологию (дискретные структуры и алгоритмы в топологии), курс А. Руховича и А. Скопенкова, https://old.mccme.ru//circles//oim/home/combtop13.htm#fivt.

[Sk06] * *A. Skopenkov,* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.

[Sk14] * *А. Скопенков,* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, Мат. просвещение, 32 (2024), 125–159. arXiv:1402.0658.

[Sk16] * *A. Skopenkov,* A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: Russian Math. Surveys, 73:2 (2018), 323–353.

[Sk18] * *А. Скопенков,* Инварианты изображений графов на плоскости, Мат. просвещение, 31 (2023), 74-127. arXiv:1805.10237.

[Sk20] * *А. Скопенков,* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Часть книги: http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf

[Sk20u] * *А. Скопенков.* Основы теории узлов и зацеплений для пользователя, Мат. просвещение, 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.

[Sk24] * *А. Скопенков.* Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. Мат. просвещение, 33 (2024), 87–132.

[Sk] * *А. Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.

[SS13] *M. Schaefer and D. Stefankovič.* Block additivity of $\mathbb{Z}_2$-embeddings. In Graph drawing, volume 8242 of Lecture Notes in Comput. Sci., 185–195. Springer, Cham, 2013. http://ovid.cs.depaul.edu/documents/genus.pdf

[ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer,* Hardness of almost embedding simplicial complexes in $\mathbb{R}^d$, Discr. Comp. Geom., 61:2 (2019), 452–463. arXiv:1703.06305.

[Ta88] * *С. Табачников*, О плоских кривых, Квант, N11 (1988), 59–63, https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyh.htm

[To84] * *А. Тоом*, Сколько площадей у многоугольника? Квант, N12 (1984), 9–12, https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm

[Va81] * *Н. Вагутен*, Формула площади, Квант, N4 (1981), 17–20, https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_ploshchadi.htm

[Wn] * https://ru.wikipedia.org/wiki/Число оборотов

[Za] *M. Zakharov*, On triodic and cyclic Wu numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.

Все авторы: Московский физико-технический институт.

А. Скопенков: Независимый московский университет, https://users.mccme.ru/skopenko/.