

Инварианты почти вложений графов в плоскость

Э. АЛКИН, Е. БОРДАЧЕВА, А. МИРОШНИКОВ, О. НИКИТЕНКО, А. СКОПЕНКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	1
1. Число оборотов: определение и обсуждение	2
2. Число оборотов и пересечения	4
3. Числа оборотов изображений графов	5
4. Почти вложения: определение и обсуждение	7
5. Основные результаты: числа оборотов для почти вложений	8
6. Триодическое и циклическое числа Bu	10
7. Трёхмерные аналоги	12
8. Ответы, указания и решения	13
Список литературы	16

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неформальное описание основной темы и основных результатов

Классической темой является изучение изображений без самопересечений графов на плоскости (т.е. вложений или плоских графов). Также представляет интерес изучение таких изображений графов, которые имеют «умеренные» самопересечения, например, почти вложения (см. определение рядом с рисунками 4.1 и 4.2).

Мы определим целочисленные инварианты почти вложений: число оборотов (§1), циклическое и триодическое числа Bu (§6). (В этом тексте инвариант — просто число, характеризующее почти вложение: мы не вводим понятие почти изотопии, относительно которой это число инвариантно.)

- Мы построим почти вложения, реализующие некоторые значения этих инвариантов.
- Мы докажем некоторые соотношения между инвариантами.
- Мы изучим значения, реализуемые как инвариант некоторого почти вложения, но не реализуемые никаким вложением.

Точнее, основными результатами являются утверждения 1.3, 5.2, 5.3, 5.5, 6.2.b, 6.3.b, 7.1.a.

Хотя этот текст элементарен, он мотивирован передним краем науки, см. замечания в конце §5, статьи [Sk18, KS20, IKN+, Ga23, Bo] и ссылки в них. Нам неизвестны доказательства гипотез 5.4.b, 5.7.b, 6.4.b, 6.5.b, 7.1.b, и решение задачи 5.8.

Об изучении этого текста на летней конференции см. [DMN+, Введение].

О стиле этого текста

Основные идеи представлены на «олимпиадных» примерах: на простейших (обычно маломерных) частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого и текст становится доступным для начинающих, и удается быстро добраться до интересных сложных и важных результатов,

Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков: Московский физико-технический институт.
О. Никитенко: Алтайский технический университет.
А. Скопенков: Независимый московский университет, <https://users.mccme.ru/skopenko/>.
Мы благодарны М. Дидину, П. Кожевникову и особенно Т. Гараеву за полезные обсуждения.

методов и теоретических идей. Более простой материал приводится для того, чтобы сделать естественным и доступным более сложный.

Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* последовательностью определений и результатов, составляющих его *доказательство*. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировки утверждения. Но мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний. Основные результаты называются «теоремами», менее важные результаты — «утверждениями», важные вспомогательные результаты — «леммами».

Мы излагаем теорию в виде последовательности задач. Изучение путем решения задач характерно для серьезного изучения математики, см. [HC19, §1.1], [ZSS, §1.2] и данные там ссылки. Оно продолжает древнюю культурную традицию. Задачи пронумерованы жирными цифрами, слово «задача» опускается. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать (и тогда в ссылках мы называем это утверждение утверждением, а не задачей). Указания к задачам приводятся либо сразу, либо в конце параграфа. Если к задаче или утверждению не приведено доказательство, то оно несложно. *Загадкой* называется не сформулированный четко вопрос; здесь нужно придумать и четкую формулировку, и доказательство.

Определения важных понятий даны **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти. *Разделы и задачи, отмеченные звездочкой, а также замечания*, не используются в дальнейшем.

1. ЧИСЛО ОБОРОТОВ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Пусть O, A, B, A_1, \dots, A_m — точки на плоскости.

Предположим, что $A \neq O$ и $B \neq O$ (но, возможно, $A = B$). Напомним, что *ориентированный (или направленный) угол* $\angle AOB$ — это число $t \in (-\pi, \pi]$, такое что вектор \overrightarrow{OB} сонаправлен вектору, полученному из \overrightarrow{OA} вращением на угол t . (Если Вы знакомы с комплексными числами, то можете рассматривать векторы на плоскости как комплексные числа и переписать это условие как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow e^{it}\overrightarrow{OA}$.)

Ломаная $A_1 \dots A_m$ — это (упорядоченный) набор $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m)$ отрезков. **Замкнутая ломаная** $A_1 \dots A_m$ — это набор $(A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m, A_mA_1)$ отрезков.¹

Пусть $A_1 \dots A_m$ — замкнутая ломаная, не проходящая через точку O . **Число оборотов** $w(A_1 \dots A_m, O)$ ломаной $A_1 \dots A_m$ вокруг точки O — это количество оборотов при вращении вектора, начало которого находится в точке O , а конец обходит ломаную в положительном направлении. Строго говоря,

$$2\pi \cdot w(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \dots + \angle A_{m-1}OA_m + \angle A_mOA_1$$

— сумма ориентированных углов.

Например, на рисунке 1.1

$$w(ABC, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COA) = +1 \quad \text{и}$$

$$w(ABCD, O) = \frac{1}{2\pi} (\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOA) = \frac{1}{2\pi} (\angle BOD + \angle DOB) = 0.$$

1.1. Число оборотов w является целым числом.

¹Набор отрезков — не то же самое, что их объединение. Таким образом, строго говоря, ломаная (определенная здесь) не является подмножеством плоскости. Поэтому, понятия «ориентированный» или «неориентированный» формально не применимы к ломаным. Тем не менее, иногда мы работаем с множеством отрезков как с их объединением, например, мы пишем «ломаная, не проходящая через точку». Определенное здесь понятие ломаной близко к тому, что иногда понимают как «ориентированную ломаную».

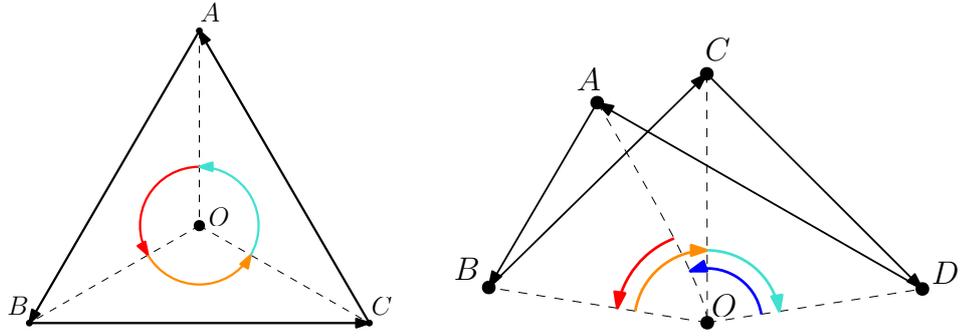


Рис. 1.1. $w(ABC, O) = +1$ и $w(ABCD, O) = 0$

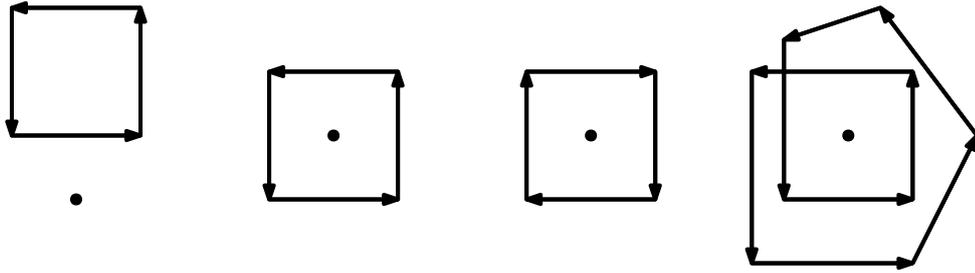


Рис. 1.2. Числа оборотов равны 0, +1, -1, +2

1.2. (а) Число оборотов (контура) любого выпуклого многоугольника вокруг любой точки из его внешности (внутренности) равно 0 (± 1). См. рисунок 1.2.

(б) Пусть ABC — правильный треугольник и O — его центр. Найдите $w(ABCABC, O)$.

(с) Для любых целого числа n и точки O на плоскости существует замкнутая ломаная, число оборотов которой вокруг O равно n .

(д) Приведите пример замкнутой ломаной L на плоскости такой, что $w(L, O) = 0$ для любой точки $O \in \mathbb{R}^2 - L$.

Утверждение, аналогичное 1.2.а, выполняется для любой замкнутой ломаной без самопересечений. (В зависимости от изложения это либо следствие *теоремы Жордана*, либо лемма в ее доказательстве.) Результат задачи 1.2.б показывает, что числа оборотов для разных ломаных с одинаковым объединением их отрезков могут быть разными.

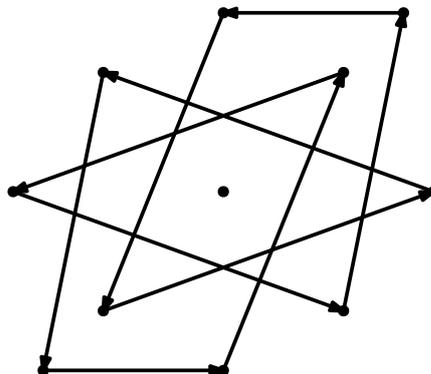


Рис. 1.3. Замкнутая ломаная, симметричная относительно точки; число оборотов равно 3

Теорема 1.3 (Борсука-Улама). Пусть замкнутая ломаная $A_1 \dots A_{2k}$ не проходит через точку O и симметрична относительно O (т. е. O — середина отрезка $A_j A_{k+j}$ для каждого $j = 1, \dots, k$). Тогда число оборотов ломаной вокруг точки нечетно.

Следующие обозначение и результаты будут полезны.

Пусть $A_1 \dots A_m$ — ломаная, не проходящая через точку O . Определим действительное число $w'(A_1 \dots A_m, O)$ формулой

$$2\pi \cdot w'(A_1 \dots A_m, O) := \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m.$$

Очевидно, что

- $2\pi w(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + \angle A_m O A_1$;
- если точки A_2, \dots, A_{m-1} лежат внутри угла $\angle A_1 O A_m$, то $2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) = \angle A_1 O A_m$.

1.4. (а) Имеем $\angle A_1 O A_m = 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) + 2\pi k$ для некоторого целого k .

(б) Имеем $w(A_1 \dots A_m, O) = w'(A_1 \dots A_j, O) + w'(A_j \dots A_m A_1, O)$ для каждого $j = 1, \dots, m$.

Обозначим через \bar{l} ломаную, полученную из ломаной l прохождением в противоположном порядке.

1.5. Пусть O, A, B — три попарно различных точки на плоскости.

(а) Пусть l_1, l_2, l_3 — ломаные, соединяющие точку A с точкой B , и не проходящие через точку O . Тогда $w(l_1 \bar{l}_2, O) + w(l_2 \bar{l}_3, O) = w(l_1 \bar{l}_3, O)$.

(б) Для любых трех целых чисел n_1, n_2, n_3 , таких что $n_1 + n_2 = n_3$, существуют три ломаные l_1, l_2, l_3 , соединяющие точку A с точкой B , не проходящие через точку O , и такие, что

$$w(l_1 \bar{l}_2, O) = n_1, \quad w(l_2 \bar{l}_3, O) = n_2 \quad \text{и} \quad w(l_1 \bar{l}_3, O) = n_3.$$

В утверждении 2.1.а, задачах 1.5.б, 2.1.бс и других *примерах* в этом тексте (в отличие от других *утверждений*, кроме 2.1.а), Вы можете предложить эвристическое рассуждение, а не строгое доказательство, если Вам или Вашему консультанту не станет понятно, что это приводит к путанице.

1.6. Пусть $A_1 A_2 A_3$ — правильный треугольник, а точка O — его центр. Для $m = 1, 2, 3$ обозначим через l_m ломаную, не пересекающую луч OA_m и соединяющую A_{m+1} с A_{m+2} , где нумерация берется по модулю 3. Тогда $w(l_1 l_2 l_3, O) = \pm 1$.

2. ЧИСЛО ОБОРОТОВ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Этот раздел используется только в набросках доказательств теорем 5.2 и 5.5.а в §5.

2.1. (а) На плоскости даны точки P_0, P_1 , соединенные ломаной, не пересекающейся с замкнутой ломаной L . Тогда $w(L, P_0) = w(L, P_1)$.

Указание: используйте *соображения непрерывности*.

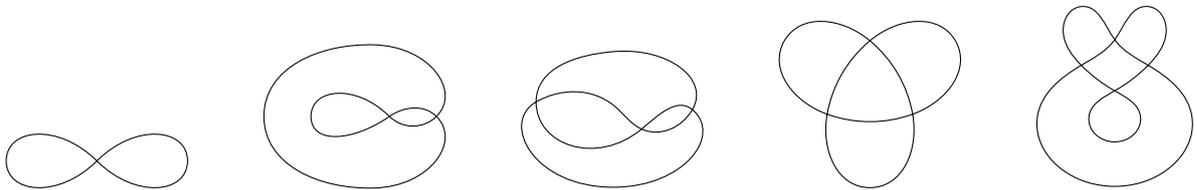


Рис. 2.1. Некоторые замкнутые ломаные

(б) Возьмем замкнутые ломаные L на плоскости, показанные на рисунке 2.1 (с некоторой ориентацией; никакая ломаная не проходит дважды ни через какой отрезок и не меняет существенно своего направления ни в одной точке). Раскрасьте дополнение $\mathbb{R}^2 - L$ в соответствии с четностью числа оборотов ломаной L .

(с) Для замкнутых ломаных L из (б) раскрасьте дополнение $\mathbb{R}^2 - L$ в соответствии с числом оборотов ломаной L .

2.2. Возьмем на плоскости замкнутую и незамкнутую ломаные L и P , все вершины которых попарно различны и находятся в общем положении. Пусть P_0 и P_1 — начальная и конечная точки ломаной P . Предположим, что $P_0, P_1 \notin L$.

(а) Тогда $|L \cap P| \equiv w(L, P_1) - w(L, P_0) \pmod{2}$. (Это дискретная версия *теоремы Стокса*.)

Подсказка. Достаточно доказать это утверждение для достаточно малого отрезка P' , такого что $P' \subset P$.

(б) Если точка P_1 расположена достаточно далеко от ломаной L , то $w(P_0, L) \equiv |L \cap P| \pmod{2}$, а также $w(P_0, L)$ равно сумме знаков точек пересечений ломаных P и L (определенных в [Sk18, §1.3]).

Пусть L — замкнутая плоская ломаная, все вершины которой попарно различны и находятся в общем положении. Ввиду утверждения 2.2.а дополнение к L допускает «шахматную раскраску», такую, что соседние области покрашены в разные цвета. *Внутренностью по модулю 2* ломаной L называется объединение черных областей шахматной раскраски (при условии, что бесконечная область покрашена в белый цвет). Другими словами, это множество всех точек $x \in \mathbb{R}^2 - L$, для которых найдется ломаная P ,

- соединяющая точку x с точкой, расположенной достаточно далеко от L (т. е. вне выпуклой оболочки ломаной L),
- пересекающая L в нечетном числе точек, и
- такая, что все вершины ломаных L и P попарно различны и находятся в общем положении.

Корректность этого определения следует из [Sk18, лемма 1.3.3 о четности].

3. ЧИСЛА ОБОРОТОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ ГРАФОВ

Замечание (некоторые строгие определения). Вы можете работать с определенными здесь понятиями на интуитивном уровне, пока Вам или консультанту не станет понятно, что это приводит к путанице.

Графом (конечным) (V, E) называется конечное множество V вместе с набором $E \subset \binom{V}{2}$ его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар несовпадающих элементов). (Общепринятый термин для этого понятия — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.) Элементы данного конечного множества называются **вершинами**. Пары вершин из E называются *ребрами*. Ребро, соединяющее вершины i и j , обозначается ij (а не (i, j) , чтобы не путать с упорядоченными парами). Цикл в графе обозначается перечислением его вершин в порядке их следования (без запятых).

Говоря нестрого, граф планарен, если его можно нарисовать «без самопересечений» на плоскости. Граф (V, E) называется **планарным** (или кусочно-линейно вложимым в плоскость), если на плоскости существуют

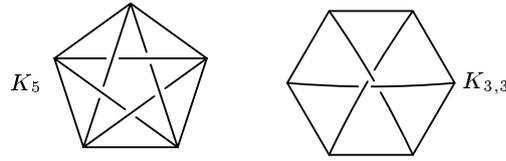
- набор из $|V|$ точек, соответствующих вершинам, а также
- набор несамопересекающихся ломаных, соединяющих пары (точек) из E , причем никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной.²

Обозначим через

- $[n]$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n полный граф на множестве $[n]$ вершин;
- $K_{m,n}$ полный двудольный граф с долями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию объекта A).

Мы рассматриваем изображения графа на плоскости, при которых ребра изображаются ломаными и допускаются пересечения этих ломаных. Приведем строгие определения. Пусть

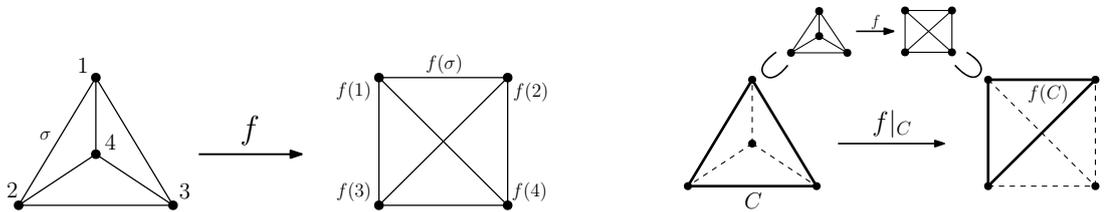
²Тогда любые две ломаные либо не пересекаются, либо пересекаются только по их общей концевой вершине. Мы не требуем, чтобы «ни одна изолированная вершина не лежала ни на одной из ломаных», поскольку этого свойства всегда можно добиться.

Рис. 3.1. Непланарные графы K_5 и $K_{3,3}$

K — граф, имеющий V вершин. **Отображение** (кусочно-линейное) $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость — это

- набор V точек на плоскости, соответствующих вершинам, а также
- набор (незамкнутых) ломаных на плоскости, соединяющих те пары из набора точек, которые соответствуют парам смежных вершин.³

Сужение $f|_\sigma$ на ребро σ — это соответствующая ломаная. **Образ** $f(\sigma)$ ребра σ — это объединение отрезков соответствующей ломаной. **Образ** набора ребер — это объединение образов всех ребер из набора.

Рис. 3.2. Отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (слева) и его сужение $f|_C$ (справа)

Пусть K — граф, и $C = v_1 \dots v_n$ — ориентированный цикл в K . Например, для $j = 1, 2, 3, 4$ обозначим через C_j ориентированный цикл в K_4 , полученный удалением j из 1234.

Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение. **Сужением** $f|_C : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения f на цикл C называется замкнутая ломаная, «образованная» ломаными $f|_{v_1v_2}, \dots, f|_{v_{n-1}v_n}, f|_{v_nv_1}$ в указанном порядке (рисунок 3.2).

3.1. Для любых отображения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и точки $O \in \mathbb{R}^2 - f(K_4)$ выполнено

$$\sum_{j=1}^4 (-1)^j w(f|_{C_j}, O) = 0 : \quad -w(f|_{234}, O) + w(f|_{134}, O) - w(f|_{124}, O) + w(f|_{123}, O) = 0.$$

Для вершины v в графе K , такой что $f(v) \notin f(C)$ положим

$$w_f(C, v) := w(f|_C, f(v)).$$

3.2. (а) Для любого целого n существует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что

$$f(1) \notin f(C_1), \quad w_f(C_1, 1) = n, \quad \text{и} \quad f(j) \notin f(C_j), \quad w_f(C_j, j) = 0 \quad \text{для каждого} \quad j = 2, 3, 4.$$

(б) Для любых целых n_1, n_2, n_3, n_4 существует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $f(j) \notin f(C_j)$ и $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Указание. Для построения примеров не нужны сложные картинки — достаточно *простых* преобразований *простых* картинок. Например, полезно преобразование на рисунке 3.3.

Подробнее о числе оборотов и связанных с ним понятиях см. [Wn, Va81, To84, Ta88], [KK18, Теорема 2], [Sk18, §2].

³Это небольшое искажение терминологии. У ломаной есть начало и конец поэтому приведенное определение есть определение отображения ориентированного графа. Два отображения ориентированных графов *эквивалентны*, если одно можно получить из другого изменением ориентации некоторых ребер, а один из соответствующих наборов ломаных может быть получен из другого прохождением соответствующих ломаных в противоположном порядке. Строго говоря, отображение графа является классом эквивалентности по этому отношению эквивалентности.

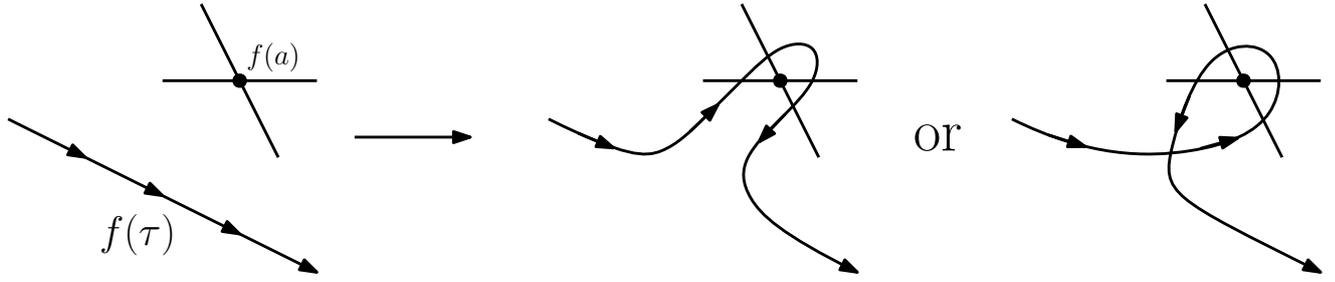


Рис. 3.3. «Пальцевые движения» (для отображения f , ребра τ , относительно вершины a) первого и второго типов, соответственно

4. ПОЧТИ ВЛОЖЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Теорема 4.1 (Ханани-Татт; ван Кампен). *Для любого отображения $K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ существуют два несмежных ребра, образы которых пересекаются.*

Это следует из утверждения 2.1.а и теоремы 5.5.а ниже. (Стандартное доказательство [Sk18, §1.4] не использует понятия числа оборотов.) Аналог для $K_{3,3}$ справедлив ввиду утверждений 2.1.а и 5.7.а ниже.

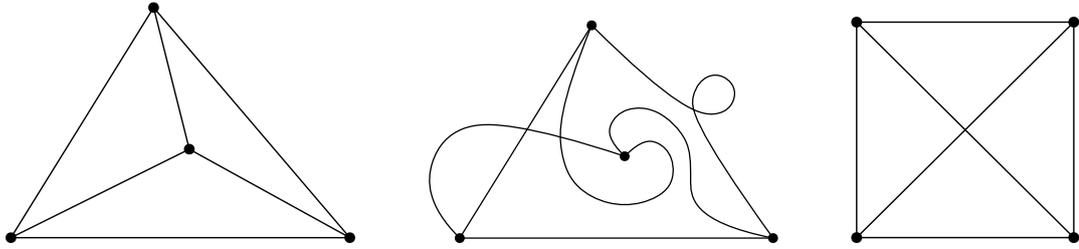


Рис. 4.1. Вложение, почти вложение и отображение (изображение), которое не является почти вложением

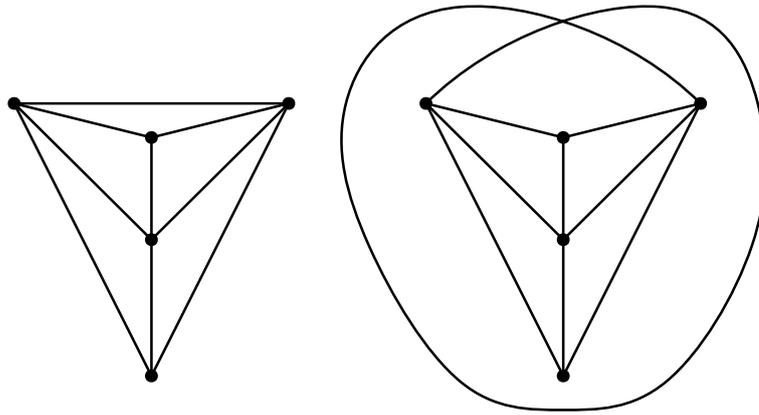


Рис. 4.2. Вложение и почти вложения графа K_5 без ребра

Отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K называется **почти вложением**, если $f(\alpha) \cap f(\beta) = \emptyset$ для любых двух несмежных симплексов (т.е. вершин и ребер) $\alpha, \beta \subset K$. Т.е. если

- (i) образы несмежных ребер не пересекаются,
- (ii) образ любой вершины не лежит на образе никакого ребра, несмежного с этой вершиной,
- (iii) образы различных вершин различны.

Замечание. Этот текст касается в первую очередь *инвариантов* почти вложений, а не проблем их *существования*. Поэтому мы сохраняем в определении свойства (ii, iii), выполнения которых можно добиться достаточно малым шевелением отображения, с сохранением

свойства (i)). Если граф допускает почти вложение в плоскость, то граф планарен (доказательство нетривиально).

Почти вложения естественным образом возникают в топологической теории графов, в комбинаторной геометрии, в топологической комбинаторике и при изучении вложений (графов в поверхности и гиперграфов в многомерные евклидовы пространства). Более подробная мотивировка приведена в [ST17, §1, ‘Motivation and background’], [Sk, §6.10 ‘Almost embeddings, \mathbb{Z}_2 - and \mathbb{Z} -embeddings’].

5. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: ЧИСЛА ОБОРОТОВ ДЛЯ ПОЧТИ ВЛОЖЕНИЙ

5.1. (а) Для любого целого n и точки O на плоскости существует почти вложение $f : K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2 - O$, такое что $w(f|_{123}, O) = n$.

(б) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 4) = n$.

Для любого вложения $f : K_3 \sqcup \{4\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем $w_f(123, 4) \in \{-1, 0, 1\}$ (данное утверждение близко к теореме Жордана).

Напомним, что

$$\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) = w_f(234, 1) + w_f(134, 2) + w_f(124, 3) + w_f(123, 4).$$

Теорема 5.2. Для любого почти вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j) \equiv 1 \pmod{2}$.

Аналог теоремы 5.2 для вложений вместо почти вложений доказывается проще (он близок к теореме Жордана). Более того, для любого вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ три из четырех чисел из теоремы 5.2 равны нулю, а оставшееся равно ± 1 . Аналог теоремы 5.2 для отображений вместо почти вложений неверен по утверждению 3.2. В отличие от утверждения 3.1, теорема 5.2 не следует из «соотношения $123 + 134 + 142 + 243 = 0$ в графе».

Определение отображения *общего положения* графа в плоскость дано в [Sk18, §1.4].

Набросок доказательства теоремы 5.2. Пусть $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ отображения общего положения. Тогда образы любых двух несмежных ребер пересекаются в конечном числе точек. Назовем *числом Радона* $\rho(f) \in \mathbb{Z}_2$ четность суммы

- количества точек пересечения образов несмежных ребер и
- количества тех вершин j графа K_4 , образы которых лежат во внутренней по модулю 2 образа $f(C_j)$.

Ввиду утверждения 2.2.а, для любого почти вложения *общего положения* $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ четность числа $\sum_{j=1}^4 w_f(C_j, j)$ равна $\rho(f)$. Теорема 5.2 выводится при помощи аппроксимации из этого результата и следующей знаменитой теоремы Радона для плоскости [Sk18, Лемма 2.2.3]: для любого отображения *общего положения* графа K_4 в плоскость число Радона нечетно. Ср. [Sk18, §2.2]. \square

Пример 5.3. (а) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(C_1, 1) = n$, $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j = 2, 3$ и $w_f(C_4, 4) = n + 1$.

(б) Для любых целых n_1, n_2, n_3, n_4 , таких что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = \pm 1$ существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Пример 5.4. (а) (Е. Морозов) Существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) \neq \pm 1$.

(б) (гипотеза; см. [ALM]) Для любых целых чисел n_1, n_2, n_3, n_4 , сумма которых нечетна, существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(C_j, j) = n_j$ для каждого $j = 1, 2, 3, 4$.

Напомним, что $K - e$ — граф, полученный из графа K удалением ребра e .

Теорема 5.5. Для любого почти вложения $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

- (a) $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) \equiv 1 \pmod{2}$;
- (b)* $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = \pm 1$.

Ср. теорему 5.2 и гипотезу 5.4.b. Аналог пункта (b) для вложений вместо почти вложений более прост (и близок к теореме Жордана). Пункт (a) несложен и хорошо известен, а пункт (b) является недавним нетривиальным результатом [Ga23].

5.6. (a) Верен ли аналог теоремы 5.5.a для отображений вместо почти вложений?

(b) Для любого целого n существует почти вложение $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 5) = n$. (См. рисунок 4.2, справа, для $n = 2$.)

Набросок доказательства теоремы 5.5.a. Для отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ покрасим в красный цвет точки пересечения образов несмежных ребер. Числом ван Кампена $v(f) \in \mathbb{Z}_2$ называется четность количества красных точек. Ввиду утверждения 2.2.a для отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$, сужение которого на $K_5 - 45$ является почти вложением, четность числа $w_f(123, 5) - w_f(123, 4)$ равна $v(f)$. Теорема 5.5.a выводится из этого и следующей знаменитой теоремы ван Кампена-Флореса для плоскости [Sk18, Лемма 1.4.3]: для любого отображения общего положения $f : K_5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ число ван Кампена $v(f)$ нечетно.⁴ □

5.7. Возьмем ребро ab графа $K_{3,3}$. Обозначим через $C = C_{ab}$ произвольно ориентированный цикл $K_{3,3} - a - b$ длины 4. Для любого почти вложения $f : K_{3,3} - ab \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

- (a) $w_f(C, a) - w_f(C, b) \equiv 1 \pmod{2}$;
- (b) (гипотеза) $w_f(C, a) - w_f(C, b) = \pm 1$.

Пункт (a) доказывается аналогично теореме 5.5.a. Аналог пункта (b) для вложений вместо почти вложений более прост (и близок к теореме Жордана). Осторожно, прямое доказательство пункта (b) может содержать технические детали (как в доказательстве теоремы 5.5.b); возможно, существует простая редукция к теореме 5.5.b, см. рисунок 5.1.

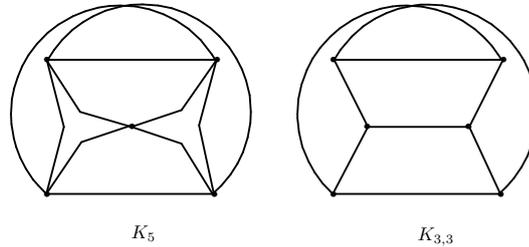


Рис. 5.1. «Почти вложение» $K_5 \rightarrow K_{3,3}$

5.8 (открытая проблема; загадка). Пусть K — граф (a) куба; (b) октаэдра.

Для почти вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ рассмотрим набор целых чисел $w_f(C, v)$, где $v \in K$ — вершина, а $C \subset K - v$ — ориентированный цикл. Опишите наборы, реализуемые почти вложениями $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Замечание. (a) Целое число $w_f(C, v)$ и инварианты, изучаемые в §6, являются инвариантами (почти) вложения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ относительно (почти) изотопии. Они являются частями инварианта Хэфлигера-Ву для f [Sk06, §5].

(b) Алгебраическая версия почти вложений (\mathbb{Z}_2 -вложения) появилась в 1930-х годах и активно изучается в теории графов с 2000-х годов. См., например, обзоры [SS13], [Sk, §6.10 «Почти вложения, \mathbb{Z}_2 - и \mathbb{Z} -вложения»] и статью [FK19] о связи \mathbb{Z}_2 -вложений и задачи минимизации ранга при восполнении матрицы. Аналоги утверждений 5.2, 5.5.a, 5.7.a верны для \mathbb{Z}_2 -вложений. Гипотеза: аналоги утверждений 5.5.b, 5.7.b верны для \mathbb{Z} -вложений, но неверны для \mathbb{Z}_2 -вложений.

⁴Теорема 5.5.b является целочисленной версией для почти вложений этой теоремы. Заметим, что эта теорема не имеет целочисленной версии для отображений (это известно и объяснено в [Ga23, Замечание 4]).

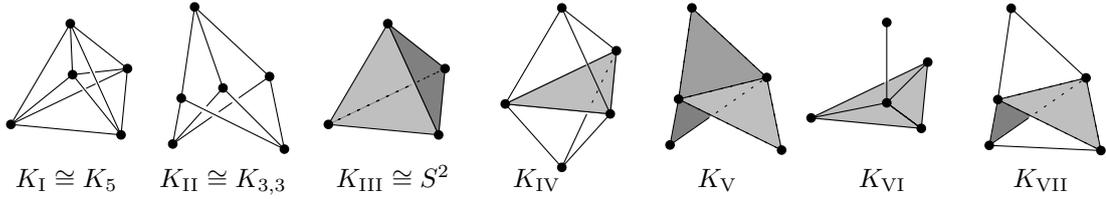


Рис. 5.2. Двумерные гиперграфы, не вложимые в плоскость

(с) *Гиперграфы* — многомерные аналоги графов: ребрами могут быть не только двухэлементные, но и любые подмножества вершин. Классическая задача топологии, комбинаторики и компьютерной науки — нахождение критериев (и алгоритмов) реализуемости гиперграфов в евклидовом пространстве данной размерности d .

В 1930-1960-е гг. такой критерий был получен классиками топологии для $2d \geq 3k + 3$, где k — размерность гиперграфа. Полиномиальный алгоритм распознавания реализуемости, основанный на этом критерии, был получен в 2013. Алгоритмическая неразрешимость для $2d < 3k + 2$ анонсирована в 2019 году на конференции в Обервольфахе (Марек Филадельский, Ульрих Вагнер и Стефан Жечев). Ошибку нашел в 2020 году Аркадий Скопенков (она признана авторами). Она заключалась в том, что в многомерном аналоге теоремы 5.5.b (и примера 7.1.a) значения некоторого инварианта не обязательно равны ± 1 . В 2020 году Роман Карасев и А. Скопенков показали, что этот инвариант принимает любые нечетные значения. Их гипотеза об аналогичном результате для графов на плоскости опровергнута в 2023 году Тимуром Гараевым, см. теорему 5.5.b. См. ссылки в обзорах [Sk06, §5], [Sk18, §3] и недавние работы [KS20, Ga23].

6. ТРИОДИЧЕСКОЕ И ЦИКЛИЧЕСКОЕ ЧИСЛА ВУ

Пусть на плоскости ломаные l_1, l_2, l_3 соединяют точку O с точками A_1, A_2, A_3 , соответственно. Предположим, что $A_i \notin l_j$ для всех $i \neq j$. (Другими словами, напомним, что граф с вершинами $\{1, 2, 3, 1'\}$, где $\deg 1' = 3$ и $\deg m = 1$ для каждого $m \in [3]$, обозначается через $K_{3,1}$; возьмем почти вложение $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и обозначим $l_m := f(1'm)$ для каждого $m \in [3]$.)

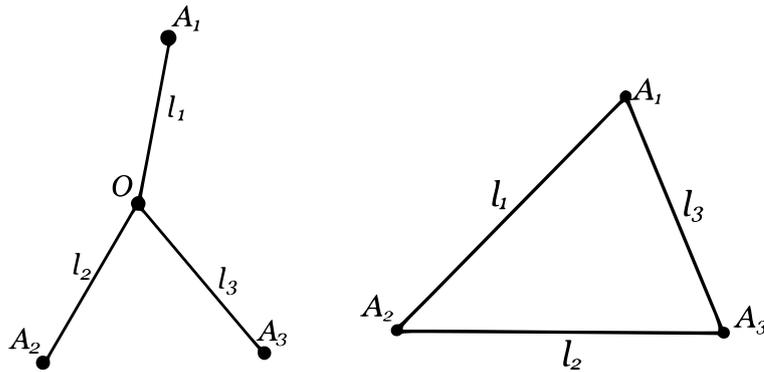


Рис. 6.1. Триод и треугольник

Триодическое число $Wu(l_1, l_2, l_3)$ определяется как число оборотов вектора в результате следующих вращений:

- от вектора $\overrightarrow{A_1 A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1 A_3}$, при котором конец вектора движется по ломаной $\bar{l}_2 l_3$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_1 A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2 A_3}$, при котором начало вектора движется по $\bar{l}_1 l_2$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2 A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2 A_1}$, при котором конец вектора движется по $\bar{l}_3 l_1$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_2 A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3 A_1}$ по $\bar{l}_2 l_3$, затем
- от вектора $\overrightarrow{A_3 A_1}$ к вектору $\overrightarrow{A_3 A_2}$ по $\bar{l}_1 l_2$, затем

- от вектора $\overrightarrow{A_3A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_2}$ по $\overline{l_3l_1}$.

Это равно удвоенному (нецелому) числу оборотов в результате первых трех из вышеприведенных вращений. Строго говоря,

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &:= w'(\overline{l_2l_3}, A_1) + w'(\overline{l_1l_2}, A_3) + w'(\overline{l_3l_1}, A_2) + w'(\overline{l_2l_3}, A_1) + w'(\overline{l_1l_2}, A_3) + w'(\overline{l_3l_1}, A_2) = \\ &= 2(w'(\overline{l_2l_3}, A_1) + w'(\overline{l_1l_2}, A_3) + w'(\overline{l_3l_1}, A_2)). \quad (*) \end{aligned}$$

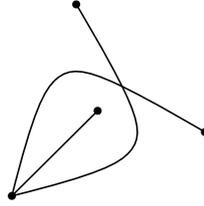


Рис. 6.2. Тройка ломаных с триодическим числом $\text{Wu} \pm 3$

6.1. (a) Для трех отрезков, соединяющих вершины A_1, A_2, A_3 правильного треугольника с его центром O , триодическое число Wu равно ± 1 .

(b) Для трех ломаных на рисунке 6.2 триодическое число Wu равно ± 3 .

6.2. (a) Для любых ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами (т. е. для любого почти вложения $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$) триодическое число Wu нечетно.

(b) Для любого целого n существуют ломаные l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами (т. е. существует почти вложение $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$), триодическое число Wu которых равно $2n + 1$.

(c) Для любого вложения $f : K_{3,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ триодическое число Wu равно ± 1 .

(d) Перестановка ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами умножает триодическое число Wu на знак перестановки.

Пусть на плоскости заданы точки A_1, A_2, A_3 и ломаные l_1, l_2, l_3 соединяют A_1 с A_2 , A_2 с A_3 , A_3 с A_1 соответственно (и, таким образом, образуют замкнутую ломаную). Предположим, что A_i не лежит на ломаной l_{i+1} для каждого $i = 1, 2, 3$ (нумерация по модулю 3; другими словами, ломаные образуют почти вложение $K_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Циклическое число $\text{Wu}(l_1, l_2, l_3)$ определяется как удвоенное число оборотов вектора в результате следующих вращений:

- от вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ к вектору $\overrightarrow{A_1A_3}$, при котором конец вектора движется по ломаной l_2 , затем

- от вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_3}$, при котором начало вектора движется по ломаной l_1 , затем

- от вектора $\overrightarrow{A_2A_3}$ к вектору $\overrightarrow{A_2A_1}$, при котором конец вектора движется по ломаной l_3 .

Другими словами, $\text{wu}(l_1, l_2, l_3)$ определяется следующей формулой, аналогичной (*):

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) := 2(w'(l_2, A_1) + w'(l_1, A_3) + w'(l_3, A_2)). \quad (**)$$

6.3. (a') Если три ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами являются сторонами треугольника, то циклическое число Wu равно ± 1 .

(a) Для любых ломаных l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами циклическое число Wu нечетно.

(b) Для любого n существуют ломаные l_1, l_2, l_3 с вышеуказанными свойствами, циклическое число Wu которых равно $2n + 1$.

Если три ломаных с вышеуказанными свойствами образуют замкнутую несамопересекающуюся ломаную, то циклическое число Wu равно ± 1 (это утверждение близко к теореме Жордана).

Циклическое число Wu схоже со *степенью* замкнутой кривой, но отличается от нее.

6.4. (а) Для любого почти вложения $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) + \text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = 2w_f(123, 4).$$

(б) (гипотеза; см. [Za]) Для любых двух нечетных чисел n, m существует почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $\text{wu}(f|_{12}, f|_{23}, f|_{31}) = m$ и $\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) = n$.

6.5. (а) Для любого почти вложения $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{41}, f|_{42}, f|_{43}) - \text{wu}(f|_{51}, f|_{52}, f|_{53}) = 2(w_f(123, 4) - w_f(123, 5)).$$

(б) (гипотеза) Для любого почти вложения $f : K_{3,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеем

$$\text{wu}(f|_{1'1}, f|_{1'2}, f|_{1'3}) - \text{wu}(f|_{2'1}, f|_{2'2}, f|_{2'3}) = \pm 2.$$

По пункту (а), простое решение пункта (б) даст простое доказательство теоремы 5.5.b.

7. ТРЕХМЕРНЫЕ АНАЛОГИ

Линейная теорема Конвея-Гордона-Закса. Если никакие четыре из шести точек в трехмерном пространстве не лежат в одной плоскости, то существуют два зацепленных треугольника с вершинами в этих шести точках. (т. е. первый треугольник пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке) (Доказательство см. в обзоре [Sk14].)

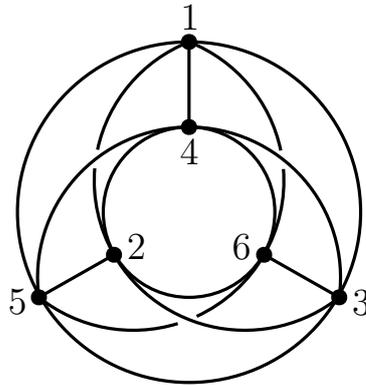


Рис. 7.1. Проекция на плоскость вложения $K_6 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Эквивалентные строгие определения *коэффициента зацепления* непересекающихся замкнутых ломаных в трёхмерном пространстве (используемые в следующей задаче) можно найти в [Sk20u, §§4,8], [Sk24, §§1.2,1.3], [Sk, §§4.2,4.3].

Пример 7.1 (ср. рисунок 7.1). * (а) Для любого целого n в трехмерном пространстве существуют шесть точек, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых

(а1) никакая из ломаных не пересекает внутренность другой ломаной,

(а2) коэффициент зацепления одной (неупорядоченной) пары непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен $2n + 1$, а также

(а3) коэффициент зацепления любой другой пары непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен нулю.

(б) (гипотеза) Возьмем любые 10 целых чисел $n_{123,456}, n_{124,356}, \dots$, соответствующие 10 неупорядоченным разбиениям множества $[6]$ на два 3-элементных подмножества. Если сумма этих чисел нечетна, то в трехмерном пространстве существуют шесть точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, а также попарно соединяющие их несамопересекающиеся ломаные, для которых выполнено (а1), и коэффициент зацепления каждой пары $\{ijk, pqr\}$ непересекающихся циклов длины 3, образованных ломаными, равен $n_{ijk,pqr}$.

Часть (а) доказана в [KS20, Предложение 1.2], но могла быть известна и раньше. Часть (б), по-видимому, можно доказать с помощью [KS20, Лемма 2.1].

8. ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1.1. Для $j = 1, \dots, m$ обозначим $t_j := \angle A_j O A_{j+1}$, где $A_{m+1} = A_1$. Тогда

$$\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow e^{it_m} \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1})} \overrightarrow{OA_{m-1}} \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow e^{i(t_m+t_{m-1}+\dots+t_1)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Следовательно, $(t_m + t_{m-1} + \dots + t_1)/2\pi$ является целым числом.

1.2. (а) Обозначим через Ω данный выпуклый многоугольник.

Если точка O лежит вне Ω , то проведем через O две опорные прямые к Ω . Возьмем две точки A, B из пересечений этих опорных прямых с контуром $\partial\Omega$ многоугольника. Имеем $w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle AOB + \angle BOA) = 0$.

Если точка O лежит внутри Ω , нарисуем правильный треугольник ABC с центром в O . Возьмем три точки A', B', C' пересечения лучей OA, OB, OC с контуром $\partial\Omega$ многоугольника. Они разбивают ломаную $\partial\Omega$ на три ломаные. Имеем

$$w(\partial\Omega, O) = \frac{1}{2\pi}(\angle A'OB' + \angle B'OC' + \angle C'OA') = \frac{3}{2\pi}\angle A'OB' = \frac{3}{2\pi}\angle AOB = \pm 1.$$

(b) Пользуясь пунктом (а), имеем $w(ABCABC, O) = 2 \cdot w(ABC, O) = \pm 2$.

(c) Если $n = 0$, примером является замкнутая ломаная, состоящая из одной точки. Если $n \neq 0$, пусть ABC — правильный треугольник, ориентированный по часовой стрелке при $n < 0$ и против часовой стрелки иначе. Пусть O — его центр. Рассмотрим замкнутую ломанную $L = \underbrace{ABC \dots ABC}_{|n| \text{ раз}}$. Пользуясь пунктом (а), имеем $w(L, O) = |n| \cdot w(ABC, O) = n$.

(d) Тривиальным примером является замкнутая ломаная, состоящая из одной точки. Другой пример: замкнутая ломаная $ABCB$ для любых трех точек A, B и C на плоскости.

1.3. Ввиду симметричности, имеем $w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O)$. Тогда

$$\begin{aligned} w(A_1 \dots A_{2k}, O) &= w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) + w'(A_{k+1} \dots A_{2k} A_1, O) = \\ &= 2w'(A_1 \dots A_{k+1}, O) = 2 \left(\frac{\angle A_1 O A_{k+1}}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n \end{aligned}$$

для некоторого целого n . Здесь предпоследнее равенство следует из утверждения 1.4.а.

1.4. (а) Используя формулу из доказательства утверждения 1.1, имеем

$$e^{i\angle A_1 O A_m} \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA_m} \uparrow\uparrow e^{2\pi i w'(A_1 \dots A_m, O)} \overrightarrow{OA_1}.$$

Следовательно, $\angle A_1 O A_m - 2\pi w'(A_1 \dots A_m, O) = 2\pi k$ для некоторого целого k .

1.5. Подсказка. (а) Используйте утверждение 1.4.б и равенство $w'(l, O) = -w'(\bar{l}, O)$ для любых точки O и ломаной l , не проходящей через O .

1.6. Указание. Можно считать, что вершины треугольника пронумерованы против часовой стрелки. Докажите, что $w'(l_0, O) = w'(l_1, O) = w'(l_2, O) = \frac{2\pi}{3}$. Для этого обозначим через $B_1 \dots B_m$ последовательные вершины ломаной l_0 . Для $j \in [m-1]$ положим $t_j := \angle B_j O B_{j+1} \in (-\pi, \pi)$. Докажите, что $T_j := t_1 + \dots + t_j \in (-\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ для любого $j \in [m-1]$, и $w'(l_0, O) = T_{m-1} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ для некоторого целого k . Затем выведите, что $k = 0$.

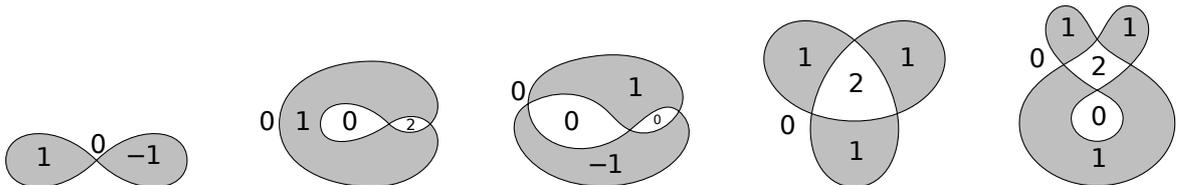


Рис. 8.1. Раскраска дополнений замкнутых ломаных с рисунка 2.1 в соответствии с числом оборотов

2.1. (b,c) рисунок 8.1.

3.1. Подсказка. Используйте следующие равенства: $w'(f|_{ij}, O) = -w'(f|_{ji}, O)$ для любого ребра ij и $w(f|_{ijk}, O) = w'(f|_{ij}, O) + w'(f|_{jk}, O) + w'(f|_{ki}, O)$ для любого цикла ijk .

3.2. Указания. (а) Квадрат с диагоналями образует отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; пусть вершины $f(i)$, $i \in [4]$ пронумерованы против часовой стрелки. Тогда $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j \in [4]$. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра 24 относительно вершины 1 первого/второго типа, если n положительно/отрицательно соответственно. Полученное отображение f_1 является искомым.

(б) Рассмотрим отображение f_1 из доказательства пункта (а) для $n = n_1$. Сделаем $|n_2|$ пальцевых движений ребра 13 относительно вершины 2 первого/второго типа, если n_2 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_2 . Сделаем $|n_3|$ пальцевых движений ребра 24 относительно вершины 3 первого/второго типа, если n_3 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_3 . Сделаем $|n_4|$ пальцевых движений ребра 13 относительно вершины 4 первого/второго типа, если n_4 положительно/отрицательно соответственно. Полученное отображение f_4 является искомым.

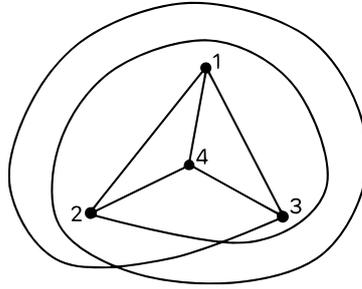


Рис. 8.2. Почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 4) = 3$

5.1. (б) См. рисунок 8.2 для $n = 3$. Чтобы получить отображение для пункта (а) уберем образы ребер, исходящие из $f(4)$, и заменим $f(4)$ на O .

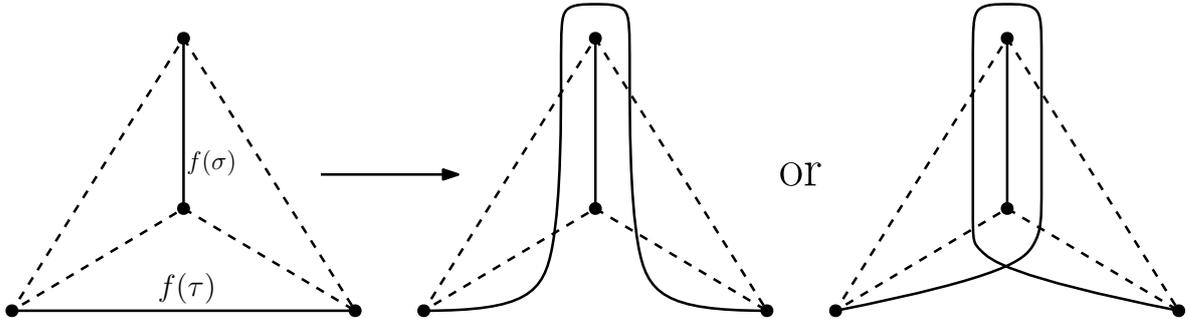


Рис. 8.3. Пальцевые движения (ребра τ относительно отрезка $f(\sigma)$) первого и второго типов соответственно

5.3. Указания. (а) Правильный треугольник с его центром и ребрами, соединяющими центр с вершинами, образуют отображение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$; пусть вершины $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ пронумерованы против часовой стрелки. Тогда $w_f(C_j, j) = 0$ для каждого $j \in [3]$, и $w_f(C_4, 4) = 1$. Сделаем $|n|$ пальцевых движений ребра 23 относительно отрезка $f(14)$ (рисунок 8.3, ср. с рисунком 3.3) первого/второго типа, если n отрицательно/положительно соответственно. Полученное отображение f_1 является искомым.

(б) В следующем абзаце мы построим почти вложение для $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = 1$. Чтобы построить почти вложение f для $\sum_{j=1}^4 (-1)^j n_j = -1$, возьмем почти вложение g для $m_1 = n_2$, $m_2 = n_1$, $m_3 = -n_3$, $m_4 = -n_4$, где $\sum_{j=1}^4 (-1)^j m_j = 1$. Тогда $f = g \circ \sigma$, где $\sigma : K_4 \rightarrow K_4$ перестановка, которая меняет местами вершины 1 и 2.

Рассмотрим отображение f_1 из доказательства пункта (а) для $n = n_1$. Сделаем $|n_2|$ пальцевых движений ребра 13 относительно отрезка $f_1(24)$ первого/второго типа, если n_2 положительно/отрицательно соответственно. Обозначим полученное отображение через f_2 . Сделаем $|n_3|$ пальцевых движений ребра 12 относительно отрезка $f_2(34)$ первого/второго типа, если n_3 отрицательно/положительно соответственно. Полученное отображение f_3 является искомым.

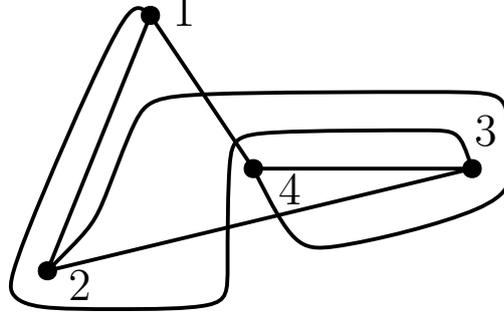


Рис. 8.4. Почти вложение $f : K_4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $\sum_{j=1}^4 (-1)^j w_f(C_j, j) = 3$

5.4. Указание. (а) См. рисунок 8.4.

5.6. (а) Нет. Правильный пятиугольник $f(1) \dots f(5)$ со всеми диагоналями, но без ребра $f(4)f(5)$ образует отображение $f : K_5 - 45 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что $w_f(123, 4) - w_f(123, 5) = 0$.

(б) См. рисунок 8.5 для $n = 3$.

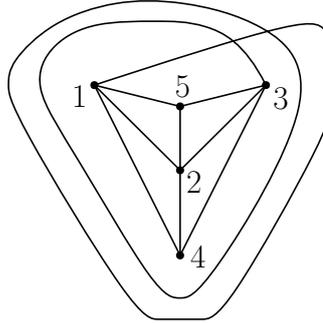


Рис. 8.5. Почти вложение графа $K_5 - 45$, такое что $w_f(123, 5) = 3$

6.2. (а) Имеем

$$\begin{aligned} \text{wu}(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3 \right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2 \frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

для некоторых целых k_1, k_2, k_3 . Здесь равенство (1) следует из (*) и утверждения 1.4.а.

(б) Рассмотрим отрезки l_1, l_2, l_3 с общей вершиной O , лежащей внутри треугольника $A_1 A_2 A_3$, как изображено на рисунке 6.1. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра l_1 относительно вершины A_3 первого/второго типа для отрицательного/положительного n соответственно. Тогда

$$\text{wu}(l_1, l_2, l_3) = 2 \left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + n \right) = 1 + 2n.$$

Например, для левой части рисунка 8.6 имеем

$$w'(\bar{l}_2 l_3, A_1) = \frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_3 l_1, A_2) = \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi}, \quad w'(\bar{l}_1 l_2, A_3) = \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + 2,$$

так что $wu(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

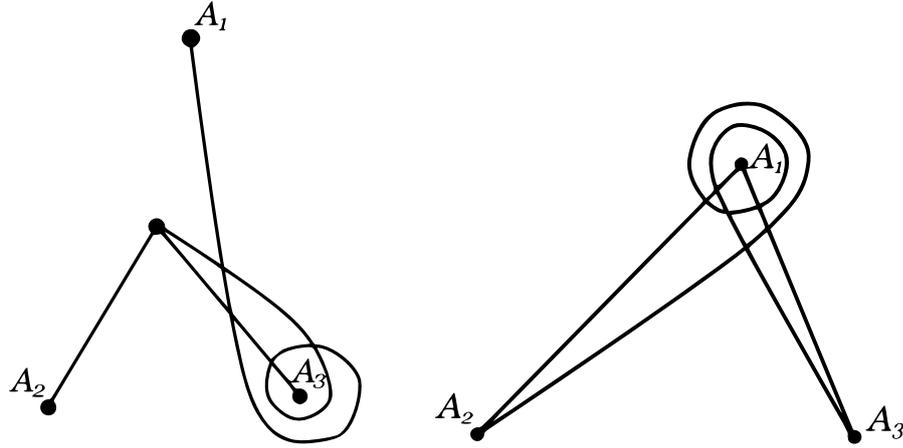


Рис. 8.6. Тройка ломаных, триодическое/циклическое (слева/справа) число Ву которой равно 5

(с) *Подсказка.* Это доказывается индукцией по количеству отрезков в $l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

6.3. (а) Имеем

$$\begin{aligned} wu(l_1, l_2, l_3) &\stackrel{(1)}{=} 2(w'(l_2, A_1) + w'(l_1, A_3) + w'(l_3, A_2)) \stackrel{(2)}{=} \\ &= 2\left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + k_1 + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + k_2 + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} + k_3\right) = \\ &= 2(k_1 + k_2 + k_3) + 2\frac{\angle A_2 A_1 A_3 + \angle A_3 A_2 A_1 + \angle A_1 A_3 A_2}{2\pi} = 2(k_1 + k_2 + k_3) + 1 \end{aligned}$$

для некоторых целых k_1, k_2, k_3 . Здесь равенство (1) следует из (**), а (2) из утверждения 1.4.а.

(б) Рассмотрим треугольник $A_1 A_2 A_3$ со сторонами l_2, l_3, l_1 , см. рисунок 6.1. Сделаем $|n|$ пальцевых движений (рисунок 3.3) ребра l_2 относительно вершины A_1 первого/второго типа для отрицательного/положительного n соответственно. Тогда

$$wu(l_1, l_2, l_3) = 2\left(\frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + n + \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi} + \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi}\right) = 2n + 1.$$

Например, для правой части рисунка 8.6 имеем

$$w'(l_2, A_1) = \frac{\angle A_2 A_1 A_3}{2\pi} + 2, \quad w'(l_3, A_2) = \frac{\angle A_3 A_2 A_1}{2\pi}, \quad w'(l_1, A_3) = \frac{\angle A_1 A_3 A_2}{2\pi},$$

так что $wu(l_1, l_2, l_3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [DMN+] * С. Дженджер, А. Мирошников, О. Никитенко и А. Скопенков. Циклы в графах и в гиперграфах, arXiv:2406.16705.
- [ALM] E. Alkin, A. Lazarev, A. Miroshnikov, On winding numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.
- [Bo] E. Bordacheva. Symmetric 1-cycles in the deleted product of graph, https://old.mccme.ru/circles/oim/cath_bord_present.pdf.
- [FK19] R. Fulek, J. Kynčl, \mathbb{Z}_2 -genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article No. 39; pp. 39:1–39:16, <https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf>. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.
- [Ga23] T. Garaev, On drawing K_5 minus an edge in the plane, arXiv:2303.14503.
- [HC19] * C. Herbert Clemens. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach, Amer. Math. Soc., 2019.
- [IKN+] A. Inoue, N. Kimura, R. Nikkuni, K. Taniyama, Crossing numbers and rotation numbers of cycles in a plane immersed graph, J. of Knot Theory and Its Ramif. 31:11, 2250076 (2022). arXiv:2205.01013.

- [KK18] * *A. Канель-Белов, П. Кожеевников*, О кратности покрытия ориентированными многоугольниками, Квант, N5 (2018), 20–24, <https://kvant.mccme.ru/pdf/2018/2018-05.pdf>.
- [KS20] *R. Karasev and A. Skopenkov*. Some ‘converses’ to intrinsic linking theorems, Discr. Comp. Geom., 70:3 (2023), 921–930, arXiv:2008.02523.
- [Sk06] * *A. Skopenkov*, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *A. Скопенков*, Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, Мат. просвещение, 32 (2024), 125–159. arXiv:1402.0658.
- [Sk16] * *A. Skopenkov*, A user’s guide to the topological Tverberg Conjecture, arXiv:1605.05141v5. Abridged earlier published version: Russian Math. Surveys, 73:2 (2018), 323–353.
- [Sk18] * *A. Скопенков*, Инварианты изображений графов на плоскости, Мат. просвещение, 31 (2023), 74–127. arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *A. Скопенков*, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2020 (2е издание). Часть книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>
- [Sk20u] * *A. Скопенков*. Основы теории узлов и зацеплений для пользователя, Мат. просвещение, 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk24] * *A. Скопенков*. Двойные и тройные коэффициенты зацепления в пространстве. Мат. просвещение, 33 (2024), 87–132.
- [Sk] * *A. Скопенков*. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algorg.pdf>.
- [SS13] *M. Schaefer and D. Stefankovič*. Block additivity of \mathbb{Z}_2 -embeddings. In Graph drawing, volume 8242 of Lecture Notes in Comput. Sci., 185–195. Springer, Cham, 2013. <http://ovid.cs.depaul.edu/documents/genus.pdf>
- [ST17] *A. Skopenkov and M. Tancer*, Hardness of almost embedding simplicial complexes in \mathbb{R}^d , Discr. Comp. Geom., 61:2 (2019), 452–463. arXiv:1703.06305.
- [To84] * *A. Тоом*, Сколько площадей у многоугольника?, Квант, N12 (1984), 9–12, https://kvant.mccme.ru/1984/12/skolko_ploshchadej_u_mnogougol.htm
- [Ta88] * *C. Табачников*, О плоских кривых, Квант, N11 (1988), 59–63, https://kvant.mccme.ru/1988/11/o_ploskih_krivyyh.htm
- [Va81] * *H. Вагутен*, Формула площади, Квант, N4 (1981), 17–20, https://kvant.mccme.ru/1981/04/formula_ploshchadi.htm
- [Wn] * https://ru.wikipedia.org/wiki/Число_оборотов
- [Za] *M. Zakharov*, On triodic and cyclic Wu numbers of almost embeddings of K_4 in the plane, draft.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.

Книги, обзоры и методические статьи в этом списке помечены звездочками.