

Циклы в графах и в гиперграфах

Э. АЛКИН, А. ВОРОПАЕВ, С. ДЖЕНЖЕР, О. НИКИТЕНКО, А. СКОПЕНКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Одномерные циклы в графах	2
2. Одномерные циклы в квадрате графа	4
3. Циклы в гиперграфах	7
4. Геометрическое отступление: декартово произведение графов	8
5. Двумерные циклы в квадрате графа	9
6. Ответы, подсказки и решения	11
Список литературы	18

Введение

Назовём **1-циклом** (симплициальным, по модулю 2) в графе множество C ребер такое, что каждая вершина принадлежит четному числу ребер из C . Например, цикл в смысле теории графов — это 1-цикл, но не наоборот. Легко проверить, что сумма (по модулю 2) 1-циклов тоже является 1-циклом.

В этом тексте мы изучаем следующие задачи: найти

- количество всех 1-циклов в данном графе;
- небольшое количество 1-циклов в данном графе таких, что любой 1-цикл является суммой нескольких из них.

Мы также рассматриваем обобщения (этих задач) на графы с симметрией и на *2-циклы* в *двумерных гиперграфах* (все выделенные курсивом понятия определены ниже). Основные задачи — это 1.1.f, 1.3.e, 1.4.b, 1.5.ab, и 3.1.cf, 3.2.cf. Наивысшие достижения этого текста — результаты об 1- и 2-циклах в *квадрате графа* (задачи 2.5.c, 5.5.cd, 5.6.ab и 5.10.d).

Понятие 1-цикла и его обобщения имеют многочисленные приложения в топологии, наиболее простые из них см., например в [Sk20, §§4.11, 6, 9], [Sk, §§1, 8, 9]. Хотя этот текст элементарен, он мотивирован передним краем науки, см. [FH10, MS17, SS23] и ссылки в этих работах. Открытыми проблемами являются 2.9.cdfg и 5.10.f.

Изучение путём решения задач

Задачи пронумерованы, слово «задача» опускается. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. **Загадкой** называется не сформулированный чётко вопрос; здесь нужно придумать и чёткую формулировку, и доказательство. Если задача выделена словом «теорема» («лемма», «следствие» и т. д.), то её утверждение более важное. Как правило, мы приводим (в виде задачи) *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* его *доказательством*. В таких случаях для доказательства

Э. Алкин, С. Дженджер, А. Скопенков: Московский физико-технический институт.

О. Никитенко: Алтайский технический университет.

А. Скопенков: Независимый московский университет, <https://users.mccme.ru/skopenko/>.

Данный текст (за исключением задач, отмеченных звёздочкой) был представлен в 2023 на Международной Летней Конференции Турнира Городов, см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Турнир_городов. Мы благодарны И. Богданову, А. Рябичеву и О. Стырту за полезные обсуждения, а также А. Рябичеву за подготовку электронных версий некоторых рисунков.

могут потребоваться последующие задачи. Мы даем подсказки об этом после утверждений, но мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Вообще, если Вы застряли на какой-то задаче, попробуйте перейти к следующим, они могут оказаться полезными.

В тексте определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы их было проще найти.

К представлению на летней конференции

Приглашаем Вас *обсуждать* с жюри возникающие вопросы. Те, кто успешно работают над проектом, завоюют право получить интересные *дополнительные задачи для исследования*.

Команда, работающая над проектом, может состоять из любого числа участников. За каждое решение, **написанное для пользователя**, оцененное в «+» или «+.» , команда получает пять «бобов» (см. рекомендации <https://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf>). Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в системе ТeX. У жюри бесконечно много бобов. У каждого участника (или каждой команды) в начале пять бобов. Решения можно сдавать и *устно*, и как *написанные для соавтора*, если у команды есть бобы. Команда отдает один боб за каждую попытку сдачи (удачную или нет).

1. ОДНОМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В ГРАФАХ

Строгое определение графа дано в начале §2. До этого можно работать с графами на интуитивном уровне.

Обозначим через

- $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$;
- K_n полный граф на множестве $[n]$ вершин;
- $K_{m,n}$ полный двудольный граф с долями $[m]$ и $[n]'$ (мы обозначаем через A' копию объекта A).

Простым циклом $v_1v_2 \dots v_k$ **длины** k в графе называется множество $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_1\}$ ребер такое, что вершины v_1, \dots, v_k попарно различны. *Простым циклом* называется простой цикл произвольной длины. Мы пропускаем слово «простой», если оно понятно из контекста. Очевидно, что любой простой цикл является 1-циклом. Определение 1-цикла дано во введении.

Суммой (суммой по модулю 2, или симметрической разностью) множеств A и B называется

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.1. (a) Сумма 1-циклов является 1-циклом.

(b) Любой 1-цикл в K_n является суммой нескольких циклов длины 3.

(c) Если каждое ребро некоторого 1-цикла в K_n содержит вершину n , то этот 1-цикл пустой.

(d) Сколько имеется 1-циклов в K_n ?

(e) Для любых вершин a, b, c, d в K_n выполнено равенство $abc + abd + acd + bcd = 0$ (мы обозначаем $0 := \emptyset$).

(f) Любое линейное соотношение между циклами длины 3 является суммой нескольких соотношений из п. (e).

Например,

- соотношение $123 + 124 + 134 + 235 + 245 + 345 = 0$ является суммой соотношений $123 + 124 + 134 + 234 = 0$ и $234 + 235 + 245 + 345 = 0$;
- сумма границ треугольников любой триангуляции сферы или тора (рис. 1) равна 0.

Строго говоря, *линейное соотношение* — это множество циклов длины 3 в K_n такое, что каждое ребро графа K_n содержится в четном числе циклов из этого множества. Поэтому строгая формулировка п. (f) такова (мы отождествляем циклы длины 3 в K_n с 3-элементными подмножествами множества $[n]$). Пусть R — набор 3-элементных подмножеств множества $[n]$ такой, что любое 2-элементное подмножество множества $[n]$ содержится в четном количестве

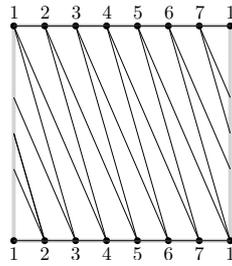


Рис. 1. Триангуляция тора (7-вершинная)

3-элементных подмножеств, являющихся элементами набора R . Тогда существует семейство R' , состоящее из 4-элементных подмножеств множества $[n]$ такое, что 3-элементное подмножество B множества $[n]$ содержится в R тогда и только тогда, когда B содержится в нечетном количестве 4-элементных подмножеств, являющихся элементами семейства R' .

- 1.2.** (а) Любой 1-цикл в графе является суммой нескольких простых циклов.
 (б) Любой 1-цикл в графе является суммой нескольких простых циклов, не содержащих хорд. *Хордой* в простом цикле называется ребро графа, которое не принадлежит данному циклу (т. е. ребро между двумя непоследовательными вершинами цикла).
 (с) Любой 1-цикл в K_n является суммой нескольких из следующих циклов: 123 и циклы длины 4.
 (д) Цикл 123 не является суммой никаких циклов длины 4 в K_n .

- 1.3.** (а) Любой 1-цикл в $K_{n,n}$ является суммой нескольких циклов длины 4.
 (б) Если каждое ребро некоторого 1-цикла в $K_{n,n}$ содержит по крайней мере одну из вершин n или n' , то этот 1-цикл пустой.
 (с) Сколько имеется 1-циклов в $K_{n,n}$?
 (д) Для любого набора попарно различных $a, b, c \in [n]$ и различных $u', v' \in [n]'$ выполнено $au'bv' + bu'cv' + cu'av' = 0$.
 (е) Любое линейное соотношение между циклами длины 4 в $K_{n,n}$ является суммой нескольких соотношений из п. (д), и аналогичных соотношений $a'ub'v' + b'u'c'v' + c'u'a'v' = 0$. (Строго говоря, *линейное соотношение* — это множество циклов длины 4 в $K_{n,n}$ такое, что каждое ребро графа $K_{n,n}$ содержится в четном количестве циклов из этого множества.)

1.4. Сколько имеется 1-циклов

- (а) в дереве?
 (б) в связном графе с V вершинами и E ребрами?

Обозначим через \widetilde{K}_n граф, полученный из $K_{n,n}$ удалением всех «диагональных» ребер jj' , $j \in [n]$. Например, \widetilde{K}_3 — это цикл 12'31'23' длины 6. Этот граф естественно появляется в задаче 5.8.

- 1.5.** (а) Если $n \geq 4$, то любой 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой нескольких циклов длины 4.
 (б) Любой 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой нескольких циклов $C_{ij'} := 12'31'ij'$ для ребер ij' из \widetilde{K}_n таких, что $i, j > 1$ и $(i, j) \neq (3, 2)$.
 (с) Представление из п. (б) единственно.

Множество $B \subset H_1(K)$ называется *базисом* множества $A \subset H_1(K)$, если каждый 1-цикл из A имеет единственное представление в виде суммы нескольких 1-циклов из B .

1.6 (симметричные 1-циклы). * Обозначим через $t: \widetilde{K}_n \rightarrow \widetilde{K}_n$ симметрию (инволюцию), переставляющую доли графа, то есть переставляющую j и j' для каждого $j \in [n]$. Через tQ обозначим 1-цикл, симметричный 1-циклу Q . Например, $t\widetilde{K}_3 = \widetilde{K}_3$ и $t(12'31'ij') = 1'23'1i'j$, 1-цикл Q называется *t-симметричным*, если $tQ = Q$. Например, \widetilde{K}_3 является *t-симметричным*.

- (а) Сколько имеется t -симметричных 1-циклов в \widetilde{K}_n ?
- (б) Любой t -симметричный 1-цикл в \widetilde{K}_n является суммой нескольких из следующих 1-циклов: \widetilde{K}_3 и $Q + tQ$ для циклов Q длины 4.
- (с) Множество всех 1-циклов в \widetilde{K}_n имеет базис, состоящий из (t -симметричного 1-цикла) \widetilde{K}_3 и пар взаимно симметричных (относительно t) 1-циклов.

1.7 (целочисленные 1-циклы). * Пусть K — граф с ориентированными ребрами. Расстановка целых чисел на всех ребрах графа называется (симплициальным) *целочисленным 1-циклом*, если для каждой вершины сумма значений на входящих ребрах равна сумме значений на исходящих ребрах (правило Кирхгофа).

- (а,б) Сформулируйте и докажите аналоги задач 1.4.а,б для целочисленных 1-циклов.
- (с) Для данного набора ω ориентаций на ребрах графа K обозначим через $H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$ множество целочисленных 1-циклов, с операцией покомпонентной суммы. Для различных наборов ω, ω' ориентаций существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: H_1^\omega(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1^{\omega'}(K; \mathbb{Z})$ такое, что $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех пар $x, y \in H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$ (т. е. группы $H_1(K; \mathbb{Z})$ для различных наборов ориентаций ребер *изоморфны*).

1.8 (когомологии). * Пусть на ребрах графа задана некоторая расстановка знаков $+$ или $-$. Определим на графе следующую операцию: выбираем произвольную вершину и инвертируем знаки у всех ребер, которым она принадлежит.

- (а) Для дерева, применяя описанную выше операцию несколько раз (к различным вершинам), мы можем из любой расстановки знаков получить любую другую.
- (б) Рассмотрим связный граф с V вершинами и E ребрами. Найдите наибольшее количество таких расстановок знаков $+$ или $-$ на ребрах графа, что ни одна из них не может быть получена ни из какой другой описанными выше операциями.

2. ОДНОМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В КВАДРАТЕ ГРАФА

Граф — это пара (V, E) из конечного множества V и множества E , состоящего из 2-элементных подмножеств (называемых «ребрами») множества V .

В этом тексте K — граф. Иногда мы обозначаем ребро $\{a, b\}$ коротко через ab .

Определим *конфигурацию* (на интуитивном уровне) как пару муравьев (один красный и один синий), расположенных в двух вершинах графа (муравьи могут занимать одну и ту же вершину). Назовём две конфигурации *смежными*, если одна из них может быть получена из другой перемещением одного из муравьев вдоль какого-либо (одного) ребра. Вот строгое определение. Вершины графа $K^{\square 2}$ — это упорядоченные пары (a, b) вершин графа K . Если вершины b и c графа K соединены ребром, то вершины (a, b) и (a, c) графа $K^{\square 2}$ соединены ребром, обозначаемым (a, bc) , а вершины (b, a) и (c, a) соединены ребром, обозначаемым (bc, a) . Других ребер в графе $K^{\square 2}$ нет.

Вот примеры простых циклов в $K^{\square 2}$ (напомним из §1, что простой цикл обозначается вершинами, через которые он проходит):

- *граница*

$$ab \square uv := (a, u)(b, u)(b, v)(a, v),$$

для ребер ab и uv в K (произведение $ab \times uv$ является прямоугольником, см. §4, а $ab \square uv = \partial(ab \times uv)$ является его границей);

- *диагональные, внедиагональные и антидиагональные циклы*

$$\text{diag}(123) := (1, 1)(1, 2)(2, 2)(2, 3)(3, 3)(3, 1), \quad (1, 2)(1, 3)(2, 3)(2, 1)(3, 1)(3, 2),$$

$$\text{и } (1, 1)(2, 1)(2, 3)(3, 3)(3, 2)(1, 2) \text{ в } K_3^{\square 2};$$

- *левые, правые, диагональные, внедиагональные, и антидиагональные циклы*

$$a \times C := (a, v_1) \dots (a, v_k), \quad C \times a := (v_1, a) \dots (v_k, a),$$

$$\text{diag } C := (v_1, v_1)(v_1, v_2)(v_2, v_2) \dots (v_k, v_k)(v_k, v_1), \quad (v_1, v_2)(v_1, v_3)(v_2, v_3) \dots (v_k, v_1)(v_k, v_2),$$

$$\text{и } (v_1, v_1)(v_2, v_1)(v_2, v_k) \dots (v_k, v_2)(v_1, v_2)$$

для вершины a и простого цикла $C = v_1 \dots v_k$ в K ;

• *триодический цикл* $(1, 3)(1, 1')(1, 2)(1', 2)(3, 2)(3, 1') \dots$ в $K_{3,1}^{\square 2}$, где точками обозначена часть, симметричная выписанной части; *триодическим циклом* также называется аналогичный цикл, соответствующий $K_{3,1}$ -подграфу графа K .

Мы рассматриваем симметрию (инволюцию) графа $K^{\square 2}$, переставляющую компоненты (т. е. переставляющую точки (x, y) и (y, x)), и соответствующее отображение на 1-циклах. (О применении симметричных 1-циклов см. [Sk23, §1.6], [Sk, §1.6].)

2.1 (загадка). Какие графы $K^{\square 2}$ получатся, если

- (a) $K = K_{2,1}$ путь на трех вершинах; (b) $K = K_3$ цикл на трех вершинах;
 (c) $K = K_{3,1}$ триод; (d) $K = K_4$.

2.2. (a) Любой 1-цикл в $K_{2,1}^{\square 2}$ является суммой нескольких границ.

(b) Триодический цикл в $K_{3,1}^{\square 2}$ является суммой нескольких границ.

(c) Любой 1-цикл в $K_{3,1}^{\square 2}$ является суммой нескольких границ.

(d) Если K — дерево, то любой 1-цикл в $K^{\square 2}$ является суммой нескольких границ.

Подсказка. Докажите, что если K и L суть деревья, то любой 1-цикл в графе $K \square L$ (определенном ниже) является суммой нескольких границ. Докажите это по индукции, используя удаление висячей вершины.

(e) Является ли какой-либо левый цикл суммой нескольких границ?

(f) Является ли какой-либо диагональный цикл суммой нескольких границ?

Следующие понятия полезны, в частности, для задач 2.2.def.

Пусть K и L суть графы. Вершинами *графа произведения* $K \square L$ являются упорядоченные пары (a, b) вершин a графа K и b графа L . Если вершины b и c графа L соединены ребром, тогда вершины (a, b) и (a, c) графа $K \square L$ соединены ребром, обозначаемым как (a, bc) . Если вершины b и c графа K соединены ребром, тогда вершины (b, a) и (c, a) графа $K \square L$ соединены ребром, обозначаемым как (bc, a) . Других ребер в $K \square L$ нет.

Левой проекцией C_y для 1-цикла C в $K \square L$ называется множество всех ребер σ в L такое, что имеется нечетное количество вершин a в K таких, что $a \times \sigma \in C$. (Если C является циклом, то C_y является множеством всех ребер, по которым синий муравей проходит нечетное число раз.) *Правая проекция* C_x определяется аналогично.

2.3. (a) Диагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ является суммой левого цикла, правого цикла, и нескольких границ.

(b) Внедиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ является суммой диагонального цикла и нескольких границ.

(c) Антидиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ является суммой диагонального цикла и нескольких границ.

(d) *Симметризованный цикл* $a \times C + C \times a$ является суммой цикла $\text{diag } C$ и нескольких границ.

(e) Является ли для $K = K_4$ левый цикл 1×234 суммой нескольких диагональных циклов и границ?

2.4. Найдите количество 1-циклов по модулю границ в:

- (a) $K_3^{\square 2}$; (b) $K_{2,2}^{\square 2}$; (c) $K_{2,3}^{\square 2}$; (d) $K_4^{\square 2}$.

Подсказка. Количество 1-циклов по модулю границ — это максимальное количество 1-циклов, ни один из которых не является суммой каких-либо других, и нескольких границ. Для некоторых пунктов этой задачи будет полезна теорема Кюннета 2.5.c.

Два 1-цикла C, C' в $K^{\square 2}$ называются *гомологичными* (или сравнимыми по модулю границ), если $C + C'$ является суммой нескольких границ. Обозначение: $C \sim C'$.

- 2.5.** (а) Если граф K связан и T — дерево, то для любых 1-цикла C в $K \square T$ и вершины a в T существует единственный 1-цикл C_1 в K такой, что $C \sim C_1 \times a$. Более того, $C \sim C_x \times a$.
- (б) Если Z является 1-циклом в $K^{\square 2}$ таким, что $Z_x = 0$, то $Z \sim a \times Z_y$ для любой вершины a .
- (с) (теорема Кюннета) Если граф K связан, то для любых 1-цикла C в $K^{\square 2}$ и вершины a в K существуют единственные 1-циклы C_1, C_2 в K такие, что $C \sim C_1 \times a + a \times C_2$. Более того, $C \sim C_x \times a + a \times C_y$.

Следующее (как и K^2 , определенный в §5) является теоретико-графовым аналогом множества размещений. Рассмотрим двух муравьев на K , как описано выше, которым теперь запрещено находиться в одной вершине. Строго говоря, вершинами графа $K^{\square 2}$ являются упорядоченные пары различных вершин графа K . Вершины графа $K^{\square 2}$ соединены ребром в $K^{\square 2}$, если они соединены ребром в $K^{\square 2}$.

2.6. (загадка) Какие графы $K^{\square 2}$ получатся в случаях (а,b,c,d) из задачи 2.1?

2.7. Найдите количество 1-циклов в

(а) $K_3^{\square 2}$; (б) $K_{2,2}^{\square 2}$; (с) $K_{2,3}^{\square 2}$; (д) $K_4^{\square 2}$; (е) $K_{3,3}^{\square 2}$; (ф) $K_5^{\square 2}$.

(а'-ф') Найдите количество 1-циклов в $K^{\square 2}$ по модулю границ (содержащихся) в $K^{\square 2}$ (т. е. по модулю границ, соответствующих парам несмежных ребер).

Подсказки. (а'-д') Если множество границ в $K^{\square 2}$ имеет нулевую сумму, то это множество пусто.

(е'), (ф') Сумма всех границ в $K^{\square 2}$ равна нулю. Это единственный непустой набор границ в $K^{\square 2}$, сумма которых равна нулю.

2.8. * (а) Если сумма границ симметрична, то она является *симметризованной границей*, т. е. суммой нескольких сумм $B + B'$ для некоторых взаимно симметричных пар границ B, B' .

(б) Любой симметричный 1-цикл в $K^{\square 2}$ является суммой нескольких симметризованных циклов и нескольких симметризованных границ. (Следовательно, это сумма нескольких диагональных циклов и нескольких границ; обратите внимание, что диагональный цикл симметричен по модулю границ.)

Подсказка. Следует из п. (а) и теоремы Кюннета 2.5.с.

(с) Для связного графа K отображение $C \mapsto C \times a + a \times C$ определяет взаимно однозначное соответствие между 1-циклами в K и симметричными 1-циклами в $K^{\square 2}$ по модулю симметричных границ. Обратное соответствие задается формулой $C \mapsto C_x = C_y$.

(д) Однозначно ли определяется количеством V вершин и количеством E ребер (для связных графов K) количество симметричных 1-циклов в $K^{\square 2}$? (Мы не знаем решения этой задачи.)

2.9. * Пусть K — связный граф.

(а) Триодический цикл не является суммой никаких границ в $K_{3,1}^{\square 2}$.

(б) Является ли антидиагональный цикл суммой 1-цикла в $K^{\square 2}$ и границ в $K^{\square 2}$.

(с) (гипотеза) В $K^{\square 2}$ никакой внедиагональный цикл не является суммой никаких симметризованных циклов, и границ.

(д) Любой ли внедиагональный в цикл $K_4^{\square 2}$ является суммой некоторых симметризованных циклов, триодических циклов, и границ?

(е) В $K^{\square 2}$ любой симметризованный цикл является суммой внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ.

(ф) (гипотеза) В $K^{\square 2}$ любой 1-цикл является суммой левых циклов, правых циклов, внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ.

(г) (гипотеза) Является ли любой симметричный 1-цикл в $K^{\square 2}$ суммой внедиагональных циклов, триодических циклов, и границ (в $K^{\square 2}$)? То же с «...границами в $K^{\square 2}$ »? То же, если «границы» заменить «симметризованными границами»?

Дополнительную информацию см. в [CPG].

3. ЦИКЛЫ В ГИПЕРГРАФАХ

Многомерные циклы в гиперграфах появляются, в частности, как соотношения между 1-циклами в графе, см. утверждения 1.1.ef.

3.1 (ср. задача 1.1). Назовём *2-циклом* множество C , состоящее из 3-элементных подмножеств (называемых «гранями») множества $[n]$, такое, что каждое 2-элементное подмножество множества $[n]$ содержится в четном количестве подмножеств множества C . Например, пустое множество является 2-циклом. Для 4-элементного подмножества $A \subset [n]$ назовём *тетраэдром* T_A множество всех 3-элементных подмножеств множества A . Другими словами, для попарно различных $a, b, c, d \in [n]$ определим *тетраэдр*

$$T_{\{a,b,c,d\}} := \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}.$$

Очевидно, что любой тетраэдр является 2-циклом.

- (a) Сумма 2-циклов является 2-циклом.
- (b) Если каждая грань 2-цикла содержит число n , то этот 2-цикл пустой.
- (c) Любой 2-цикл является суммой нескольких тетраэдров.
- (d) Сколько имеется 2-циклов для $[n]$?
- (e) Для любого 5-элементного подмножества $A \subset [n]$ выполнено $\sum_{j \in A} T_{A-\{j\}} = 0$.
- (f) Любое линейное соотношение между тетраэдрами является суммой нескольких соотношений из п. (e). (Дайте строгую формулировку, аналогичную утверждению 1.1.f.)

3.2. Назовём *рядом* подмножество множества $[n]^\ell$ векторов длины ℓ , получаемое фиксацией всех координат, кроме одной. Определим *ладейный цикл* как подмножество множества $[n]^\ell$, содержащее четное количество вершин в каждом ряду. Например, пустое множество является ладейным циклом. Назовём *параллелепипедом* подмножество $P_1 \times \dots \times P_\ell \subset [n]^\ell$, где P_i суть 2-элементные подмножества множества $[n]$. Очевидно, что любой параллелепипед является ладейным циклом.

- (a) Сумма ладейных циклов является ладейным циклом.
- (b) Если в ладейном цикле нет элементов из $[n-1]^\ell$, то этот ладейный цикл пустой.
- (c) Любой ладейный цикл является суммой нескольких параллелепипедов.
- (d) Сколько имеется ладейных циклов в $[n]^\ell$?
- (e) Для любых попарно различных $a, b, c \in [n]$ и параллелепипеда $P \subset [n]^{\ell-1}$ выполнено $P \times \{a, b\} + P \times \{b, c\} + P \times \{c, a\} = 0$.
- (f) Любое линейное соотношение между параллелепипедами в $[n]^\ell$ является суммой нескольких соотношений из (e), и соотношений, получаемых из (e) перестановками координат. (Строгая формулировка аналогична утверждениям 1.3.e и 3.1.f.)

Подсказка. Сначала разберите случай $\ell = 2$, ср. задача 1.3.

3.3 (загадка). Придумайте и докажите многомерный аналог задачи 3.1.

3.4. * Назовём *2-гиперграфом* (двумерным гиперграфом, или 3-однородным гиперграфом) пару (V, F) из конечного множества V и множества F , состоящего из нескольких 3-элементных подмножеств («граней») множества V . Назовём *2-циклом* (симплициальным, по модулю 2) в 2-гиперграфе (V, F) множество C граней такое, что каждое 2-элементное подмножество множества V содержится в четном количестве подмножеств множества C .

(a) Существуют два *связных* гиперграфа, имеющие одинаковое количество вершин, ребер (т. е. 2-элементных подмножеств граней), и граней, но разное количество 2-циклов. (Ср. задача 1.4.b.)

(b) Пусть $L = (V, F)$ — гиперграф. Обозначим через E множество ребер, через b_0 количество компонент связности, через 2^{b_1} количество 1-циклов с по модулю границ граней, через 2^{b_2} количество 2-циклов. Тогда $b_0 - b_1 + b_2 = |V| - |E| + |F|$.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ: ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРАФОВ

Сначала мы дадим интуитивное определение цилиндра, а затем строгое.

Возьмем прямоугольники-ленточки $aa'b'b$, соответствующие ребрам ab графа K . Склеим концевые отрезки ленточек, соответствующие одной и той же вершине, так, чтобы штрихованные буквы склеивались бы со штрихованными. Полученная двумерная фигура называется *цилиндром* над графом K .

Напомним, что \mathbb{R}^d — это d -мерное евклидово пространство (для $d = 2$ и $d = 3$ это обычные плоскость и пространство, которые проходят на уроках геометрии). *Цилиндром* над подмножеством $U \subset \mathbb{R}^d$ называется

$$U \times K_2 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in U, t \in [-1, 1]\}.$$

Например, цилиндры над K_2 , K_3 , $K_{3,1}$, и K_5 показаны на рис. 2; цилиндр над $K_{k,1}$ «выглядит» как книга с k листами.

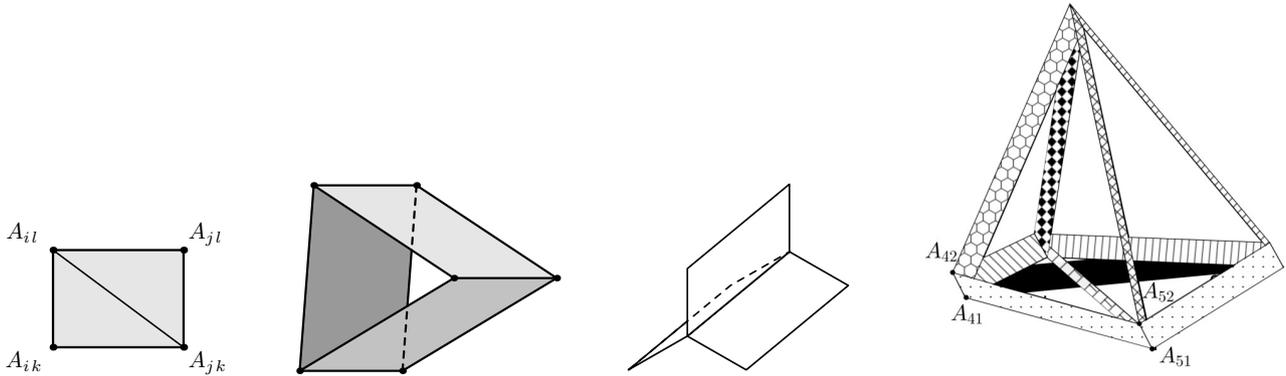


Рис. 2. Цилиндры над K_2 , K_3 , $K_{3,1}$, K_5

4.1. Любой граф можно нарисовать без пересечения ребер на книге с некоторым количеством листов (рис. 2, $K_{3,1}$), зависящим от графа. Более строго, для любого n существует целое число k , а также n точек и $n(n-1)/2$ несамопересекающихся ломаных на книге с k листами таких, что

- каждая пара точек соединена ломаной, и
- никакая ломаная не пересекает внутренность другой ломаной.

4.2 (загадка). Цилиндр над любым графом реализуем без самопересечений в \mathbb{R}^3 .

Для подмножеств $U, V \subset \mathbb{R}^d$ их (*геометрическим*) *произведением* называется

$$U \times V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \in U, y \in V\}.$$

В частности, *квадрат* подмножества $U \subset \mathbb{R}^d$ — это $U^2 = U \times U$. Например, квадрат K_2^2 — это обычный квадрат на плоскости, а квадрат K_3^2 (называемый *тором*) показан на рис. 4, в центре.

4.3 (загадка). Нарисуйте в \mathbb{R}^3

- произведение $K_3 \times K_{3,1}$ без самопересечений.
- квадрат $K_{3,1}^2$; самопересечения допускаются.

Замечание. Иногда слово «граф» используется для понятия «тело графа», определяемого следующим образом. Пусть некоторое подмножество в \mathbb{R}^3 находится во взаимно однозначном соответствии с множеством вершин графа K , причем ни один отрезок, соответствующий какому-либо ребру графа K , не пересекает внутренность никакого другого такого отрезка. *Телом* графа K является объединение этого подмножества, а также всех таких отрезков.

На этом языке $K^{\square 2}$ — это множество (конфигурационное пространство) упорядоченных пар (x, y) точек графа K (точнее, его тела) таких, что x или y является вершиной графа K . Множество $K^{\square 2}$ является объединением конечного числа отрезков, т. е. является графом.

Аналогично, $K^{\square 2}$ — это множество (конфигурационное пространство) упорядоченных пар (x, y) точек графа K (точнее, его тела) таких, что x или y является вершиной графа K , и x, y не принадлежат одному ребру. Множество $K^{\square 2}$ является объединением конечного числа отрезков, т. е. является графом.

5. ДВУМЕРНЫЕ ЦИКЛЫ В КВАДРАТЕ ГРАФА

(Комбинаторным) произведением графов K и L называется

$$K \times L := \{(\sigma, \tau) : \sigma, \tau \text{ являются ребрами графа } K, L \text{ соответственно}\}.$$

Клетки (α, β) и (σ, τ) в $K \times L$ называются *смежными*, если

- либо $\alpha = \sigma$ и β, τ имеют общую вершину,
- либо $\beta = \tau$ и α, σ имеют общую вершину

(т. е. если они имеют общее ребро в $K \square L$).

Если склеить смежные клетки по их «общим рёбрам» в $K \square L$, получится геометрическое произведение, обсуждаемое в §4.

Квадратом графа K называется $K^2 := K \times K$. **Клеточным 2-циклом** (в K^2) называется подмножество $C \subset K^2$ такое, что для каждой вершины a и ребра β графа K

- имеется четное количество ребер α в K таких, что $\alpha \ni a$ и $(\alpha, \beta) \in C$, а также
- имеется четное количество ребер α в K таких, что $\alpha \ni a$ и $(\beta, \alpha) \in C$.

Иными словами, $C \subset K^2$ является клеточным 2-циклом, если к любому ребру «примыкает» чётное число клеток из C .

5.1. (а) Для подмножества $C \subset K^2$ сумма границ $\sigma \square \tau$ по всем $(\sigma, \tau) \in C$ равна нулю тогда и только тогда, когда C является клеточным 2-циклом.

(б) Подмножество $C \subset K^2$ является клеточным 2-циклом тогда и только тогда, когда для каждого ребра σ в K оба множества («вертикальное сечение» и «горизонтальное сечение»)

$$C_{\sigma, \cdot} := \{\tau : (\sigma, \tau) \in C\} \quad \text{и} \quad C_{\cdot, \sigma} := \{\tau : (\tau, \sigma) \in C\}$$

являются 1-циклами в K .

5.2. (а) Произведение любых простых циклов в K (*тор*) является клеточным 2-циклом.

(б) Сумма по модулю 2 клеточных 2-циклов является клеточным 2-циклом.

(в) Существует ли дерево T и непустой клеточный 2-цикл в T^2 ?

(д) Существуют ли граф K , дерево $T \subset K$ и непустой клеточный 2-цикл, содержащийся в $\overline{T} := T \times K \cup K \times T$?

5.3. Найдите количество клеточных 2-циклов в

(а) K_3^2 ; (б) $K_{2,2}^2$; (в) $K_{2,3}^2$; (д) K_4^2 .

Подсказка. Для некоторых пунктов этой задачи будут полезны следующие задачи.

Говоря нестрого (и неточно), **комбинаторный взрезанный квадрат** K^2 графа K — это множество упорядоченных пар (x, y) точек графа K таких, что x, y не принадлежат соседним ребрам. Множество K^2 можно представить в виде объединения прямоугольников. Строго говоря, **комбинаторный взрезанный квадрат** графа K — это

$$K^2 := \{(\sigma, \tau) : \sigma, \tau \text{ суть несмежные ребра графа } K\}.$$

Замечание. Множество K^2 и его обобщения имеют многочисленные приложения, в частности, для алгоритма распознавания реализуемости гиперграфов в многомерных евклидовых пространствах, см. обзоры [Sk06, Sk18]. Подмножество $K^2 \subset K^2$ меньше, чем K^2 , поэтому иногда его легче нарисовать. Например, $K_2^2 = K_3^2 = K_{n,1}^2 = \emptyset$.

Склеим смежные клетки вдоль их «общего ребра». Тогда комбинаторные взрезанные квадраты пути на 5 вершинах, цикла на 5 вершинах, графа K_4 , графа $K_{3,3}$, и графа K_5 выглядят как несвязное объединение двух дисков, кольцо, кубооктаэдр без треугольных граней (рис. 5), сфера

с четырьмя ручками, и сфера с шестью ручками соответственно. (Для $K = K_{3,3}$ и $K = K_5$ можно доказать, что K^2 выглядит как связная ориентируемая двумерная поверхность, и применить теорему о классификации двумерных поверхностей; см. подробности в [Sa91, текст после 3.4.1].)

5.4. (а) Существуют ли непустые клеточные 2-циклы в K^2 для цикла K ?

(б) Аналогичный вопрос для колеса K , т. е. для графа с множеством $\{0\} \cup [n]$ вершин, и ребрами $\{n, 1\}$, $\{0, j\}$ и $\{j, j+1\}$ для $j \in [n-1]$.

(с) Подмножество $K_{3,3}^2$ в $K_{3,3}^2$ является клеточным 2-циклом.

(д) Аналогичное утверждение для K_5 .

(е) Существует граф K такой, что K^2 имеет непустое собственное подмножество, являющееся клеточным 2-циклом.

5.5. (а) Представьте $K_{3,3}^2$ в виде суммы нескольких торов.

(б) Представьте K_5^2 в виде суммы нескольких торов.

(с) Любой клеточный 2-цикл (в K^2) является суммой нескольких торов.

(д) Сколько имеется клеточных 2-циклов в K^2 для связного графа K с V вершинами и E ребрами?

Подсказка к (с, д). 1-цикл $\widehat{\varphi}\sigma$ определен в решении задачи 1.4.b. Воспользовавшись ответом на задачу 5.2.d, получим, что любой клеточный 2-цикл C в K^2 равен $\sum_{(\sigma,\tau) \in C-\overline{T}} \widehat{\varphi}\sigma \times \widehat{\varphi}\tau$ и однозначно

определяется своими клетками вне \overline{T} .

Обозначим через $H_1(K)$ множество всех 1-циклов в K , с операцией сложения.

Обозначим через $H_2(K^2)$ множество всех клеточных 2-циклов в K^2 , с операцией сложения.

5.6 (Теорема Кюннета). (а) Существует базис C_1, \dots, C_q в $H_1(K)$ такой, что $C_i \times C_j$, $i, j \in [q]$ — базис в $H_2(K^2)$.

(б) Если C_1, \dots, C_q — базис в $H_1(K)$, то $C_i \times C_j$, $i, j \in [q]$, — базис в $H_2(K^2)$.

(т. е. $H_2(K^2) \cong H_1(K) \otimes H_1(K)$). Базис множества клеточных 2-циклов определяется аналогично случаю 1-циклов.)

5.7. (а) Произведение любых вершинно-непересекающихся циклов в K является клеточным 2-циклом в K^2 .

(б) Является ли любой клеточный 2-цикл в K^2 суммой нескольких произведений вершинно-непересекающихся циклов?

5.8. (а) Сколько имеется клеточных 2-циклов в $K_{n,n}^2$?

(б) Существует взаимно однозначное соответствие $H_2(K_{n,n}^2) \rightarrow H_2(\widetilde{K}_n^2)$.

(с) Существует взаимно однозначное соответствие между $K_{n,n}^2$ и \widetilde{K}_n^2 , сохраняющее смежность.

Подсказка: решайте п. (а-с) в обратном порядке.

Рассмотрим симметрию (инволюцию) на K^2 , переставляющую компоненты (т. е. переставляющую точки (x, y) и (y, x)), и соответствующее отображение на клеточных 2-циклах.

5.9. * (а) Для любых простых циклов Q, R в K симметризованный тор $Q \times R + R \times Q$ является симметричным клеточным 2-циклом.

(б) Сумма по модулю 2 симметричных клеточных 2-циклов является симметричным клеточным 2-циклом.

(с) Является ли любой симметричный клеточный 2-цикл суммой нескольких симметризованных торов?

(е) Однозначно ли определяется количеством V вершин и количеством E ребер (для связных графов K) количество симметричных клеточных 2-циклов в K^2 ?

5.10. * (а) Любоим симметричный клеточный 2-цикл, содержащийся в K^2 , является суммой нескольких симметризованных торов.

(б) Сколько имеется симметричных клеточных 2-циклов в $K_{n,n}^2$?

(с) взаимно однозначное соответствие из утверждения 5.8.b отображает клеточные 2-циклы в $K_{n,n}^2$, переставляемые симметрией, в клеточные 2-циклы в \widetilde{K}_n^2 , переставляемые симметрией t^2 . Здесь симметрия $t: \widetilde{K}_n \rightarrow \widetilde{K}_n$ определена в задаче 1.6, и $t^2(x, y) := (tx, ty)$.

(д) Любоим симметричный клеточный 2-цикл в $K_{n,n}^2$ является суммой нескольких из следующих циклов:

- симметризованные торы $Q \times R + R \times Q$ для вершинно-непересекающихся циклов Q, R длины 4 в $K_{n,n}$;

- комбинаторный взрезанный квадрат $K_{3,3}^2$ подграфа $K_{3,3}$ графа $K_{n,n}$.

(е) Любоим t^2 -симметрический клеточный 2-цикл в \widetilde{K}_n^2 является суммой нескольких из следующих: t^2 -симметричных торов $Q \times R + tQ \times tR$ и \widetilde{K}_3^2 .

(ф) Верен ли аналог п. (д) для K_n и подграфа (гомеоморфного) K_5 графа K_n ?

Подсказки. (д) Требуется теорема Кюннета 5.6, утверждение 5.8.b и п. (е).

(е) Требуется утверждение 1.6.c.

5.11. * (а) Следующее утверждение [Sa91, 3.4.2] неверно, даже для связных графов: существует клеточный 2-цикл C в K^2 такой, что любой клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких из следующих клеточных 2-циклов: C и произведения вершинно-непересекающихся циклов.

(б) (открытая проблема) Верно ли утверждение из п. (а) для 3-связных графов?

(с) Любоим клеточный 2-цикл в K^2 является суммой нескольких произведений вершинно-непересекающихся циклов, и нескольких комбинаторных взрезанных квадратов подграфов, гомеоморфных графу K_5 или $K_{3,3}$.

(д) (загадка) Сколько имеется клеточных 2-циклов в K^2 для связного графа K с V вершинами и E ребрами (используйте дополнительные данные о графе, если нужно)?

Подсказки. (а) Возьмите дизъюнктное объединение двух копий графа K_5 . Сделайте это объединение связным, соединив две копии ребром.

(с) Это следует из [Sa91, 3.4.1], потому что минимальные по включению 2-циклы порождают группу $H_2(K^2)$ (ср. [Sa91, начало п. (3.3)]). См. план доказательства в обновленном [SS23].

6. ОТВЕТЫ, ПОДСКАЗКИ И РЕШЕНИЯ

1.1. (а) Пусть C_1 и C_2 — 1-циклы в графе. Возьмем произвольную вершину v . Назовем степенью $d_C(v)$ вершины v в наборе C ребер количество ребер набора C , которым принадлежит вершина v . Тогда $d_{C_1+C_2}(v) = d_{C_1}(v) + d_{C_2}(v) - 2d_{C_1 \cap C_2}(v)$ четно. Поэтому $C_1 + C_2$ — 1-цикл.

(б) Любоим простой цикл без хорд в графе K_n имеет длину 3. Поэтому (б) следует из утверждения 1.2.b.

Замечание. Конкретное представление 1-цикла в виде суммы нескольких циклов длины 3 дано в п. (д).

(с) Если в этом 1-цикле есть хотя бы одно ребро, то в нем есть висячая вершина.

(д) *Ответ:* $2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Подсказка. Произвольный 1-цикл C в K_n равен сумме $\widehat{C} := \sum_{ij \in C, i, j < n} ijn$ циклов ijn по всем ребрам $ij \in C$, не содержащим вершину n . Это следует из того, что каждое ребро в $C + \widehat{C}$ содержит вершину n , поэтому в силу п. (с) мы имеем $C + \widehat{C} = 0$, т. е. $C = \widehat{C}$.

Более того, такое представление единственно, см. подробности в доказательстве утверждения 1.4.b.

(ф) В строгой формулировке это утверждение эквивалентно утверждению 3.1.c.

1.2. (а) Докажем, что любой 1-цикл в графе является суммой нескольких реберно непересекающихся простых циклов, принадлежащих данному 1-циклу. Поскольку все вершины 1-цикла имеют четную степень, ребер в нем не меньше, чем вершин. Следовательно, в любом 1-цикле есть простой цикл. Удаляя из 1-цикла ребра простого цикла, также получаем 1-цикл. Продолжая, получим набор реберно непересекающихся простых циклов, сумма которых равна исходному 1-циклу.

(б) Любой 1-цикл является суммой нескольких простых циклов. Любая хорда простого цикла длины l дает представление цикла в виде суммы двух простых циклов длины меньше l .

(с) Сумма двух циклов длины 3, имеющих общее ребро, является циклом длины 4. Поэтому, если цикл α длины 3 является суммой цикла 123 и циклов длины 4, то это верно и для любого цикла длины 3, имеющего общее ребро с α . Следовательно, все циклы длины 3 имеют это свойство. Теперь (с) следует по утверждению 1.1.б.

(д) Для конечного множества X обозначим через $|X|_2$ количество элементов в множестве X по модулю 2. Тогда для любых 1-циклов C, C' выполнено $|C + C'|_2 = |C|_2 + |C'|_2$.

Мы часто сокращаем $\varphi(x)$ до φx для образа x под действием отображения φ , и $\{\sigma\}$ до σ для 1-элементного множества.

1.3. (а) Данное утверждение следует из утверждения 1.2.б.

Замечание. Другой способ представления 1-цикла C в виде суммы нескольких циклов длины 4 — это $\widehat{\varphi}C$, определенный в нашем решении п. (с).

(с) *Ответ:* $2^{(n-1)^2}$.

Замечание. Сравните с утверждением 1.4.б.

Доказательство. Достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между 1-циклами в $K_{n,n}$ и подмножествами¹ $K_{n-1,n-1}$. Определим отображение

$$\varphi: H_1(K_{n,n}) \rightarrow 2^{K_{n-1,n-1}} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \cap K_{n-1,n-1}.$$

Для любого ребра $\sigma = ab'$ в $K_{n-1,n-1}$ обозначим через $\widehat{\varphi}\sigma$ цикл $ab'nn'$ длины 4. Определим отображение

$$\widehat{\varphi}: 2^{K_{n-1,n-1}} \rightarrow H_1(K_{n,n}) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi}D := \sum_{\sigma \in D} \widehat{\varphi}\sigma.$$

Поскольку $\varphi\widehat{\varphi}\sigma = \{\sigma\}$, имеем $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для любого $D \subset K_{n-1,n-1}$.

Возьмем любой 1-цикл $C \in H_1(K_{n,n})$. Так как $\widehat{\varphi}\varphi C$ и C являются 1-циклами, то $C' := \widehat{\varphi}\varphi C + C$ тоже является 1-циклом. Применяя $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для $D = \varphi C$, получаем $\varphi C' = 0$. Поэтому $C' \subset K_{n,n} \setminus K_{n-1,n-1}$. Отсюда, по (б), имеем $C' = 0$, поэтому $\widehat{\varphi}\varphi C = C$.

Таким образом, φ является взаимно однозначным соответствием.

(е) См. утверждение 3.2.ф.

Замечание. Задача 1.3 эквивалентна частному случаю задачи 3.2 для $\ell = 2$. Ребро $ab' \in K_{n,n}$ соответствует паре $(a, b) \in [n]^2$. Вершина $a \in [n]$ соответствует ряду $x = a$, вершина $b' \in [n]'$ соответствует ряду $y = b$. Ребро, содержащее вершину, соответствует элементу множества $[n]^2$, принадлежащему ряду. Тогда 1-циклы в $K_{n,n}$ соответствуют ладейным циклам в $[n]^2$. В частности, циклы длины 4 соответствуют параллелепипедам (которые при $\ell = 2$ можно назвать параллелограммами).

1.4. Ответ: (а) 1; (б) 2^{E-V+1} .

(б) *Доказательство.* Пусть T — максимальное дерево связного графа K . Достаточно доказать, что существует взаимно однозначное соответствие между $H_1(K)$ и множеством 2^{K-T} подмножеств ребер из $K - T$.

Определим отображение

$$\varphi: H_1(K) \rightarrow 2^{K-T} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \cap (K - T).$$

¹Иногда обозначение графа K используется для множества ребер этого графа (или, напротив, обозначение « $\cap K$ » используется для операции «ограничение на K » на множестве ребер).

Для любого ребра $\sigma \in K - T$ обозначим через $\widehat{\varphi}\sigma$ простой цикл в K , образованный σ , и простым путем в T , соединяющим концы σ . Определим отображение

$$\widehat{\varphi}: 2^{K-T} \rightarrow H_1(K) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi}D := \sum_{\sigma \in D} \widehat{\varphi}\sigma.$$

Поскольку $\varphi\widehat{\varphi}\sigma = \{\sigma\}$, имеем $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для любого $D \in 2^{K-T}$.

Выберем любой 1-цикл $C \in H_1(K)$. Так как $\widehat{\varphi}\varphi C$ и C являются 1-циклами, $C' := \widehat{\varphi}\varphi C + C$ тоже является 1-циклом. Применяя $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для $D = \varphi C$, получаем $\varphi C' = 0$. Поэтому $C' \subset T$. Отсюда, по (а) имеем $C' = 0$, поэтому $\widehat{\varphi}\varphi C = C$.

Таким образом, φ является взаимно однозначным соответствием.

1.5. (а) Простой цикл в \widetilde{K}_n образован l -элементной циклической последовательностью вершин такой, что

- число l четное и больше 2;
- в последовательности чередуются вершины из разных долей;
- внутри каждой отдельной доли вершины не повторяются;
- не существует двух последовательных вершин m и m' .

Предположим, что такой цикл не имеет хорд. Тогда любые две непоследовательные вершины не являются смежными, т. е. либо находятся в одной доле, либо являются m и m' . Любая вершина имеет $\frac{l}{2} - 2$ непоследовательных вершин из другой доли. Тогда $\frac{l}{2} - 2 \leq 1$, так что $l \in \{4, 6\}$.

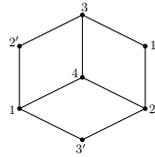


Рис. 3. Цикл длины 6 является суммой трех циклов длины 4

В простом цикле длины 6 без хорд любые две противоположные вершины равны m и m' . Следовательно, цикл равен $(m_1, m'_2, m_3, m'_1, m_2, m'_3)$ для некоторых попарно различных m_1, m_2, m_3 . Так как $n \geq 4$, то существует $a \in [n] - \{m_1, m_2, m_3\}$. Тогда цикл равен

$$(m_1, m'_2, m_3, a') + (m_2, m'_3, m_1, a') + (m_3, m'_1, m_2, a'),$$

см. рис. 3. Теперь требуемый результат выполняется по утверждению 1.2.b.

(b,c) Пусть S — множество всех ребер ij' в \widetilde{K}_n таких, что $i, j > 1$ и $(i, j) \neq (3, 2)$. Утверждения логически вытекают (аналогично задаче 1.4.b) из того, что

- ребро $e' \in S$ содержится в цикле C_e тогда и только тогда, когда $e = e'$;
- граф $\widetilde{K}_n - S$, полученный из \widetilde{K}_n удалением всех ребер из S , является деревом.

Второе из этих утверждений следует из того, что ребра $\widetilde{K}_n - S$ равны именно $32'$ и $1i', i1'$, где $i > 1$, поэтому $\widetilde{K}_n - S$ получается соединением ребром $32'$ «звездных» деревьев, состоящих из ребер $1i'$ при $i > 1$ и ребер $1'i$ при $i > 1$.

2.1. (а) Сеточный граф 3×3 , см. рис 4, слева.

(b) См. рис 4, по центру (где граничные циклы закрашены серым цветом). Другим способом граф $K_3^{\square 2}$ можно получить из графа в п. (а), добавив ребра между соответствующими вершинами:

- 1-й и 3-й строк;
- 1-го и 3-го столбцов.

(Сравните с получением графа K_3 из пути 123 добавлением ребра между 1 и 3.)

(c) См. рис 4, справа.

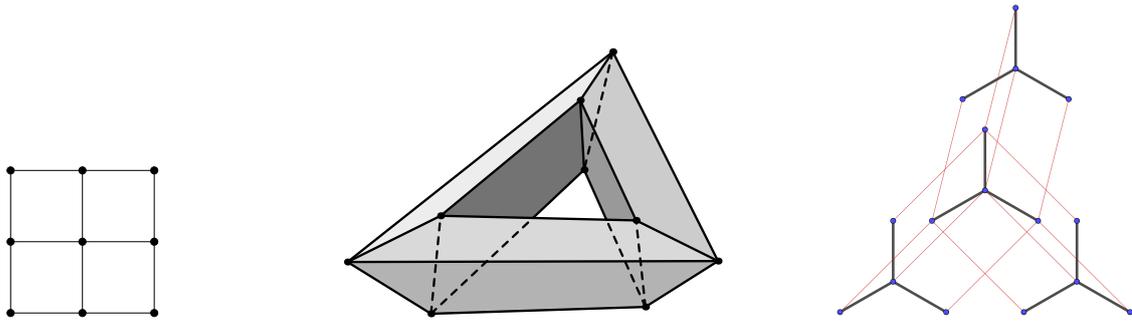


Рис. 4. Слева: $K_{2,1}^{\square 2}$, т. е. сеточный граф 3×3 . Центр: $K_3^{\square 2}$ на торе K_3^2 . Справа: $K_{3,1}^{\square 2}$

(d) Вершины — это узлы сетки 4×4 . Две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они находятся в одной строке или в одном столбце.

2.2. (b) Триодический цикл в $K_{3,1}^{\square 2}$ равен $\sum_{i,j \in [3], i \neq j} i1' \square j1'$.

(e,f) *Ответы:* нет.

(e) *Подсказка.* Левая проекция любой границы (и, следовательно, любой суммы границ) пуста.

2.3. (a) Выполнено равенство $\text{diag}(123) = 1 \times (123) + (123) \times 1 + 12 \square 23 + 12 \square 31 + 23 \square 31$.

(b) Внедиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ равен $1 \times K_3 + K_3 \times 1 + 12 \square 31 + 31 \square 12$.

(c) Антидиагональный цикл в $K_3^{\square 2}$ равен $1 \times K_3 + K_3 \times 1 + 23 \square 31 + 31 \square 23 + 31 \square 31$.

(d) Выполнено равенство $1 \times C + C \times 1 = \text{diag } C + \sum_{i,j \in [n], i < j} i(i+1) \square j(j+1)$, где $n+1 := 1$.

(e) *Ответ:* нет.

2.4. *Ответы:* (a) 2^2 ; (b) 2^2 ; (c) 2^4 ; (d) 2^6 .

2.5. (a) Докажите это индукцией по количеству вершин в T , используя удаление висячей вершины.

(b) Это можно доказать индукцией по числу пар ребер в Z , проецируемых слева на одно и то же ребро в K . База индукции при нулевом числе может быть доказана индукцией по количеству вершин b в K таких, что $Z \cap (b \times K) \neq \emptyset$. Для индуктивного перехода возьмем такую пару $\{(\sigma, v_1), (\sigma, v_k)\}$, возьмем путь $v_1 \dots v_k$ в K и заменим Z на $Z + \sigma \square v_1 v_2 + \dots + \sigma \square v_{k-1} v_k$.

(c) Согласно (b), если $Z_x = Z_y = 0$, то $Z \sim 0$. Применяя это к $Z = C + C_x \times a + a \times C_y$, мы получаем представление из (c). Единственность следует из того, что левая и правая проекции суммы границ равны 0.

2.6. *Ответы.*

(a) Объединение двух непересекающихся копий графа $K_{2,1}$.

(b) Цикл на 6 вершинах.

(c) Цикл на 12 вершинах.

(d) Объединение ребер кубооктаэдра, см. рис. 5.

2.7. *Ответы.*

(a) 2^1 ; (b) 2^5 ; (c) 2^{17} ; (d) 2^{13} ; (e) 2^{43} ; (f) 2^{41} .

(a') 2^1 ; (b') 2^1 ; (c') 2^5 ; (d') 2^7 ; (e') 2^8 ; (f') 2^{12} .

Указание. Примените задачу 1.4.b, чтобы получить (a)-(f).

3.1. (c) Достаточно доказать, что произвольный 2-цикл C равен сумме $\widehat{C} := \sum_{\{i,j,k\} \in C, i,j,k < n} T_{i,j,k,n}$

тетраэдров $T_{i,j,k,n}$ над 3-элементными подмножествами $\{i, j, k\} \in C$, не содержащими n . Это следует из того, что каждая грань в $C + \widehat{C}$ содержит n , поэтому, в силу (b) имеем $C + \widehat{C} = 0$, т. е. $C = \widehat{C}$.

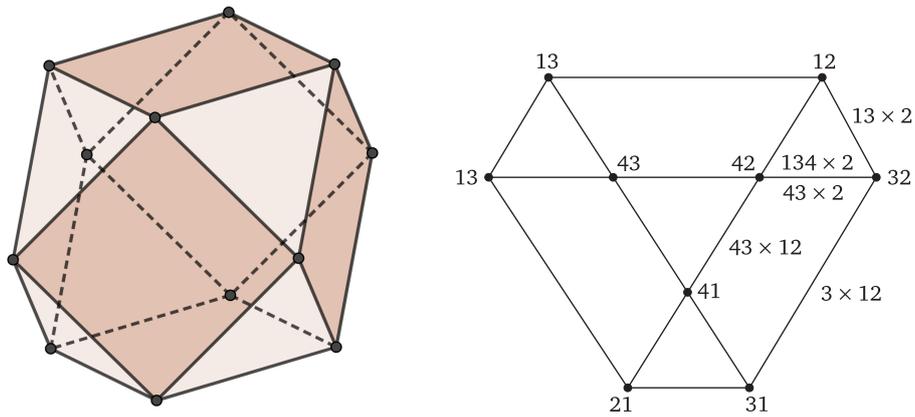


Рис. 5. Слева: кубооктаэдр; объединение ребер есть $K_4^{\square 2}$ (выделены три из шести граней); дополнение к треугольным граням есть K_4^2 . Справа: то же с некоторыми пояснениями; на рисунке не показана невидимая часть, проекция которой получается из изображенной проекции поворотом на $\pi/3$

(f) Строгая формулировка такова (мы отождествляем тетраэдры в $[n]$ с 4-элементными подмножествами $[n]$). Пусть R — набор 4-элементных подмножеств множества $[n]$ такой, что любое 3-элементное подмножество множества $[n]$ содержится в четном количестве 4-элементных подмножеств, являющихся элементами набора R . Тогда существует семейство R' , состоящее из 5-элементных подмножеств множества $[n]$ такое, что 4-элементное подмножество B множества $[n]$ содержится в R тогда и только тогда, когда B содержится в нечетном количестве 5-элементных подмножеств, являющихся элементами семейства R' .

Это утверждение является многомерным аналогом утверждения 3.1.c; доказательство аналогично.

3.2. (c) Для $a \in [n-1]^\ell$ обозначим через $P(a) := \{n, a_1\} \times \dots \times \{n, a_\ell\}$ параллелепипед с противоположными вершинами a и (n, \dots, n) . Достаточно доказать, что любой ладейный цикл $C \subset [n]^\ell$ равен сумме \widehat{C} параллелепипедов $P(a)$ над $a \in C \cap [n-1]^\ell$. Сумма $C + \widehat{C}$ является ладейным циклом. Поскольку $P(a) \cap [n-1]^\ell = \{a\}$, мы имеем $(C + \widehat{C}) \cap [n-1]^\ell = \emptyset$. По (b) имеем $C + \widehat{C} = \emptyset$, т. е. $C = \widehat{C}$.

(f) *Подсказка.* Любой параллелепипед P с некоторым $P_i \subset [n-1]$ является суммой нескольких заданных соотношений и двух параллелепипедов, полученных из P заменой на n одного из двух элементов в P_i . Значит, в каждом из этих двух параллелепипедов количество пар P_j , не содержащих n , меньше, чем в P . Следовательно, любое соотношение между параллелепипедами является суммой нескольких заданных соотношений и соотношения $P(a_1) + \dots + P(a_s) = 0$, для некоторых попарно различных $a_1, \dots, a_s \in [n-1]^\ell$.

Последнее соотношение тривиально, поскольку

$$\emptyset = (P(a_1) + \dots + P(a_s)) \cap [n-1]^\ell = \{a_1, \dots, a_s\}.$$

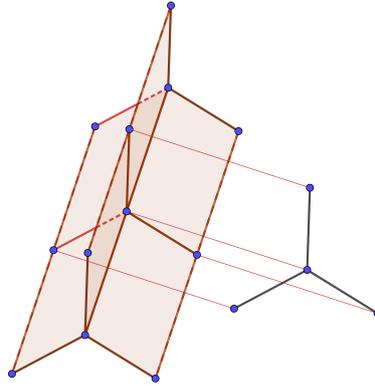
Здесь выполняется второе равенство, так как $P(a) \cap [n-1]^\ell = \{a\}$.

4.2. Пусть $O, V, A_{11}, \dots, A_{1n}$ — точки в \mathbb{R}^3 , никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Для каждого $p \in [n]$ возьмем точку A_{2p} такую, что $\overrightarrow{OA_{2p}} = \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OA_{1p}}$. Если V достаточно близка к O , то точки A_{jp} , $j \in \{1, 2\}$, $p \in [n]$ — искомые, т. е. объединение параллелограммов $A_{1p}A_{2p}A_{2q}A_{1q}$ дает изображение цилиндра над K_n в \mathbb{R}^3 .

4.3. (b) См. рис. 6.

5.1. (b) В этом решении σ, τ — ребра графа K , v — вершина графа K :

$$C - 2\text{-цикл} \Leftrightarrow \begin{cases} |\{\sigma : \sigma \ni v, (\sigma, \tau) \in C\}| \text{ четно для любых } v \text{ и } \tau \\ |\{\tau : \tau \ni v, (\sigma, \tau) \in C\}| \text{ четно для любых } v \text{ и } \sigma \end{cases} \Leftrightarrow$$

Рис. 6. Изображение графа $K_{3,1}^2$ в трехмерном пространстве

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |\{\sigma \in C_{\cdot,\tau} : \sigma \ni v\}| \text{ четно для любых } v \text{ и } \tau \\ |\{\tau \in C_{\sigma,\cdot} : \sigma \ni v\}| \text{ четно для любых } v \text{ и } \sigma \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{\cdot,\tau} \text{ — 1-цикл для любого } \tau \\ C_{\sigma,\cdot} \text{ — 1-цикл для любого } \sigma. \end{array} \right.$$

5.2. (а) Пусть $C := \tilde{C}_1 \times \tilde{C}_2 \subset K^2$ — произведение простых циклов \tilde{C}_1 и \tilde{C}_2 в K . Для любого ребра σ графа K множество $C_{\sigma,\cdot}$ либо равно \tilde{C}_2 , либо пусто. Для любого ребра τ графа K множество $C_{\cdot,\tau}$ либо равно \tilde{C}_1 , либо пусто. Используя утверждение 5.1.b, получим, что C — клеточный 2-цикл.

(с) *Ответ:* нет.

Решение. Пусть C — клеточный 2-цикл в T^2 . Поскольку T — дерево, из утверждения 5.1.b получаем, что $C_{\sigma,\cdot} = 0$ для любого ребра σ дерева T . Следовательно, $C = 0$.

(d) *Ответ:* нет.

Решение. Пусть C — клеточный 2-цикл в \bar{T} . Поскольку T — дерево, из утверждения 5.1.b получаем, что $C_{\sigma,\cdot} = 0$ для любого ребра σ графа $K \setminus T$. Следовательно, $C \subset T \times K$. Поскольку T — дерево, из утверждения 5.1.b получаем, что $C_{\cdot,\sigma} = 0$ для любого ребра σ графа K . Следовательно, $C = 0$.

5.3. *Ответы:* (а) 2; (б) 2; (с) 2^4 ; (d) 2^9 .

Решения.

(а, б) Пусть C — клеточный 2-цикл в K^2 такой, что $C \neq K$, т. е. $(\sigma, \tau) \notin C$ для некоторых ребер σ, τ графа K . По утверждению 5.1.b, множество $C_{\sigma,\cdot}$ является 1-циклом. Так как K — граф-цикл, то $C_{\sigma,\cdot} = 0$. Тогда $(\sigma, \sigma) \notin C$. Следовательно, $C \subset \overline{K - \sigma}$. Используя ответ на задачу 5.2.d, получаем, что $C = 0$.

(с) Используя ответ на задачу 5.5.d, получаем, что количество 2-циклов в $K_{2,3}^2$ равно $2^{(E-V+1)^2} = 2^{2^2} = 16$.

(d) Используя ответ на задачу 5.5.d, получаем, что количество 2-циклов в K_4^2 равно $2^{(E-V+1)^2} = 2^{3^2} = 2^9 = 512$.

5.4. (а) *Ответ:* нет.

Решение. Пусть C — клеточный 2-цикл в K^2 . Возьмем ребро σ графа K . По утверждению 5.1.b, множество $C_{\sigma,\cdot}$ является 1-циклом. Поскольку $C_{\sigma,\cdot}$ — подмножество ребер графа-пути $K - \sigma$, то $C_{\sigma,\cdot} = 0$. Следовательно, $C = 0$.

(б) *Ответ:* нет.

Решение. Пусть C — клеточный 2-цикл в K^2 . По утверждению 5.1.b, множества $C_{\sigma,\cdot}$, $C_{\cdot,\sigma}$ являются 1-циклами для любого ребра σ графа K . Так как и $C_{0j,\cdot}$, и $C_{\cdot,0j}$ — подмножества ребер графа-пути $K - 0 - j$ для любого $j \in [n]$, то $C_{0j,\cdot} = C_{\cdot,0j} = 0$ для любого $j \in [n]$. Тогда $C \subset (K - 0)^2$ для графа-цикла $K - 0$. Отсюда, по (а), имеем $C = 0$.

(с) Положим $C := K_{3,3}^2$. Для произвольного ребра σ графа $K_{3,3}$ и $C_{\sigma,\cdot}$, и $C_{\cdot,\sigma}$ — циклы длины 4. Тогда требуемый результат следует из утверждения 5.1.b.

(d) Положим $C := K_5^2$. Для произвольного ребра σ графа K_5 и $C_{\sigma, \cdot}$, и $C_{\cdot, \sigma}$ — циклы длины 3. Тогда требуемый результат следует из утверждения 5.1.b.

(e) Возьмем $K := K_6$ и $C := 123 \times 456$. Так как $(12, 34) \notin C$, произведение простых циклов C есть непустое собственное подмножество комбинаторного взрезанного квадрата K^2 . По утверждению 5.2.a, множество C является клеточным 2-циклом.

5.5. (a, b) *Подсказка:* требуемые представления можно получить из доказательства п. (c).

(c) Этот пункт легко следует из частного случая для связного графа K , что мы далее и предполагаем.

Пусть T — максимальное дерево связного графа K . Определим отображение

$$\varphi: H_2(K^2) \rightarrow 2^{K^2 - \bar{T}} \quad \text{формулой} \quad \varphi C := C \cap (K^2 - \bar{T}).$$

Для любого ребра $\sigma \in K \setminus T$ в доказательстве утверждения 1.4.b определен 1-цикл $\widehat{\varphi}\sigma$. Определим отображение

$$\widehat{\varphi}: 2^{K^2 - \bar{T}} \rightarrow H_2(K^2) \quad \text{формулой} \quad \widehat{\varphi}D := \sum_{(\sigma, \tau) \in D} \widehat{\varphi}\sigma \times \widehat{\varphi}\tau.$$

Используя ответ на задачу 5.2.d, получим, что $\widehat{\varphi}\varphi C = C$ для любого $C \in H_2(K^2)$, т. е. произвольный клеточный 2-цикл C в K^2 есть сумма торов $\widehat{\varphi}\sigma \times \widehat{\varphi}\tau$ по всем парам $(\sigma, \tau) \in \varphi C$.

(d) *Ответ:* $2^{(E-V+1)^2}$.

Решение. В п. (c) мы определили отображения $\varphi: H_2(K^2) \rightarrow 2^{K^2 - \bar{T}}$ и $\widehat{\varphi}: 2^{K^2 - \bar{T}} \rightarrow H_2(K^2)$ для максимального дерева T связного графа K и доказали, что $\widehat{\varphi}\varphi C = C$ для любого $C \in H_2(K^2)$. Также $\varphi\widehat{\varphi}D = D$ для любого $D \in 2^{K^2 - \bar{T}}$. Таким образом, φ — взаимно однозначное соответствие. Следовательно,

$$|H_2(K^2)| = |2^{K^2 - \bar{T}}| = |2^{(K \setminus T)^2}| = 2^{(E-V+1)^2}.$$

5.6. (b) Обозначим $B := \{C_i \times C_j : i, j \in [q]\}$. В следующих двух абзацах мы докажем, что каждый 2-цикл в K^2 есть сумма некоторых 2-циклов из B и что такое представление единственно, соответственно.

Применим утверждение 5.5.c. Каждый тор $\widetilde{C}_1 \times \widetilde{C}_2 \subset K^2$, в свою очередь, есть сумма некоторых 2-циклов из B , потому что каждый из простых циклов $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$ представляется в виде суммы некоторых 1-циклов из C_1, \dots, C_q .

Обозначим через N количество компонент связности графа K . Аналогично утверждению 1.4.b, $|H_1(K)| = 2^{E-V+N}$. Поскольку C_1, \dots, C_q — базис в $H_1(K)$, то $2^q = |H_1(K)|$, значит $q = E - V + N$. Следовательно, $|B| = q^2 = (E - V + N)^2$. Обобщая утверждение 5.5.d для произвольного графа K , мы получаем $|H_2(K^2)| = 2^{(E-V+N)^2}$, где последнее значение совпадает с числом линейных комбинаций 2-циклов из B . Последнее влечет единственность представлений.

5.7. (a) *Подсказка:* это следует из утверждения 5.1.b.

(b) *Ответ:* нет.

Решение. Возьмем $K := K_5$ (или $K := K_{3,3}$) и $C := K^2$. По утверждению 5.4.c (или 5.4.d), C — клеточный 2-цикл. Поскольку в графе K не существует двух непустых вершинно-непересекающихся циклов, то 2-цикл C не является суммой некоторых произведений вершинно-непересекающихся циклов.

5.8. (a) *Ответ:* $2^{(n^2-3n+1)^2}$.

(c) *Подсказка.* Взаимно однозначное соответствие определяется формулой $f(\sigma_1\sigma'_2, \tau_1\tau'_2) := (\sigma_1\tau'_1, \sigma_2\tau'_2)$ для несмежных рёбер $\sigma, \tau \in [n]^2$. (Напомним, что для $a, b \in [n]$ через ab' мы обозначаем ребро, соединяющее вершины a и b' .) Клетки $\alpha, \beta \in [n] \times [n]' \times [n] \times [n]'$ смежны в $K_{n,n}^2$ тогда и только тогда, когда они различаются ровно по одной из четырех координат. Поскольку $K_{n,n}^2, \widetilde{K}_n^2 \subset K_{n,n}^2$, то α и β в $K_{n,n}^2$ смежны тогда и только тогда, когда $f\alpha$ и $f\beta$ в \widetilde{K}_n^2 смежны, т. е. f сохраняет смежность.

Замечание. Определим взаимно однозначное соответствие \widehat{f} между ребрами графа $K_{n,n}^{\square 2}$ и ребрами графа $\widetilde{K}_n^{\square 2}$, опустив одну из переменных $\sigma_1, \sigma'_2, \tau_1, \tau'_2$ в формуле отображения f (например, $\widehat{f}(\sigma_1, \tau_1 \tau'_2) = (\sigma_1 \tau'_1, \tau'_2)$). Нетрудно доказать, что соответствия f, \widehat{f} сохраняют инцидентность. (Напомним, что ребро η и 2-клетка $\alpha = (\xi, \zeta)$ *инцидентны*, если $\eta = \xi$ или $\eta = \zeta$.) При этом не существует взаимно однозначного соответствия между вершинами, которое бы сохраняло инцидентность. Действительно, не существует взаимно однозначного соответствия между 1-циклами в $K_{n,n}^{\square 2}$ и в $\widetilde{K}_n^{\square 2}$. Например, для $n = 3$ имеем $|H_1(\widetilde{K}_3^{\square 2})| = 2^{37}$, в отличие от ответа на задачу 2.7.e; кроме того, в $\widetilde{K}_3^{\square 2}$ четыре цикла по модулю границ, в отличие от ответа на задачу 2.7.e'.

Для набора квадратов с ориентированными сторонами разобьём эти стороны на пары. Склеим как-то стороны в соответствии с разбиением. Оказывается, это можно сделать разными способами, получив тем самым разные поверхности. Например, как было обосновано выше в решении, при одной склейке можно получить $K_{3,3}^2$, являющийся сферой с четырьмя ручками, а при другой склейке — тор \widetilde{K}_3^2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [CPG] https://ru.wikipedia.org/wiki/Прямое_произведение_графов
- [FH10] *M. Farber, E. Hanbury.* Topology of Configuration Space of Two Particles on a Graph, II. *Algebr. Geom. Topol.* 10 (2010) 2203–2227. arXiv:1005.2300.
- [MS17] *T. Maciazek, A. Sawicki.* Homology groups for particles on one-connected graphs *J. Math. Phys.* 58, 062103 (2017). arXiv:1606.03414.
- [Sa91] *K. S. Sarkaria.* A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion, *Israel J. Math.* 73 (1991), 79–89. <http://kssarkaria.org/docs/One-dimensional.pdf>.
- [Sk06] * *A. Skopenkov,* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, *London Math. Soc. Lect. Notes*, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk14] * *A. Скопенков,* Реализуемость гиперграфов и неотъемлемая зацепленность, *Мат. Просвещение*, в печати. arXiv:1402.0658.
- [Sk18] * *A. Skopenkov.* Invariants of graph drawings in the plane. *Arnold Math. J.*, 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20] * *A. Skopenkov,* Algebraic Topology From Geometric Standpoint (in Russian), MCCME, Moscow, 2020 (2nd edition). Part of the book: <http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>. Part of the English translation: <https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf>.
- [Sk23] * *A. Skopenkov.* Инварианты изображений графов на плоскости. *Мат. Просвещение* (2023).
- [Sk] * *A. Skopenkov.* Algebraic Topology From Algorithmic Standpoint, draft of a book, mostly in Russian, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [SS23] *A. Skopenkov and O. Styrт,* Embeddability of join powers and minimal rank of partial matrices, arXiv:2305.06339.