

КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ ¹

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков ²

Соответствия между ребрами графов. Задачи для матпрактикума ФИВТ.

Основные нерешенные задачи — 0.2 и 0.4.

Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать. Трудные задачи отмечены звездочкой, а нерешенные — двумя.

Другие задачи из этого текста также могут помочь студенту начать научную работу.

Пусть p и q — два подмножества множества ребер некоторого дерева.

Множество p *лежит по одну сторону* (в этом дереве) от q , если $p \cap q = \emptyset$, и для любых двух концов ребер из p соединяющий их путь в дереве содержит четное число ребер из q .

Наборы p и q *не зацеплены* (в этом дереве) если p лежит по одну сторону от q и q лежит по одну сторону от p .

Для вершины P графа обозначим через δP множество выходящих из P ребер.

Пусть G и G' — два дерева с одинаковым количеством ребер. Они называются *дружественными*, если существует биекция (т.е., взаимно-однозначное соответствие) между их ребрами, при которой для любых двух вершин P, Q графа G , соединенных путем из четного числа ребер, наборы ребер в G' , соответствующие δP и δQ , не зацеплены в G' .

- 0.1.** (a) Любая пара деревьев с $n \leq 4$ вершинами каждое дружественна.
 (b) Звезда с n лучами (рис. 8 слева для $n = 3$) дружественна любому дереву из n ребер.
 (c) Любое дерево дружественно себе.
 (d)* Дружественность симметрична. Т.е. если деревья G и G' дружественны, то деревья G' и G дружественны.
 (e)** Транзитивна ли дружественность?

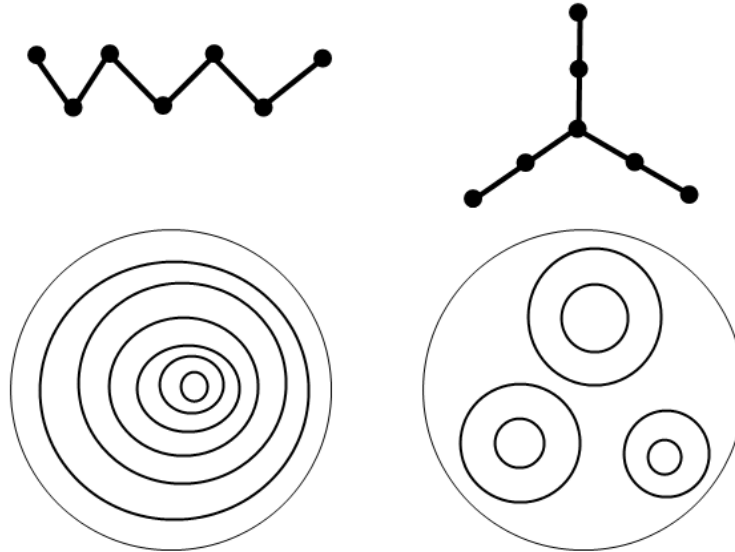


Рис. 1: Дружественна ли эта пара?

¹Мы благодарим за полезные замечания и обсуждения С. Ландо и анонимного рецензента Московской Математической Конференции Школьников.

²Поддержан Грантом фонда Саймонса-НМУ

0.2. (a) Существует алгоритм, который по паре деревьев определяет, дружелюбны ли они.

(b)** Оцените сложность такого алгоритма в зависимости от числа n ребер каждого из деревьев. Т.е. оцените минимум по алгоритмам, определяющим дружелюбность деревьев, от максимума по парам деревьев с n ребрами каждое, от числа шагов в алгоритме, примененному к данной паре деревьев.

(c)** Придумайте простой критерий дружелюбности.

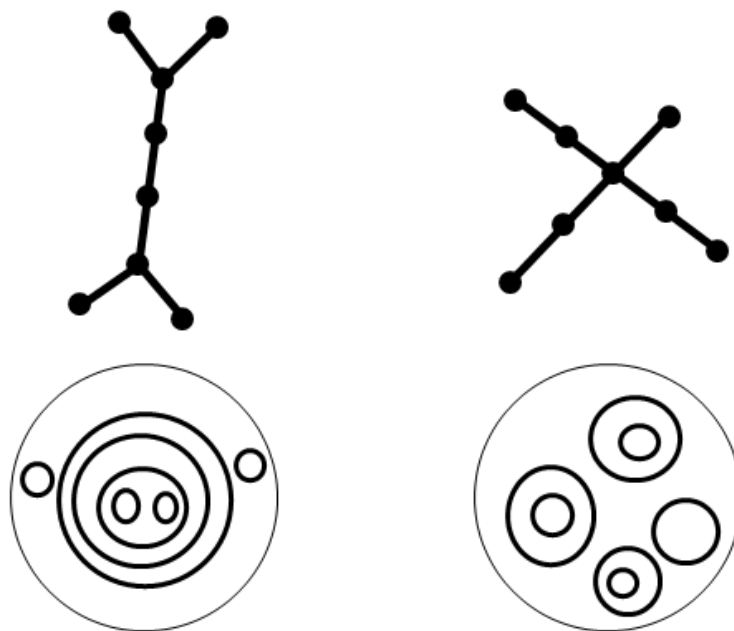


Рис. 2: Дружелюбна ли эта пара?

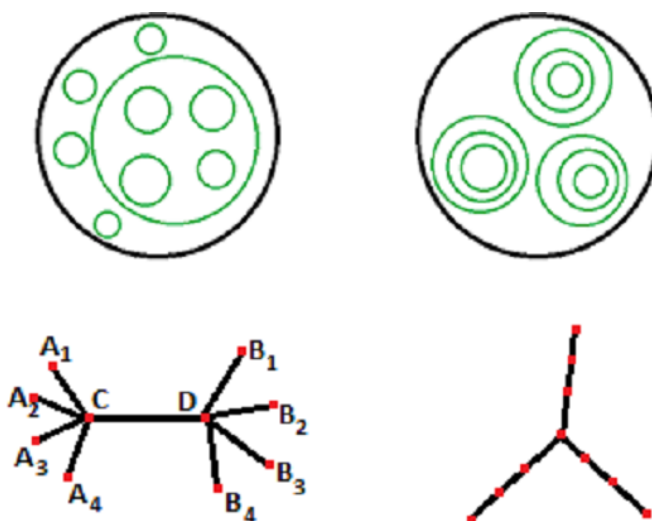


Рис. 3: Дружелюбна ли эта пара?

0.3. (a) Дружелюбна ли пара на рис. 1? Один граф — цепочка из 6 ребер, другой — триод с ‘лучами’ из двух ребер.

(b) Дружелюбна ли пара на рис. 2? Один граф — звезда с 4 ‘лучами’, три ‘луча’ состоят из двух ребер, а один ‘луч’ — из одного ребра. Другой граф представляет собой букву ‘H’ с ‘горизонтальной перекладиной’ из трех ребер.

(с) Дружественна ли пара на рис. 3?

(d) Найдите недружественную пару, отличную от (a), (b) и (с).

0.4. ** Даны целые числа n, k, q .

(a) Какие графы дружественны графу, представляющим собой объединение по одному общему ребру звезды с n лучами и звезды с k лучами (т.е. данному дереву диаметра 3)?

(b) Какие графы дружественны пути длины n ?

(с) Какие графы дружественны данному дереву диаметра 4?

(d) Какие графы дружественны триоду с 'лучами' из n, k, q ребер?

1 Примеры и основные задачи

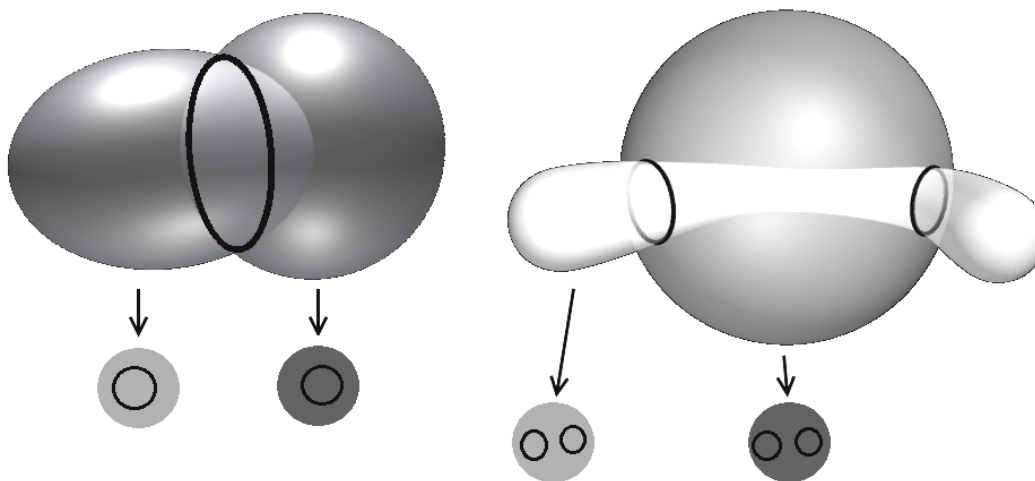


Рис. 4: Криволинейные сферы, пересекающиеся по окружности (слева) и по двум окружностям (справа)

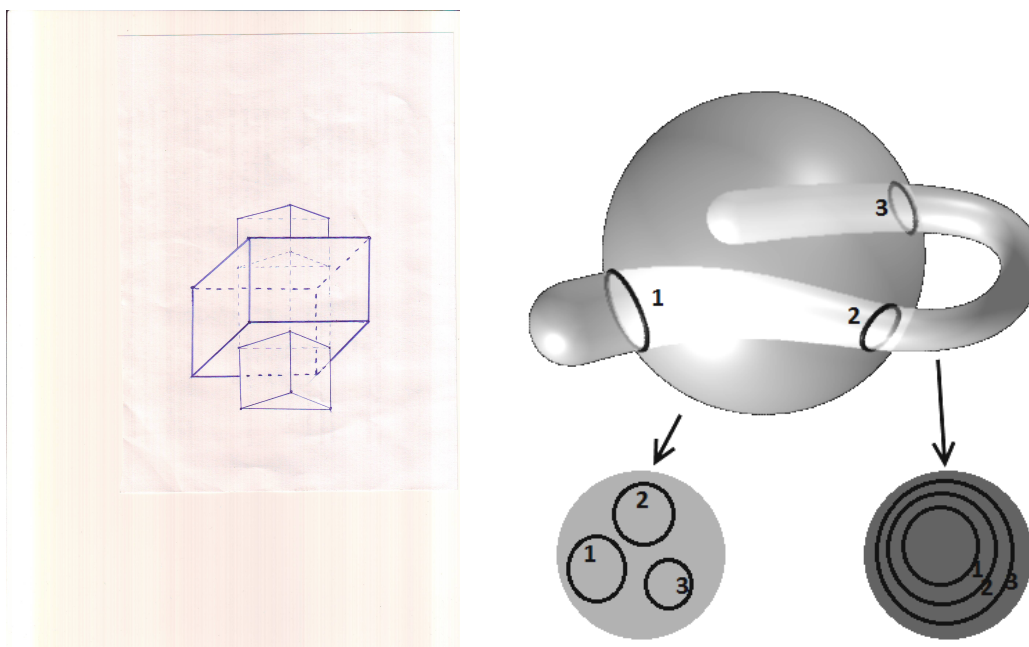


Рис. 5: Криволинейные сферы, пересекающиеся по двум окружностям (слева) и по трем окружностям (справа)

Как могут пересекаться криволинейные сферы в трехмерном пространстве? На рисунках 4 и 5 изображены пары криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающиеся по набору окружностей.

Видимо, термин *криволинейная сфера* интуитивно понятен Вам. Если нет, то прочтите строгое определение ниже. Здесь мы только отметим, что в этом тексте криволинейные сферы подразумеваются *не имеющими самопересечений*.

Скорее всего, для решения задач Вам не понадобятся строгие определения. Пожалуйста, изображайте криволинейные сферы с помощью понятных (для членов жюри) рисунков, а не

задавайте их формальными конструкциями. Если задача сформулирована как утверждение, то требуется его доказать. Если задача оказывается слишком сложной, попробуйте решить соседние задачи, они могут содержать подсказки. Нерешенные задачи отмечены звездочками.

1.1. Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению трех непересекающихся окружностей так, что в каждой сфере эти окружности

- (а) ограничивают 3 диска (как справа-снизу-слева на рис. 5).
- (б) не ограничивают 3 дисков (как справа-снизу-справа на рис. 5).

1.2. Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению четырех непересекающихся окружностей так, что в каждой сфере эти окружности

- (а) ограничивают 4 диска (как на рис. 6.а).
- (б) „параллельны“, или „одна внутри другой“ (как на рис. 6.б).
- (с) расположены как на рис. 6.с.

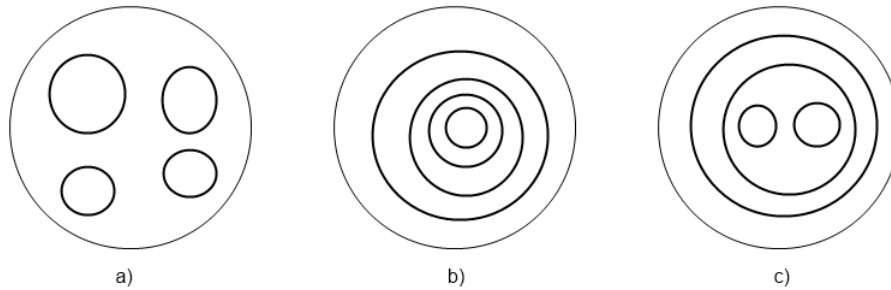


Рис. 6: Четыре окружности на сфере

Предположим, что M и N — наборы из одинакового числа окружностей на криволинейных сферах S и T . Тогда M расположено в S так же, как N в T , если есть биекция между связными компонентами дополнений $S - M$ и $T - N$, при которой две связные компоненты дополнения $S - M$ соседние тогда и только тогда, когда две соответствующие связные компоненты $T - N$ соседние. (Или, что то же самое, если пары (S, M) и (T, N) кусочно-линейно гомеоморфны.)

1.3. (ij), $i, j \in \{a, b, c\}$. Нарисуйте пару криволинейных сфер в трехмерном пространстве, пересекающихся по объединению четырех непересекающихся окружностей так, что в одной сфере эти окружности расположены как на рис. 6.i, а в другой — как на 6.j.

В этом тексте мы изучим две следующие проблемы и их обобщения. (Вполне возможно, вы в данный момент не сможете их решить, так что лучше отложите их и порешайте другие задачи.)

Криволинейные сферы пересекаются *трансверсально*, если в окрестности любой точки пересечения оно выглядит как пересечение двух плоскостей по прямой. (Строгое определение дано ниже в тексте.)

1.4. (а) **Проблема Ландо.** Пусть M и N — два набора одинакового числа окружностей на сфере. Существует ли пара криволинейных сфер в трехмерном пространстве, которые трансверсально пересекаются по конечному набору непересекающихся окружностей, расположенных в одной сфере как M , а в другой — как в N ?

(б) Существует ли алгоритм, проверяющий существование таких двух криволинейных сфер? (См. „Связь с графами“ ниже.)

(с)* Существует ли такой полиномиальный алгоритм?

На рис. 4, слева, две сферы пересекаются по окружности; каждая сфера делится окружностью на 2 связных компоненты, каждая из которых имеет одну соседнюю с ней компоненту (в

той же сфере). На рис. 4, справа, (и на рис. 5 слева) две криволинейные сферы пересекаются по двум окружностям; каждая из сфер делится окружностями на 3 связные компоненты, из которых две имеют 1 соседнюю компоненту, а одна — 2 соседние компоненты. На рис. 5, справа, две криволинейные сферы пересекаются по трем окружностям; каждая сфера делится окружностями на 4 связные компоненты; в одной сфере количества соседей у компонент равны 3, 1, 1, 1, а в другой — 1, 2, 2, 1.

1.5. Проблема соседственных последовательностей. Даны последовательности $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ положительных целых чисел. Существуют ли две криволинейные сферы S и T в трехмерном пространстве, пересечение которых состоит из $n - 1$ окружностей и делит

- S на n связных компонент, которые могут быть так пронумерованы, что у i -ой связной компоненты x_i соседних связных компонент в S , и
- T на n связных компонент, которые могут быть так пронумерованы, что у i -ой связной компоненты y_i соседних связных компонент в T ?

Некоторые строгие определения.

Напомним, что Вы сможете решить все предложенные задачи фактически не используя приводимые строгие определения. Мы приводим удобные в рамках данного текста определения; они могут отличаться от общепринятых математических терминов.

В этом тексте *криволинейной окружностью*, или, сокращенно, *окружностью*, называется замкнутая несамопересекающаяся ломаная в трехмерном пространстве. Определение многогранника (несамопересекающегося, но не обязательно выпуклого) приведено в [D], см. также [W]. *Криволинейной сферой* называется многогранник в трехмерном пространстве (точнее, его двумерная поверхность), который разбивается на части любой лежащей на нем окружностью. См. рис. 1. (Такие многогранники называются топологически эквивалентными сфере. Это условие эквивалентно условию $V - E + F = 2$.)

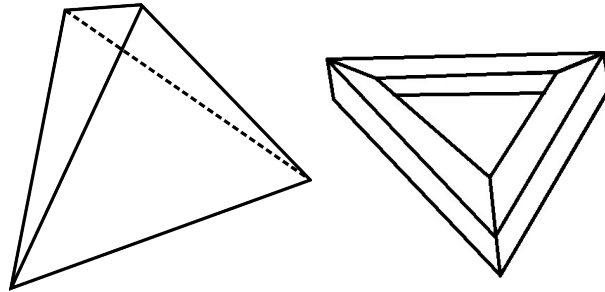


Рис. 7: Криволинейная сфера (слева) и фигура, не являющаяся криволинейной сферой (справа)

Для упрощения рисунков будем изображать вместо многогранника ‘близкую’ к нему *криволинейную* поверхность. Например, криволинейную сферу или ‘сосиску’, как на рисунке 5 справа. Вместо замкнутой ломаной будем изображать — ‘близкую’ к ней замкнутую *кривую*.

Подмножество X трехмерного пространства назовем *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в X . *Компонентой связности* или *связной компонентой* подмножества Y трехмерного пространства назовем максимальное связное подмножество в X , т.е. такое связное подмножество $Y \subset X$, что не существует связного подмножества Z , для которого $Y \subset Z \subset X$ и $Y \neq Z \neq X$.

Пусть M — объединение непересекающихся окружностей в криволинейной сфере S . Две связные компоненты дополнения $S - M$ называются *соседями*, если их замыкания пересекаются.

Обозначим через $B(x, r) \subset \mathbb{R}^3$ шар радиуса r с центром в x . Пересечение двух криволинейных сфер $S, T \subset \mathbb{R}^3$ *трансверсально*, если для любой точки $x \in S \cap T$ существует $r > 0$ такое,

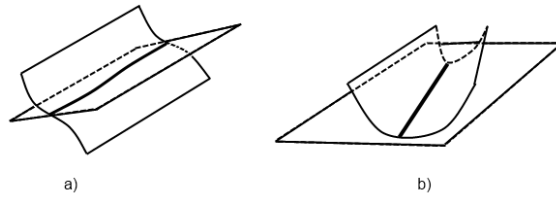


Рис. 8: Трансверсальное (слева) и не трансверсальное (справа) пересечения

что и $B(x, r) - S$, и $B(x, r) \cap (T - S)$ состоят из двух связных компонент, а каждая компонента $B(x, r) - S$ содержит компоненту $B(x, r) \cap (T - S)$.

Вы можете использовать следующую теорему и ее следствие без доказательства.

Теорема Жордана. *Криволинейная сфера делит трехмерное пространство ровно на две части. Две точки пространства, не принадлежащие сфере, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей криволинейной сферы.*

Следствие. *Пусть S и T — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору $S \cap T$ непересекающихся окружностей. Обозначим через B внутренность сферы S (точнее, ограниченную часть дополнения $\mathbb{R}^3 - S$). Пусть Q — связная компонента дополнения $T - S$, расположенная внутри S . Тогда Q делит B на две части. Две точки шара B , не лежащие на Q , лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить ломаной, не пересекающей Q .*

Связь с графами.

Пусть M — объединение непересекающихся окружностей в криволинейной сфере S . Определим (двойственный к M) граф $G = G(S, M)$ следующим образом. Вершины — связные компоненты $S - M$. Вершины соединяются ребром, если соответствующие компоненты — соседи.

На рис. 9 показаны графы для сфер S, T с рис. 5 справа и набора окружностей $S \cap T$. Аналогичным образом две криволинейные сферы, пересекающиеся по набору окружностей, определяют пару графов. Проблема Ландо требует описать получающиеся таким образом пары графов, а проблема соседственных последовательностей — получающиеся наборы степеней их вершин.³

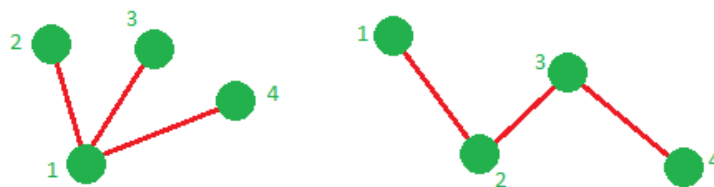


Рис. 9: Два графа для сфер с рис. 5 справа

Поблажки.

Команда получает „поблажку“ за каждое правильно ($\geq +.$) записанное решение. Компьютерная программа, проходящая тесты, предложенные жюри, и имеющая понятную структуру расценивается как записанное решение. Большая понятная членам жюри картинка рас-

³Вот другая интерпретация, предложенная И.Н. Шнурниковым. Даны единичный квадрат на плоскости и (кусочно-линейная) функция на нем, строго положительная на границе квадрата. Диск соответствует одной криволинейной сфере (с проколом), график функции (над диском) — другой криволинейной сфере, множество нулей функции — пересечению криволинейных сфер.

ценивается как записанное построение примера. Жюри также может награждать „поблажками“ за красивые решения, решения сложных задач и за (некоторые) решения, записанные в $\text{\TeX}$ -е. „Поблажек“ у жюри бесконечно много. Можно также сдавать задачи устно, платя по „поблажке“ за каждую попытку.

Мы приглашаем школьников, успешно продвинувшихся в решении задач и работающих над задачами для исследования, консультироваться по поводу возникающих вопросов и идей решения.

2 Проблема соседственных последовательностей

Пара $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ последовательностей положительных целых чисел называется *реализуемой*, если существуют две криволинейные сферы S и T в трехмерном пространстве, пересечение которых состоит из $n - 1$ окружностей и делит

- S на n связных компонент, которые могут быть так занумерованы, что у i -ой связной компоненты x_i соседних связных компонент в S , и
- T на n связных компонент, которые могут быть так занумерованы, что у i -ой связной компоненты y_i соседних связных компонент в T ?

Пара (S, T) сфер называется *реализацией* пары $(\vec{x}, \vec{y})$.

2.1. (n), $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Какие пары последовательностей из n положительных целых чисел реализуемы?

2.2. (a) Если пара $(\vec{x}, \vec{y})$ последовательностей реализуема, то $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n = 2n - 2$.

(b) Двойственный граф $G(S, M)$ к набору M непересекающихся окружностей в криволинейной сфере S является деревом.

Последовательность $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ положительных целых чисел называется *деревянной*, если $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n - 2$.

2.3. Если последовательность $\vec{x}$ деревянная, то в ней не менее x_1 единиц.

2.4. Пара $(\vec{x}, \vec{x})$ реализуема для любой деревянной последовательности $\vec{x}$.

2.5. Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ — деревянные последовательности, в которых все единицы находятся в конце, и $x_1 \geq y_1$. Тогда последовательности $\vec{x}' := (x_1 - y_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_{n - y_1 + 1})$ и $\vec{y}' = (y_2, y_3, \dots, y_{n - y_1 + 2})$ — деревянные.

2.6. Какие пары деревянных последовательностей можно получить из $((1, 1), (1, 1))$ с помощью перестановок и замен пары векторов $(\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n))$ на пару:

(a) $(\vec{x}' = (a, x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots, 1), \vec{y}' = (y_1 + a - 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1, 1, \dots, 1))$ (число новых единиц равно $a - 2$ для $\vec{x}'$, и $a - 1$ для $\vec{y}'$; здесь a может быть различно для различных замен: $((1, 1), (1, 1)) \xrightarrow{a=3} ((3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1)) \xrightarrow{a=4} ((4, 3, 1, 1, 1, 1, 1), (6, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$).

(b) $(\vec{x}' = (x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1), \vec{y}' = (y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1))$.

3 Проблема Ландо

Пара (M, N) наборов из одинакового числа непересекающихся окружностей на сфере, называется *реализуемой*, если существует пара криволинейных сфер в трехмерном пространстве, которые трансверсально пересекаются по конечному объединению непересекающихся окружностей, которые расположены в одной сфере так же, как M , а в другой — как в N .

3.1. (a) Любая пара наборов, каждый из которых состоит из $n \leq 4$ непересекающихся окружностей, реализуема.

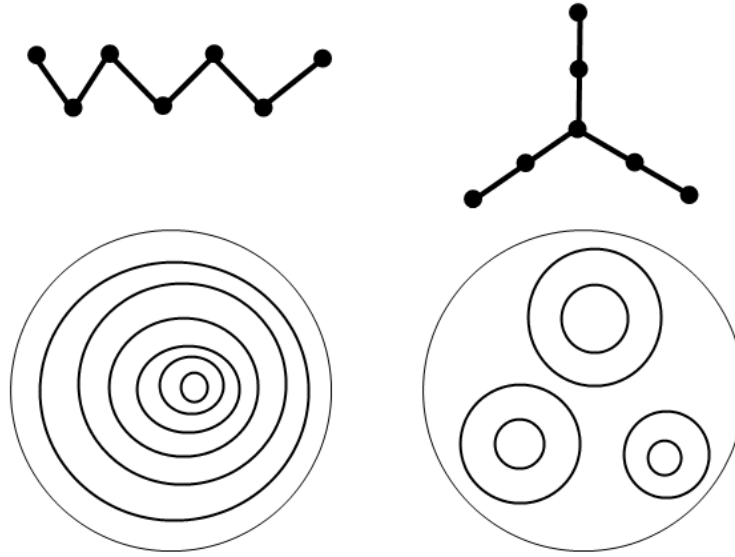


Рис. 10: Реализуема ли эта пара?

(b) Является ли пара на рис. 10 реализуемой? Один граф — цепочка из 6 ребер, другой — триод с ‘лучами’ из двух ребер.

(c) Является ли пара на рис. 11 реализуемой? Один граф — звезда с 4 ‘лучами’, три ‘луча’ состоят из двух ребер, а один ‘луч’ — из одного ребра. Другой граф представляет собой букву ‘H’ с ‘горизонтальной перекладиной’ из трех ребер.

(d) Существует нереализуемая пара из двух наборов из одинакового числа непересекающихся окружностей.

3.2. Даны целые числа n и k .

(a) Какие наборы непересекающихся окружностей реализуемы в паре с набором n окружностей, ограничивающих n непересекающихся дисков? (Или, что то же самое, какие графы реализуемы в паре со звездой с n лучами?)

(b) Какие графы реализуемы в паре с графом, представляющим собой объединение по одному общему ребру звезды с n лучами и звезды с k лучами?

(c) * Какие наборы непересекающихся окружностей реализуемы в паре с набором n ‘параллельных’ окружностей? (Или, что то же самое, какие графы реализуемы в паре с цепочкой длины $n + 1$?)

3.3. Пусть S и T — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору $S \cap T$ непересекающихся окружностей. Тогда связные компоненты $S - T$ можно покрасить в черный и белый цвета так, чтобы любые две компоненты одного цвета не были соседями.

До конца этого параграфа M, N будут объединениями одинакового числа непересекающихся окружностей на криволинейных сферах S, T (Ни M , ни N не обязано совпадать с $S \cap T$.)

Для связной компоненты P множества $S - M$ обозначим за ∂P объединение граничных (краевых) окружностей компоненты P . Легко видеть, что связные компоненты P и Q дополнения $S - M$ являются соседями в том и только том случае, когда $\partial P \cap \partial Q \neq \emptyset$.

3.4. Незацепленные семейства окружностей.

Пусть S и T — криволинейные сферы, трансверсально пересекающиеся по конечному набору $S \cap T$ непересекающихся окружностей. Пусть P и Q — две связные компоненты дополнения $S - T$, расположенные внутри T .

(a) Если Q является криволинейным диском (то есть, если граница компоненты Q состоит

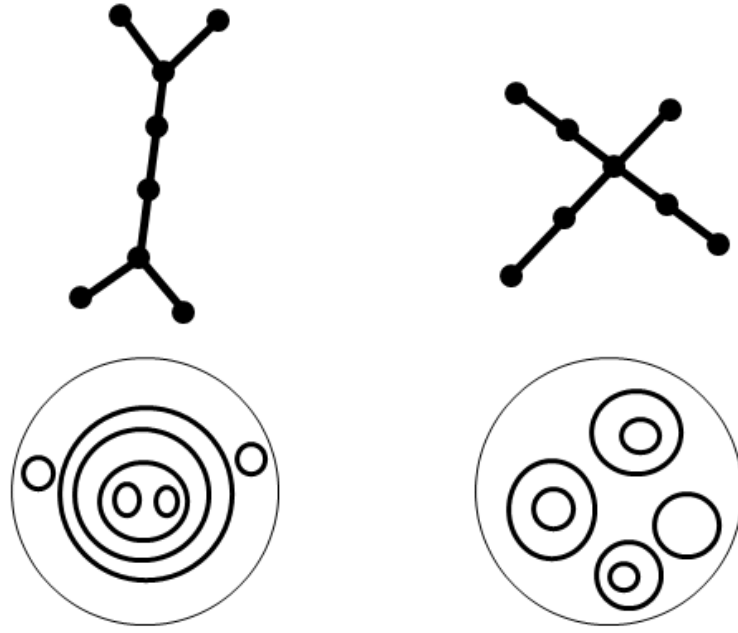


Рис. 11: Реализуема ли эта пара?

из одной окружности), то ∂P находится целиком внутри одной компоненты дополнения $T - \partial Q$.

(b) Если Q является криволинейным цилиндром (то есть, если граница компоненты Q состоит из двух окружностей), то ∂P целиком содержится либо в кольцевой компоненте дополнения $T - \partial Q$ (то есть, в компоненте с двумя граничными окружностями), либо в объединении двух дисковых (то есть имеющих одну граничную окружность) компонент дополнения $T - \partial Q$.

(c) Покрасим связные компоненты дополнения $T - \partial Q$ в черный и белый цвета так, чтобы любые две соседние компоненты оказались разного цвета. Тогда ∂P целиком содержится в объединении одинаково окрашенных компонент дополнения $T - \partial Q$.

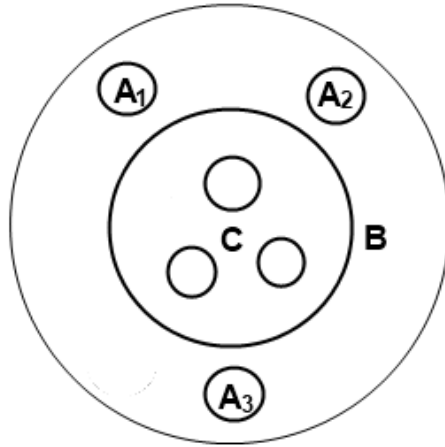


Рис. 12: Пересечение $S \cap T$ на сфере S

Знак $\sqcup$ обозначает объединение непересекающихся множеств.

3.5. Пусть S и T такие криволинейные сферы, что $S \cap T$ расположено на S как на рис. 12. Обозначим за A_i ‘внешние’ окружности, за B ‘большую разделяющую’ окружность, а за C — объединение ‘внутренних’ окружностей, см. рис. 12.

(a) Для каждого i объединение $B \cup C$ лежит по одну сторону от A_i в T .

(b) Объединение $B \cup C$ лежит в одной связной компоненте $T - \sqcup_i A_i$.

Рис. 13: Непересекающиеся криволинейный диск и криволинейный цилиндр вне шара (слева), непересекающиеся криволинейные цилиндры, один из которых заузлен, вне шара (справа)

3.6. Проблема продолжения вложения. (a) Любые две непересекающиеся окружности в единичной сфере являются границами двух непересекающихся криволинейных дисков внутри сферы.

(b) Для каких трех непересекающихся окружностей p, q_1, q_2 на единичной сфере существуют непересекающиеся *криволинейный диск* P и *криволинейный цилиндр* Q внутри этой сферы, для которых $\partial P = p$ и $\partial Q = q_1 \sqcup q_2$? (Рис. 13 слева.)

(c) Для каких четырех непересекающихся окружностей p_1, p_2, q_1, q_2 на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные цилиндры P и Q внутри этой сферы, для которых $\partial P = p_1 \sqcup p_2$ и $\partial Q = q_1 \sqcup q_2$? (Рис. 13 справа.)

(d) Для каких двух непересекающихся семейств p, q непересекающихся окружностей на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные *сферы с дырками* P и Q внутри этой сферы, для которых $\partial P = p$ и $\partial Q = q$?

(e) Существуют ли три непересекающихся семейства p, q, r непересекающихся окружностей на единичной сфере, такие что

- каждая из трех пар (p, q) , (q, r) и (p, r) может быть продолжена внутрь сферы (до непересекающихся криволинейных сфер с дырками) в смысле пункта (d);
- не существует непересекающихся криволинейных сфер с дырками P, Q и R внутри этой сферы, для которых $\partial P = p$, $\partial Q = q$ и $\partial R = r$?⁴

(f) Для каких m непересекающихся семейств $p_1, \dots, p_m$ непересекающихся окружностей на единичной сфере существуют непересекающиеся криволинейные сферы с дырками $P_1, \dots, P_m$ внутри этой сферы, такие что $\partial P_i = p_i$ для всех $i = 1, \dots, m$?

Пусть S и T — криволинейные сферы, для которых все кроме одной компоненты $S - T$ имеют по одному соседу. (Оставшаяся компонента может иметь одного или более соседей.) Эта оставшаяся компонента называется *криволинейной сферой с дырками*. *Криволинейный диск* — это криволинейная сфера с 1 дыркой (= с одним соседом). *Криволинейный цилиндр* — это криволинейная сфера с 2 дырками (= с двумя соседями).

Пусть M и N — два набора непересекающихся окружностей в единичной сфере S . Покрасим связные компоненты $S - N$ в черный и белый цвета так, чтобы соседние компоненты были разных цветов. Набор M *лежит по одну сторону* (в сфере) от N , если M содержится в наборе компонент $S - N$, одинаково покрашенных. Наборы M и N *не зацеплены* (в сфере), если M лежит по одну сторону от N и N лежит по одну сторону от M . См. рис. 14.

3.7. (a) Существует два набора M и N непересекающихся окружностей в сфере, такие что M лежит по одну сторону от N , но N не лежит по одну сторону от M .

(b) Верно ли, что если пары M, N и N, P наборов окружностей на криволинейной сфере не зацеплены, то не зацеплена и пара M, P , то есть, транзитивно ли отношение незацепленности?

(c) Для набора M непересекающихся окружностей в единичной сфере S обозначим за $\overset{\circ}{M}$ объединение черных компонент связности $S - M$. два набора M и N не зацеплены если и только если для любых черно-белых раскрасок S относительно M и относительно N , таких что $\overset{\circ}{M} \cup \overset{\circ}{N} \neq S$, будет либо $\overset{\circ}{M} \subset \overset{\circ}{N}$, (Есть два способа выбрать $\overset{\circ}{p}$ для данного p ; один из них — дополнение другого.) либо $\overset{\circ}{N} \subset \overset{\circ}{M}$, либо $\overset{\circ}{M} \cap \overset{\circ}{N} = \emptyset$.

⁴Сравните с известным примером колец Борромео.

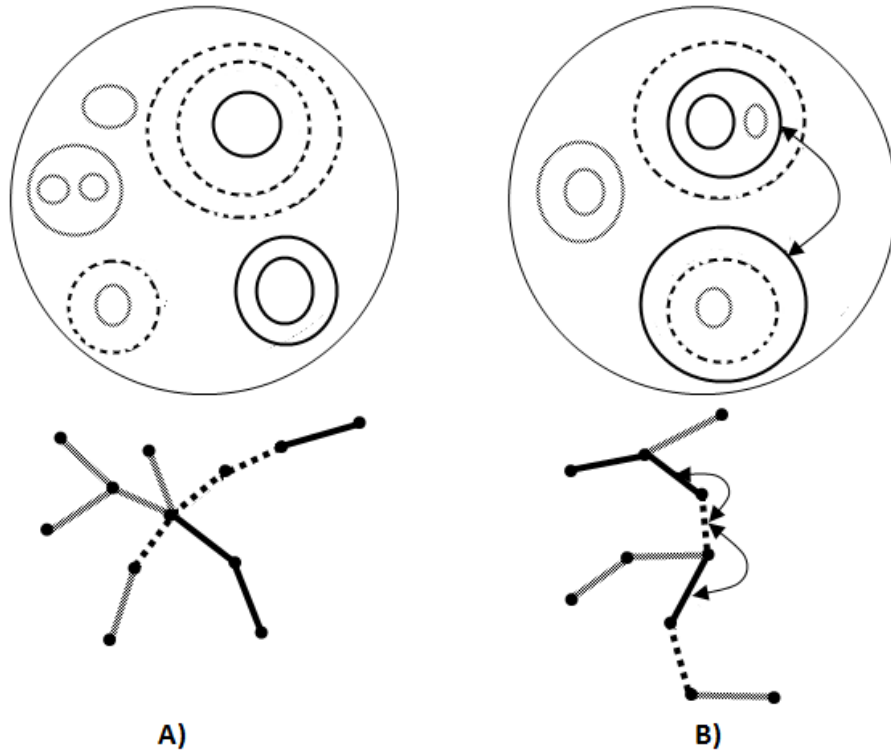


Рис. 14: (А): набор ‘пунктирных’ окружностей и набор ‘жирных’ окружностей не зацеплены (В): набор ‘пунктирных’ окружностей и набор ‘жирных’ окружностей зацеплены, поскольку выделенный стрелочками путь между двумя ‘жирными’ окружностями пересекает ‘пунктирные’ окружности по нечетному числу точек.

КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков

4 Промежуточный финиш. Некоторые решения и новые задачи

1.1 и 1.2. Аналогично решению задачи 2.4.

1.3. Случай $i = j$ выводится аналогично задаче 2.4. Случаи ab , ac , bc см. на рис. 15.

1.4. (а) Ответ содержится в решении задачи 4.5.

(б) Такой алгоритм дается в ответе к 4.5. (Очевидно, он не полиномиален.)

1.5. Теорема 1. Пусть n — положительное целое число, а $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — последовательности положительных целых чисел. Тогда условие $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = 2n - 2$ равносильно существованию криволинейных сфер S и T , пересечение которых состоит из $n - 1$ окружностей и делит

- S на n связных компонент, которые могут быть занумерованы, так что у i -ой связной компоненты x_i соседей в S , и
- T на n связных компонент, которые могут быть занумерованы, так что у i -ой связной компоненты y_i соседей в T .

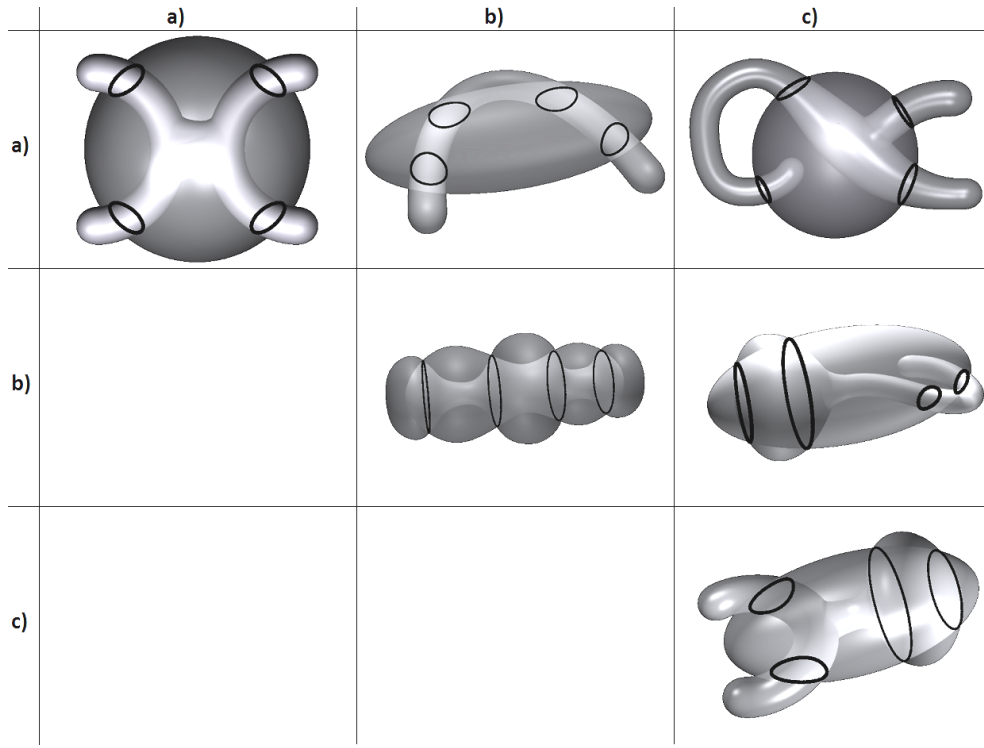


Рис. 15: К решению задачи 1.3.

Это следует из Теоремы 1' (задача 4.3) ниже.

2.1. Ответ. Пары $(\vec{x}, \vec{x})$ реализуемы для $\vec{x}$, равного с точностью до перестановок одной из пар

$$(1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (4, 1, 1, 1, 1), (3, 2, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 1, 1).$$

Другие реализуемые пары равны с точностью до перестановок парам двух последовательностей равной длины из приведенного списка.

2.2. (а) Предположим, что криволинейные сферы S, T реализуют пару $(\vec{x}, \vec{y})$. Вспомним определение графа $G = G(S, S \cap T)$ из параграфа 1. Количество его вершин равно n . Из k -ой исходит x_k ребер. Поэтому количество ребер равно $(x_1 + \dots + x_n)/2$. Очевидно, что G связан. По теореме Жордана о кривой⁵ G делится любым своим ребром на несколько частей. Значит G — дерево. Поэтому число ребер равно $n - 1 = (x_1 + \dots + x_n)/2$. Аналогично $n - 1 = (y_1 + \dots + y_n)/2$.

Набросок альтернативного решения (а) Т. Новика. Индукция по числу окружностей. Утверждение верно для одной окружности (на каждой сфере только 2 диска, значит $n = 2$). Каждая следующая окружность делит одну из связных компонент на две части, и добавляет к ним по одной граничной окружности.

(б) Очевидно, G связан. По теореме Жордана о кривой G разделяется любым ребром. Значит, G — дерево.

2.3. Если количество единиц равно s , то $2n - 2 = x_1 + \dots + x_n \geq x_1 + 2(n - 1 - s) + s = 2n - 2 + x_1 - s$. Значит, $s \geq x_1$.

2.4. Пусть S — единичный куб. Рассмотрим семейство M окружностей на S , 'реализующее' $\vec{x}$. (Существование такого семейства доказывается индукцией. При переходе используется удаление висячей вершины.) Покрасим в черный и белый цвета дополнение в S к этим окружностям

⁵**Теорема Жордана о кривой.** Окружность на сфере делит сферу ровно на две части. Две точки сферы, не лежащие на этой окружности, лежат в одной части тогда и только тогда, когда их можно соединить некоторой сферической ломаной, не пересекающей окружности.

так, что соседние компоненты будут разного цвета. Рассмотрим близкую к S криволинейную сферу T такую, что $S \cap T = M$, каждая черная компонента T лежит внутри S , и каждая белая компонента T лежит снаружи S . Тогда S и T реализуют $(\vec{x}, \vec{x})$.

2.5. Согласно задаче 2.3 $x_1 \leq s$. Тогда

$$x_{n-y_1+1} = x_{n-y_1+2} = \dots = x_{n-y_1+1} = \dots = x_n = y_{n-y_1+1} = y_{n-y_1+2} = \dots = y_n = 1.$$

$$\text{Следовательно } \left(\sum_{i=1}^{n-y_1+1} x_i \right) - y_1 + 1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - y_1 + 1 - (y_1 - 1) = 2(n - y_1 + 1) - 2$$

$$\text{и } \left(\sum_{i=2}^{n-y_1+2} y_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - y_1 - (y_1 - 2) = 2(n - y_1 + 1) - 2.$$

Значит новые последовательности деревянные.

2.6. *Ответ:* любая пара.

(а) Индукция по n . База индукции при $n = 2$ очевидна. Предположим, утверждение верно для всех $n < k$, докажем его для $n = k$.

Если последовательности $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$ и $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ получаются друг из друга перестановками, то пара $(\vec{u}, \vec{v})$ реализуема по задаче 2.4. Если последовательности $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$ и $\vec{v} = (v_1, \dots, v_k)$ не получаются друг из друга перестановками, можно так переупорядочить последовательности, что $u_1 \neq v_1$ и все единицы находятся в концах последовательностей. Без ограничения общности $u_1 < v_1$. Обозначим

$$a := u_1, \quad n := k - u_1 + 1, \quad x_i = u_{i+1} \text{ для } i = 1, \dots, n, \quad y_1 := v_1 - u_1 + 1, \quad y_i = v_i \text{ для } i = 2, \dots, n.$$

Согласно задаче 2.3 $u_i = 1$ для всех $i \geq n + 2$ и $v_i = 1$ для всех $i \geq n + 1$. Поэтому пара $(\vec{u}, \vec{v})$ получается из пары $(\vec{x}, \vec{y})$ применением данного в задаче преобразования. Имеем

$$x_1 + \dots + x_n = u_2 + \dots + u_{n+1} = 2k - 2 - u_1 - (u_1 - 2) = 2n - 2 \quad \text{и}$$

$$y_1 + \dots + y_n = v_1 + \dots + v_n - (u_1 - 1) = 2k - 2 - (u_1 - 1) - (u_1 - 1) = 2n - 2.$$

Значит последовательности $\vec{x}$ и $\vec{y}$ деревянные. Из $u_1 > 1$ имеем $n < k$. Шаг индукции доказан.

(b) Индукция по n .

3.1. (а) Следует из задач 1.1 и 1.3.

(b) Да, см. рис. 16. Альтернативная конструкция. Пусть S и T' — криволинейные сферы с рисунка 5. Пусть T'' — сфера внутри T' ‘близкая и параллельная’ T' . Возьмем компоненту связности X дополнения $\mathbb{R}^3 - S - T'$ лежащую внутри T' , такую что ее граница содержит связную компоненту $T' - S$, являющуюся диском. Пусть T — криволинейная сфера, полученная путем соединения T' и T'' тонкой трубкой в X . Тогда S и T будут требуемыми.

(c) Нет. Этот факт получен с помощью компьютерной программы, основанной на решении задачи 4.5.

(d) Контрпример изображен на рис. 17. Подсказка: используйте задачу 3.5 (или задачу 3.4 в форме 4.7 ниже).

3.2. (а) *Ответ:* Все наборы. *Подсказка.* Возьмем n непересекающихся сфер, пересекающих данную сферу S по n окружностям данного набора M . Соединим их $n - 1$ непересекающимися трубками внутри S и получим криволинейную сферу T . Проверьте, что T удовлетворяет условию задачи.

(b) *Гипотеза.* Пара из такого графа и дерева реализуема тогда и только тогда, когда это дерево является объединением двух деревьев из n и k ребер, пересекающихся ровно по одному ребру.

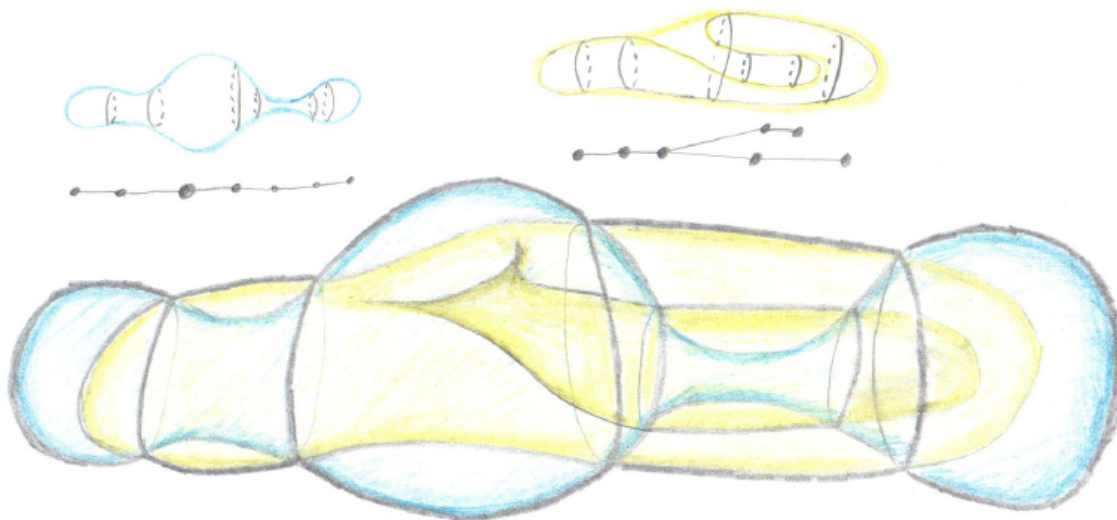


Рис. 16: Криволинейные сферы, реализующие пару с рисунка 10.

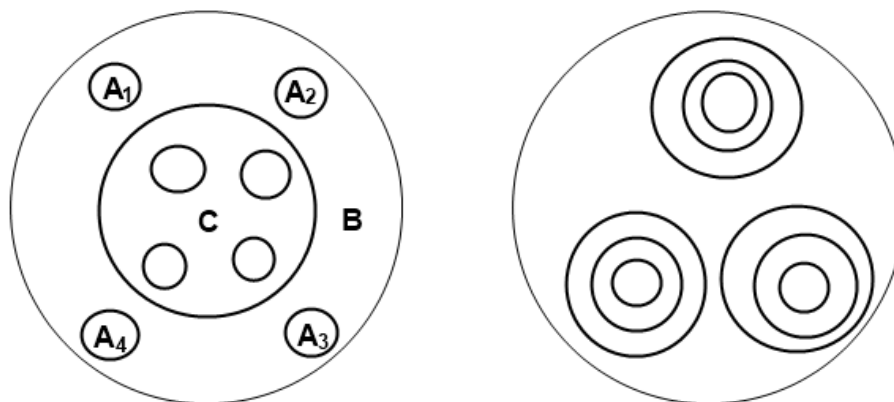


Рис. 17: девять окружностей (жирные), расположенные на сфере (тонкая) двумя разными способами (слева, справа).

(с) *Гипотеза*. Любой набор n окружностей реализуем в паре с набором n ‘параллельных’ окружностей.

3.3. Покрасим связные компоненты, лежащие внутри и вне T , в черный и белый цвета, соответственно.

3.4. (а) и (b) интуитивно очевидны и следуют из (с).

(с) Будем считать, что T — круглая сфера и окружности из ∂Q — круглые окружности, что никакая из них не является большим кругом. Для каждой окружности из ∂Q возьмем сферу, проходящую через эту окружность и центр сферы T . Объединение Q и частей таких сфер, лежащих снаружи T — криволинейная сфера, назовем ее Q' . Эта сфера делит $\mathbb{R}^3$ на две компоненты связности. Поскольку Q связно, пересечение обеих компонент связности с внутренностью T связно. Эти компоненты пересекают T по черным и белым частям соответственно. Поскольку P лежит в одной компоненте, то ∂P лежит либо в черной, либо в белой компоненте $T - \partial Q$.

3.5. (а) делается аналогично (b).

(b) Рассмотрим диски $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3} \subset S$, ограниченные окружностями $A_1, A_2, A_3 \subset S$ и не содержащие других окружностей. Без ограничения общности считаем, что внутренности этих дисков лежат внутри T . Тогда внутренности компоненты дополнения $S - M$, ограниченной

$B \cup C$, тоже лежит внутри T (поскольку пересечение $S \cap T$ трансверсально). Эта внутренность лежит в одной из компонент связности дополнения $\mathbb{R}^3 - (T \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3})$. Значит, все 4 окружности объединения $B \cup C$ лежат в одной компоненте связности дополнения $T - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

Заметим, что это частный случай задачи 3.4.с (сравните с задачей 4.6.а).

3.7. (а) См. определение окружностей A_-, A_0, A_+ на рисунке 18. Семейство $\{A_0\}$ лежит по одну сторону от семейства $\{A_+, A_-\}$, но не наоборот.

(b) Нет.

Некоторые новые задачи по проблеме соседственных последовательностей.

Пара $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ последовательностей положительных целых чисел называется *сильно реализуемой*, если существуют две такие криволинейные сферы S, T , что

(1) их пересечение состоит из $n - 1$ окружностей и делит

- S на n связных компонент, которые можно занумеровать так, что у i -ой связной компоненты x_i соседей в S , границей

- T на n связных компонент, которые можно занумеровать так, что у i -ой связной компоненты y_i соседей в T ;

(2) в $S \cap T$ существует окружность, являющаяся границей некоторых диска и компоненты с x_1 соседями в $S - T$, а также границей некоторых диска и компоненты с y_1 соседями в $T - S$.

Пара (S, T) криволинейных сфер называется *сильной реализацией* пары $(\vec{x}, \vec{y})$.

4.1. Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ — деревянные последовательности, у которых все единицы находятся в конце. Если пара последовательностей $\vec{x}' := (x_1 - y_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_{n-y_1+1}), \vec{y}' := (y_2, y_3, \dots, y_{n-y_1+2})$ сильно реализуема, то и пара $(\vec{x}, \vec{y})$ тоже.

4.2. Если пара $(\vec{x}, \vec{y})$ сильно реализуема, то для любого целого положительного a пары $(\vec{x}', \vec{y}')$ сильно реализуемы для

(а) $\vec{x}' = (a, x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots, 1), \vec{y}' = (y_1 + a - 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1, 1, \dots, 1)$ (в $\vec{y}'$ $a - 1$ новых единиц, в $\vec{x}'$ их $a - 2$; здесь a может быть различно для различных замен: $((1, 1), (1, 1)) \xrightarrow{a=3} ((3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1)) \xrightarrow{a=4} ((4, 3, 1, 1, 1, 1, 1), (6, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$).

(b) какого-либо выбора $\vec{x}' \in \{(1, x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n), (x_1 + 1, x_2, x_3, \dots, x_n, 1)\}$ и $\vec{y}' \in \{(1, y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n), (y_1 + 1, y_2, y_3, \dots, y_n, 1)\}$.

4.3. Пара последовательностей сильно реализуема тогда и только тогда, когда обе последовательности деревянные.

Некоторые новые задачи по проблеме Ландо.

4.4. Каждая пара объединений из

(5) 5; (6) 6;

непересекающихся окружностей, реализуема.

Проблема Ландо решается с помощью ее *занумерованного*, или *раскрашенного*, аналога. Дадим определения, необходимые для его формулировки.

В этом пункте M и N — два объединения непересекающихся окружностей на сферах S и T , соответственно, причем в каждом объединении окружности занумерованы числами $1, 2, \dots, n$.

Пара (M, N) называется *реализуемой*, если существуют

(1) две криволинейные сферы S' и T' , трансверсально пересекающиеся по конечному набору $S' \cap T'$ непересекающихся окружностей, и

(2) нумерация этих окружностей, для которой

- $S' \cap T'$ на сфере S' и M на сфере S занумерованно одинаковы;

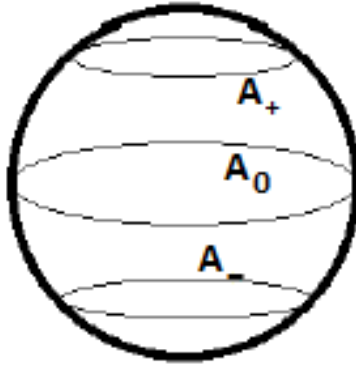


Рис. 18: К примеру

- $S' \cap T'$ на сфере T' и N на сфере T занумерованно одинаковы.

(Вы, по-видимому, сможете решить все задачи, не используя следующего строгого определения занумерованноодинаковости. Занумерованные наборы M на криволинейной сфере S и N на криволинейной сфере T называются *занумерованно одинаковыми*, если существует взаимно однозначное соответствие между связными компонентами дополнений $S - M$ и $T - N$, при котором две связные компоненты дополнения $S - M$ граничат по окружности из M тогда и только тогда, когда две соответствующие компоненты дополнения $T - N$ граничат по соответствующей окружности из N .)

Пример. На единичной сфере (или на поверхности Земли) возьмем экватор $A_0 = A_2$, параллель $A_+ = A_1$ шестидесяти градусов северной широты, параллель $A_- = A_3$ шестидесяти градусов южной широты. См. рисунок 18. Тогда

- незанумерованные (или неупорядоченные) наборы $\{A_-, A_0, A_+\}$ и $\{A_0, A_-, A_+\}$ одинаковы.
- занумерованные (или упорядоченные) наборы (A_-, A_0, A_+) и (A_+, A_0, A_-) занумерованно одинаковы.
- занумерованные наборы (A_-, A_0, A_+) и (A_0, A_-, A_+) не являются занумерованно одинаковыми.
- пара занумерованных наборов (A_-, A_0, A_+) и (A_0, A_-, A_+) не реализуема.

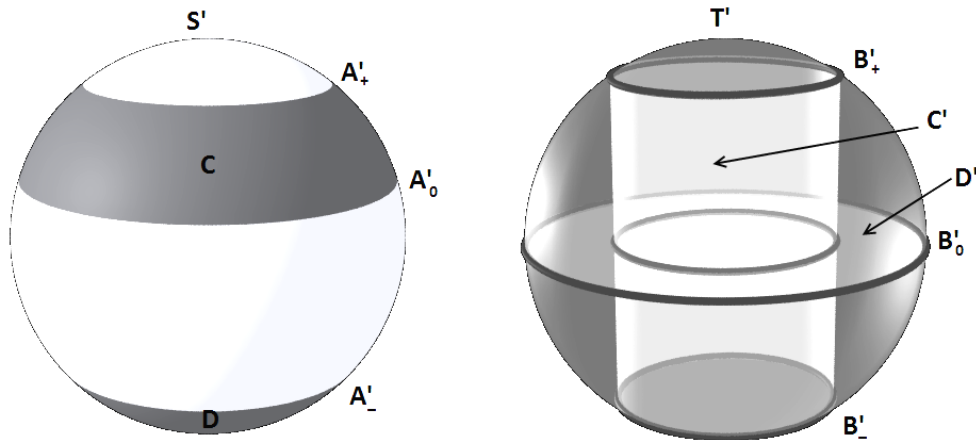


Рис. 19: Расташенные криволинейные сферы S' и T'

Доказательство последнего утверждения. Пусть, напротив, существуют криволинейные сферы S' и T' , реализующие эту пару. Обозначим через

- B_k копию окружности A_k на копии T сферы S ;

- A'_k окружность на криволинейной сфере S' соответствующую A_k ;
- B'_k окружность на криволинейной сфере T' соответствующую B_k ;
- $D' \subset S'$ диск в $S' - T'$ ограниченный A'_+ ;
- $C' \subset S'$ цилиндр в $S' - T'$ ограниченный A'_0 и A'_- .

Поскольку S' и T' реализуют пару $(A_+, A_0, A_-), (B_0, B_+, B_-)$, получаем $A'_+ = B'_0$, $A'_0 = B'_+$ и $A'_- = B'_-$.

Ясно, что C' и D' лежат в трехмерном пространстве по одну сторону от криволинейной сферы T' . (Сравните с задачей 3.3.) Имеем $\partial D = A'_+ = B'_0$. Граница $\partial C' = A'_0 \sqcup A'_- = B'_+ \sqcup B'_-$ не лежит в одной компоненте дополнения $T' - \partial D' = T' - B'_0$. Это противоречит утверждению задачи 3.4.а для $P = C'$ и $Q = D'$. QED

4.5. Занумерованная проблема Ландо. Какие пары занумерованных наборов на сферах реализуемы?

4.6. (а) Если пара (M, N) занумерованных наборов на сферах S и T реализуема, то связные компоненты дополнения $S - M$ можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных компонент P и Q дополнения $S - M$ поднаборы в T , соответствующие ∂P и ∂Q , не зацеплены.

(b) Верно ли обратное к (а) утверждение?

Пусть p и q два подмножества множества ребер некоторого дерева. Множество p *лежит по одну сторону* (в этом дереве) от q , если $p \cap q = \emptyset$, и для любых двух концов ребер из p соединяющий их путь в дереве содержит четное число ребер из q . Наборы p и q *не зацеплены* (в этом дереве) если p лежит по одну сторону от q и q лежит по одну сторону от p .

Для вершины P графа обозначим через δP множество выходящих из P ребер.

Графы $G(S, M)$ и $G(T, N)$ определены в §1. Нумерация окружностей в M и окружностей в N задает нумерацию ребер в $G(S, M)$ и в $G(T, N)$.

4.7. (а) Если пара (M, N) занумерованных наборов на сферах S и T реализуема, то вершины графа $G(S, M)$ можно так покрасить в черный и белый цвета, что для любых двух одноцветных вершин P, Q графа $G(S, M)$ наборы ребер в $G(T, N)$, соответствующие δP и δQ , не зацеплены в $G(T, N)$.

(b)* Даны два дерева G и G' с одинаковым количеством ребер. Существует ли полиномиальный алгоритм для проверки наличия таких нумераций их ребер, при которой вершины графа G можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных вершин P, Q графа G наборы ребер в G' , соответствующие δP и δQ , не зацеплены в G' ?

5 Больше сфер и сферы с ручками

Пусть n_1, n_2, n_3 — положительные целые числа. Тройка

$$\vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}), \quad \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}), \quad \vec{x}_3 = (x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3})$$

последовательностей положительных целых чисел называется *реализуемой*, если существуют три криволинейных сферы S_1, S_2, S_3 в трехмерном пространстве, пересекающиеся попарно по окружностям так, что $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$ и для всех $k = 1, 2, 3$ дополнение $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$ имеет n_k связных компонент, которые можно пронумеровать так, что у i -ой связной компоненты x_{ki} соседей в S_k для всех $i = 1, \dots, n_k$.

В этом параграфе (и в соответствующих решениях) индексы $k, k+1, k+2$ рассматриваются по модулю 3.

Тройка (S_1, S_2, S_3) криволинейных сфер называется *реализацией* тройки $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

5.1. Проблема троек соседственных последовательностей. Какие тройки деревянных последовательностей реализуемы?

5.2. Какие тройки деревянных последовательностей, в каждой из которых не более четырех чисел, реализуемы?

5.3. Если тройка последовательностей длин n_1, n_2, n_3 , реализуема, то

(а) $n_1 + n_2 + n_3$ нечетно;

(б) $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$ для всех $k = 1, 2, 3$.

5.4. Пусть $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ — деревянная последовательность, а p и q — такие положительные целые числа, что $p \geq q > 1$ и $p + q = n + 1$. Тогда существуют две такие деревянные последовательности $a_1, a_2, \dots, a_p$ и $b_1, b_2, \dots, b_q$, что $a_1 + b_1 = x_1$, и упорядоченные наборы $(a_2, a_3, \dots, a_p, b_2, b_3, \dots, b_q)$ и $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ одинаковы с точностью до перестановки.

Каковы аналоги характеристик соседственных последовательностей (теорем 1 и 2) для пересечения *более, чем трех* многогранников?

5.5. * Гипотеза. Заданы натуральные числа $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ и s последовательностей

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad \dots, \quad x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{sn_s}$$

натуральных чисел. Тогда существуют s криволинейных сфер $S_1, S_2, \dots, S_k$ в трехмерном пространстве, попарно пересекающихся по окружностям и таких, что

- никакие три из них не пересекаются в одной точке;

- для каждого $k = 1, \dots, s$ и $j = 1, \dots, n_k$ дополнение $S_k - S_{k+1} - S_{k+2} - \dots - S_{k+s-1}$ имеет n_k компонент связности, j -тая из которых имеет x_{kj} соседей в S_k

тогда и только тогда когда все s последовательностей деревянные, и $n_1 + n_2 + \dots + n_s - s$ есть четное число, не меньшее $2n_k$ для каждого $k = 1, \dots, s$.

Для $s < 4$ эта гипотеза доказана (см. Теоремы 1 и 2), первый нетривиальный случай — $s = 4$.

Какими могут быть наборы количеств соседей у компонент, если разрешить тройные пересечения криволинейных сфер?

5.6. * Гипотеза. Пусть n_1, n_2, n_3 — положительные целые числа, и

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3}$$

— последовательности положительных целых чисел. Тогда существование криволинейных сфер S_1, S_2, S_3 ,

- попарно пересекающихся по окружностям,

- имеющих $2T$ точек пересечения всех трех сфер и

- таких, что для каждого $k = 1, 2, 3$ дополнение $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$ имеет n_k связных компонент, у i -ой из которых x_{ki} соседей в S_k для каждого $i = 1, \dots, k$

равносильно тому, что $n_1 + n_2 + n_3 + T$ нечетно, $x_{k1} + x_{k2} + \dots + x_{kn_k} = 2n_k - 2 + 2T$ и $n_k + T < n_{k+1} + n_{k+2}$ для каждого $k = 1, 2, 3$.

Каковы аналоги теорем 1 и 2 для пересечения криволинейных сфер с ручками?

5.7. * Гипотеза. Заданы целые числа $g_1, g_2, n > 0$ и две последовательности

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$$

натуральных чисел. Существуют криволинейные сфера с g_1 ручками S_1 и сфера с g_2 ручками S_2 в трехмерном пространстве, пересекающиеся по окружностям, разбивающим S_k на n компонент связности, j -тая из которых имеет x_{kj} соседей в S_k для каждого $k = 1, 2$ и $j = 1, \dots, n$

тогда и только тогда когда $s := x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}$ чётно и $2n - 2 \leq s \leq 2n - 2 + 2g_k$ для каждого $k = 1, 2$.

Было бы интересно решить аналогичные проблемы при наличии самопересечений. Интересны оба варианта — с точками троекратного самопересечения или без.

КАК ПЕРЕСЕКАЮТСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СФЕРЫ, ИЛИ ДВУМЕРНЫЕ МЕАНДРЫ

С. Аввакумов, А. Бердников, А. Рухович и А. Скопенков

6 Финиш. Решения.

В этом параграфе криволинейные сферы называются просто *сферами*.

Проблема соседственных последовательностей

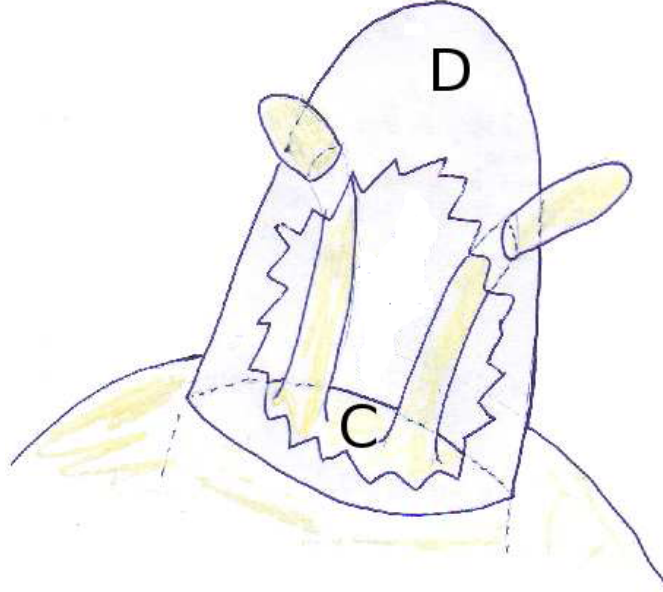


Рис. 20: Индуктивное построение

4.1. Можно считать, что $x_1 \geq y_1$. Рассмотрим сферы S', T' , реализующие пару $(\vec{x}', \vec{y}')$ последовательностей. Рассмотрим окружность в пересечении $T' \cap S'$, из условия (2) в определении сильной реализуемости. Это окружность, ограничивающая

- в $S' - T'$ связную компоненту, назовем ее C , у которой $x_1 - y_1 + 1$ соседей,
- в $T' - S'$ — диск, назовем его D .

Изменим сферы S', T' соединением компонент C и D при помощи $y_1 - 1$ ‘пальцев’, см. рис. 20. Новые сферы обозначим через S, T . Докажем, что они реализуют пару $(\vec{x}, \vec{y})$ последовательностей.

Условие (1) выполнено для S, T , поскольку

- каждая компонента $S' - T'$, кроме C , также является и компонентой дополнения $S - T$,
- C делится $y_1 - 1$ окружностями из $(S \cap T) - (S' \cap T')$ на $y_1 - 1$ дисков и компоненту с $(x_1 - y_1 + 1) + (y_1 - 1) = x_1$ соседями,

и

- каждая компонента дополнения $T' - S'$, кроме D , также является и компонентой дополнения $T - S$,
- D разделено $y_1 - 1$ окружностями на $y_1 - 1$ дисков и компоненту с y_1 соседями.

Любая окружность из $(S \cap T) - (S' \cap T')$ удовлетворяет условию (2).

4.3. Доказательство теоремы 1'. Докажем индукцией по длине n последовательности. Для любой деревянной последовательности из n чисел имеем $n \geq 2$. База индукции ($n = 2$) очевидна.

Докажем шаг индукции. Пусть теорема 1' доказана для $2, 3, \dots, n-1 \geq 2$. Докажем ее для n .

Переставим единицы в последовательностях в конец. Согласно задачам 2.5 и 4.1, по предположению индукции новые последовательности реализуемы. Рассмотрим сферы S, T , их реализующие. Сферы S, T удовлетворяют условию (1) из определения сильной реализуемости для старых последовательностей. Также

- если $x_1 \neq 1$, то условия (2) для старой и новой последовательностей $\vec{x}$ эквивалентны;
- если $x_1 = 1$, то окружность из условия (2) для новой последовательности $\vec{x}$ ограничивает диск, т.е. компоненту с $x_1 = 1$ соседом.

Это выполнено и с заменой $\vec{x}$ на $\vec{y}$. Итак, условие (2) выполнено для старых последовательностей. Значит, S, T сильно реализуют старые последовательности.

Проблема Ландо.

3.1. (d) (прямое решение) Пусть, напротив, существуют сферы S' и T' , реализующие пару с рисунка 12. Обозначим связные компоненты дополнения $S' - T'$ как на рис. 17 слева.

Рассмотрим диски $A_1, \dots, A_4 \subset S'$. Без ограничения общности предположим, что их внутренности лежат внутри T' . Тогда внутренность компоненты $C \subset S'$ также лежит внутри T' (так как пересечение $S' \cap T'$ трансверсально). Так как $C, A_1, \dots, A_4$ не пересекаются, то C целиком лежит в одной связной компоненте дополнения $\mathbb{R}^3 - T' \cup \bigcup A_i$. Таким образом, все 5 окружностей границы ∂C лежат в одной связной компоненте дополнения $T' - \bigcup \partial A_i$. (Здесь мы используем тривиальный частный случай теоремы о продолжении вложения.)

Переформулируем предыдущее утверждение в терминах графа $G(T')$ (рис. 21). Обозначим за $G(C)$ объединение 5-и ребер графа $G(T')$, соответствующих окружностям границы ∂C . Тогда $G(C)$ целиком лежит в одной связной компоненте дополнения в $G(T')$ к 4-ем ребрам, соответствующим окружностям границы ∂A_i . Так как у $G(T')$ только 9 ребер, это значит, что $G(C)$ — поддереву $G(T')$. Обозначим через $G(B)$ объединение 5-и ребер графа $G(T')$, соответствующих окружностям границы ∂B . Аналогично, $G(B)$ — поддереву $G(T')$.

Так как $G(B) \cup G(C) = G(T')$, то хотя бы два из трех ребер a, b, c графа $G(T')$ (рис. 21) лежат в одном из поддеревьев $G(B)$ или $G(C)$. Без ограничения общности $a, b \in G(B)$. Но в любом поддереве $G(T')$, содержащем и a , и b хотя бы 6 ребер, в то время как в $G(B)$ лишь 5 ребер. Значит, исходное предположение противоречиво и неверно.

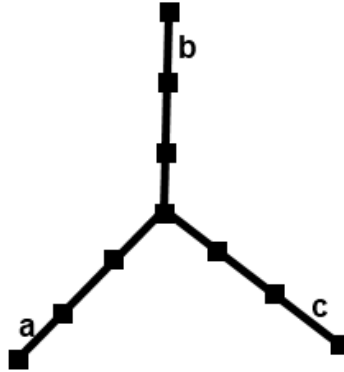


Рис. 21: Граф $G := G(T', N)$.

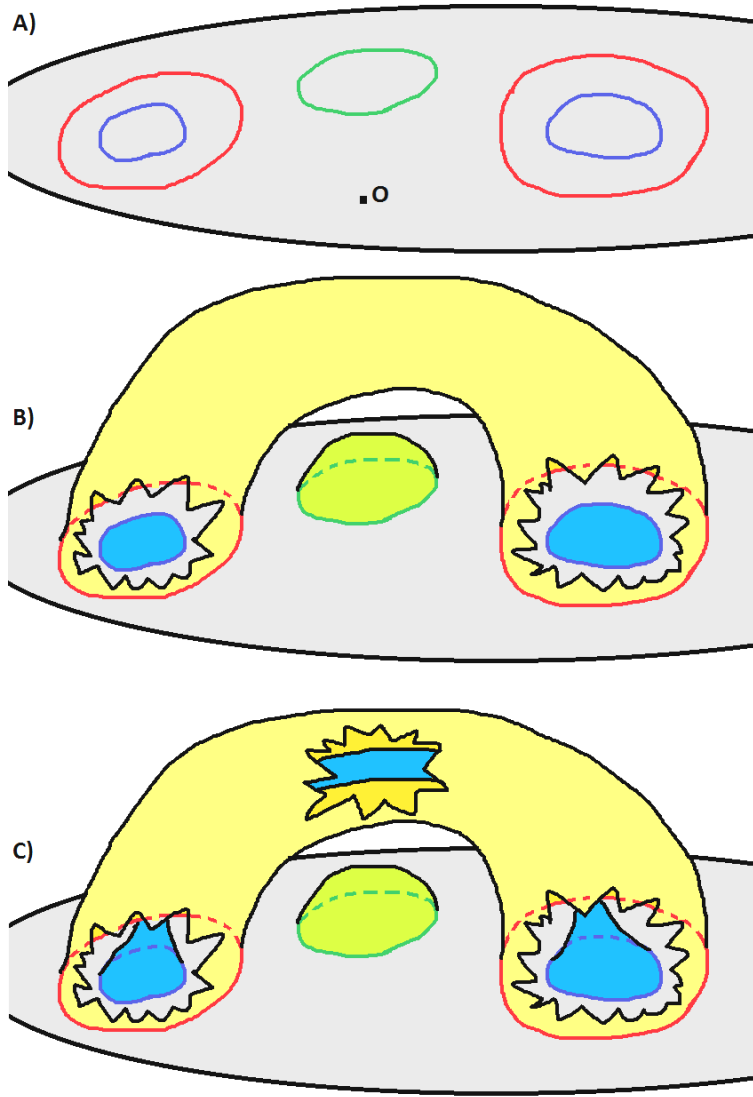


Рис. 22: К решению задачи 3.6.f. (А) Имеем S (серая), p_1 (красное), p_2 (зеленое), p_3 (синее). (В) Имеем, что $\dot{p}_3$ (синее) — ‘наименьшее’. Построим P_1 (желтое) и P_2 (зеленое) по индукции. (С) Связные компоненты $\dot{p}_3$ (синее) можно соединить путем, не пересекающимся с $P_1 \cup P_2$. Тогда соединим их трубкой и получим P_3 (синее).

3.6. (а) Очевидно.

(b) Это равносильно тому, что окружности q_1 и q_2 лежат по одну сторону от p .

(с) Это равносильно тому, что $p_1 \sqcup p_2$ и $q_1 \sqcup q_2$ не зацеплены.

(d) Это равносильно тому, что p и q не зацеплены. *Подсказка:* обобщите решение задачи 3.1.d. Формальное решение получается подстановкой $m = 2$ в решение для (f).

(e) Нет, согласно ответу на (f).

(f) Это равносильно тому, что p_i и p_j не зацеплены для любых $i \neq j$.

Теорема о продолжении вложения. *Наборы $p_1, \dots, p_m$ непересекающихся окружностей в единичной сфере S попарно не зацеплены в том и только том случае, когда существуют непересекающиеся сферы с дырками $P_1, \dots, P_m$, чьи внутренности лежат внутри S , и для которых $\partial P_i = p_i$ для всех $i = 1, \dots, m$.*

Доказательство. Необходимость легко следует из задачи 3.4.c. Достаточность докажем индукцией по m . База $m = 1$ по сути доказана при решении задачи 3.2.a. Докажем шаг индукции.

Возьмем точку $O \in S - \bigsqcup_{i=1, \dots, m} p_i$. Для каждого i рассмотрим черно-белую раскраску дополнения $S - p_i$, при которой O белая. Напомним, что $\dot{p}_i$ — объединение черных компонент дополнения $S - p_i$. Раз O белая, а p_i и p_j не зацеплены, по задаче 3.7.b для всех $i \neq j$ или $\dot{p}_i \subset \dot{p}_j$, или $\dot{p}_j \subset \dot{p}_i$, или $\dot{p}_i \cap \dot{p}_j = \emptyset$. Значит, есть ‘наименьшее’ $\dot{p}_i$, то есть, такое $\dot{p}_i$, что $\dot{p}_j \not\subset \dot{p}_i$ для всех $j \neq i$. Можно положить $i = m$. Тогда $\dot{p}_m \cap \bigsqcup_{i=1}^{m-1} p_i = \emptyset$, $\dot{p}_m$ — набор сфер с дырками, $\partial \dot{p}_m = p_m$ и $\dot{p}_m \subset S$. Обозначим через Δ замкнутый шар, ограничиваемый S (то есть, ‘внутреннюю часть’ сферы S). По индукционному предположению существуют непересекающиеся сферы с дырками $P_1, \dots, P_{m-1} \subset \Delta$, такие что $\partial P_i = p_i$ для всех $i = 1, \dots, m-1$.

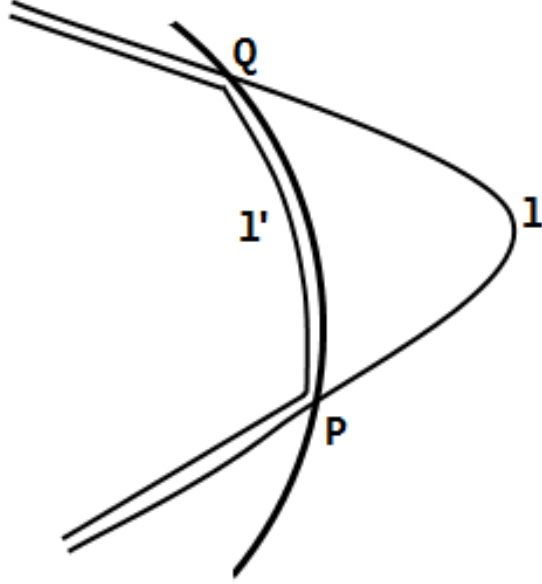


Рис. 23: Доказательство утверждения

Утверждение. Набор p_m лежит в одной связной компоненте дополнения $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$.⁶

Доказательство утверждения. Предположим противное. Рассмотрим любые две точки $A, B \in p_m$ из разных связных компонент дополнения $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$. Обозначим через l путь внутри S , соединяющий A и B , и при этом $\bar{l} := \#(l \cap \bigsqcup_{i=1}^{m-1} P_i)$ минимально (минимум по всем таким l , объекты $A, B, p_m, S, P_1, \dots, P_{m-1}$ фиксированы). Тогда $\bar{l} > 0$ (иначе A и B лежали бы в разных компонентах). Так как p_m лежит по одну сторону от ∂P_i , точки A и B лежат в одной компоненте $\Delta - P_i$, и $\#(l \cap P_i)$ четно для всех i . (Если $m = 2$, можно даже получить $\#(l \cap P_1) = 0$ и остановиться.) Тогда $\#(l \cap P_i) \geq 2$ для некоторого i . Обозначим через Q и R последовательные (на l) точки $l \cap P_i$. Обозначим через Q' точку l чуть перед Q и за R' точку l чуть после R . Так как P_i связно, Q и R можно соединить путем P_i . Значит Q' и R' можно соединить путем l' , достаточно близким к P_i , но не пересекающим P_i . Путь l' не пересекает ничего из $P_1, \dots, P_{m-1}$, так как он достаточно близок к P_i , а $P_1, \dots, P_{m-1}$ попарно не пересекаются. Заменим часть пути l от Q' до R' на l' . Полученный путь назовем l'' . Теперь $\bar{l}'' = \bar{l} - 2$. Это противоречит минимальности $\bar{l}$. Поэтому l не пересекает $P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1}$, значит A и B должны лежать в одной связной компоненте дополнения $\Delta - (P_1 \sqcup \dots \sqcup P_{m-1})$. ЧТД.

⁶Для $m = 2$ это утверждение — почти определение незацепленности (точнее, того, что ‘ p_2 лежит по одну сторону от ∂P_1 ’). Случай $m \geq 3$ интересней, ведь объединение двух подмножеств, вообще говоря, может разбить само множество, даже если каждое из этих подмножеств поодиночке исходное множество не разбивало.

Завершение доказательства теоремы о продолжении вложения. Пусть $\dot{p}'_m$ — объединение непересекающихся сфер с дырками, полученных из $\dot{p}_m$ небольшой деформацией, после которой внутренность $\dot{p}'_m$ попадает в Δ и $\partial\dot{p}'_m = \partial\dot{p}_m = p_m$. Согласно Утверждению, любые две точки $\dot{p}'_m$ можно соединить путем внутри S , не пересекающим $P_1, \dots, P_{m-1}$. Тогда можно соединить все связные компоненты множества $\dot{p}'_m$ трубками внутри S , не пересекающими $P_1, \dots, P_{m-1}$. Количество трубок будет на 1 меньше количества компонент связности $\dot{p}'_m$, значит, не будет ‘циклов из трубок’. Значит, мы получили сферу с дырками. Обозначим ее через P_m . Имеем $\partial P_m = p_m$, $P_m \subset \Delta$, и P_m не пересекается с $P_1, \dots, P_{m-1}$. Шаг индукции доказан. ЧТД.

4.4. Этот факт получен с использованием компьютерной программы, основанной на теореме 3.

4.5. Ответ дается задачей 4.6, и он таков.

Теорема 3. *Пара (M, N) занумерованных наборов на сферах S и T реализуема тогда и только тогда, когда связные компоненты дополнения $S - M$ можно покрасить в черный и белый цвета так, что для любых двух одноцветных компонент P и Q дополнения $S - M$ поднаборы в N , соответствующие ∂P и ∂Q , не зацеплены.*

4.6. (a) Это переформулировка задачи 3.4.

(b) Да. Идея решения — доказать и использовать ответ к проблеме продолжения вложения 3.6.e.

Пусть T' — единичный куб. Нумерации дают взаимно-однозначное соответствие h между окружностями из M и окружностями из N .

Обозначим через $A_1, \dots, A_m$ белые связные компоненты дополнения $S - M$. По предположению $h(\partial A_1), \dots, h(\partial A_m)$ попарно не зацеплены в T . Согласно ответу к проблеме продолжения вложения 3.6.e существуют непересекающиеся криволинейные сферы с дырками $A'_1, \dots, A'_m$, внутренности которых лежат *внутри* T' , и такие, что $\partial A'_i = h(\partial A_i)$ для всех $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через $B_1, \dots, B_n$ черные связные компоненты дополнения $S - M$. Аналогично существуют непересекающиеся сферы с дырками $B'_1, \dots, B'_n$, внутренности которых лежат *снаружи* T' , и такие, что $\partial B'_i = h(\partial B_i)$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть $S' := (A'_1 \cup \dots \cup A'_m) \cup (B'_1 \cup \dots \cup B'_n)$. Из построения следует, что S' несамопересекающаяся. У A'_i такое же число дырок, как и у A_i , и у B'_i такое же число дырок, как и у B_i . Так как $S = (A_1 \cup \dots \cup A_m) \cup (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ — сфера, то и S' тоже. (Строгое доказательство можно получить, воспользовавшись эйлеровой характеристикой.) Очевидно, S' и T' реализуют пару M, N .

4.7. (a) Это — переформулировка задач 3.4 и 4.6.

Больше сфер и сферы с ручками

5.1. Теорема 2. *Пускай n_1, n_2, n_3 — положительные целые числа, а*

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}, \quad x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}, \quad x_{31}, x_{32}, \dots, x_{3n_3}$$

— последовательности положительных целых чисел. Тогда существуют криволинейные сферы S_1, S_2, S_3 в трехмерном пространстве, пересекающиеся попарно по окружностям и такие, что

- $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$;

- У $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$ n_k связных компонент, которые можно так пронумеровать, что у i -ой компоненты x_{ki} соседей в S_k , для всех $k = 1, 2, 3$

если и только если последовательности деревянные, $n_1 + n_2 + n_3$ нечетно, и $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$ для всех $k = 1, 2, 3$.

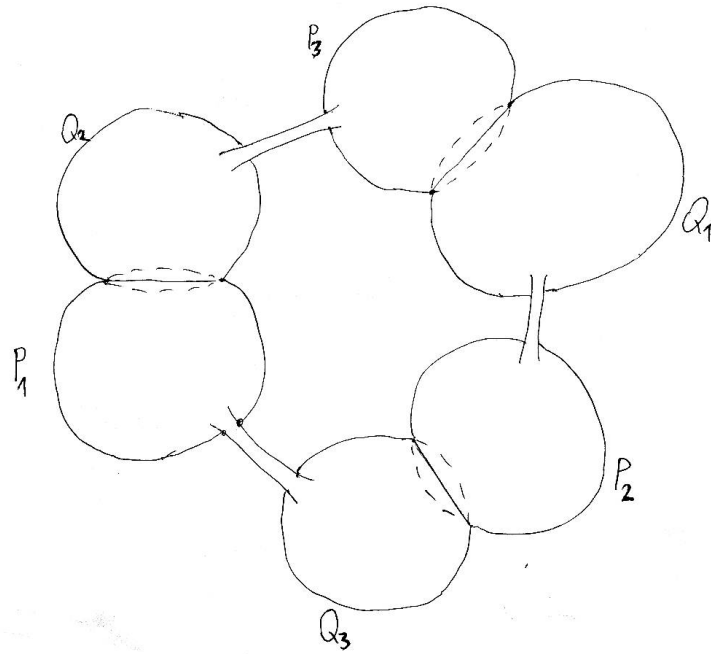


Рис. 24: Конструкция из трех сфер

Доказательство. Часть ‘только тогда’ следует из задач 2.2 и 5.3. Докажем часть ‘тогда’. Пусть

$$m_1 := (n_2 + n_3 - n_1 + 1)/2, \quad m_2 := (n_1 + n_3 - n_2 + 1)/2, \quad m_3 := (n_1 + n_2 - n_3 + 1)/2.$$

Тогда

$$m_1 + m_2 = n_3 + 1, \quad m_1 + m_3 = n_2 + 1, \quad m_2 + m_3 = n_1 + 1.$$

Согласно задаче 5.4 существуют последовательности

$$p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_3}, \quad p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_1}, \quad p_{31}, p_{32}, \dots, p_{3m_2},$$

$$q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1m_2}, \quad q_{21}, q_{23}, \dots, q_{2m_3}, \quad q_{31}, q_{32}, \dots, q_{3m_1},$$

такие что $p_{k-1,1} + q_{k+1,1} = x_{k1}$ и упорядоченные множества

$$(p_{k-1,2}, p_{k-1,3}, \dots, p_{k-1,m_{k+1}}, q_{k+1,2}, q_{k+1,3}, \dots, q_{k+1,m_{k-1}}) \quad \text{и} \quad (x_{k2}, x_{k3}, \dots, x_{kn_k})$$

равны с точностью до перестановки. По теореме 1' существуют сферы

$$Q_1, P_1, Q_2, P_2, Q_3, P_3 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{такие что} \quad Q_k \cap Q_{k+1} = \emptyset, \quad Q_k \cap P_l = \emptyset \quad \text{если} \quad l \neq k-1 \quad \text{и}$$

- $Q_k - P_{k-1}$ — объединение m_{k+1} непересекающихся связных компонент, у i -ой из которых q_{ki} соседей

- $P_{k-1} - Q_k$ — объединение m_{k+1} непересекающихся связных компонент, у i -ой из которых $p_{k-1,i}$ соседей

- граница некоторой связной компоненты $\mathbb{R}^3 - P_{k-1} - Q_k$ содержит компоненту $\tilde{q}_k$ с q_{k1} соседями в Q_k и компоненту $\tilde{p}_{k-1}$ с $p_{k-1,1}$ соседями в P_{k-1} .

Для $k = 1, 2, 3$ пусть S_k — связная сумма сфер Q_{k+1} и P_{k-1} и тонкой трубки, соединяющей две компоненты $\tilde{q}_{k+1}$ и $\tilde{p}_{k-1}$ из третьего условия, см. рис. 24. Это можно сделать без пересечений на этих трех трубках.

Тогда $S_k - S_{k+1} - S_{k+2}$ — такое, как и должно быть для каждого $k = 1, 2, 3$. ЧТД.

5.2. *Ответ:* реализуемы только следующие тройки.

$$\begin{aligned} \{(2, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \quad \{(3, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \quad \{(3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \\ \{(3, 1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1)\}, \\ \{(2, 2, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1)\}, \quad \{(2, 1, 1), (1, 1), (1, 1)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Существует только 4 деревянные последовательности длины не более 4:

$$(1, 1), (2, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1).$$

Согласно утверждению задачи 5.3 количество последовательностей нечетной длины в реализуемой тройке нечетно. Значит каждая реализуемая тройка последовательностей длины не более 4, кроме тройки $\{(2, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 1)\}$, состоит из последовательности $(2, 1, 1)$ и двух последовательностей четной длины. По задаче 5.1 все эти 7 троек реализуемы.

5.3. Пусть m_3, m_2, m_1 — количества окружностей в $f_1 \cap f_2$, $f_1 \cap f_3$ и $f_2 \cap f_3$. Тогда $n_1 = m_3 + m_2 + 1$, $n_2 = m_3 + m_1 + 1$, $n_3 = m_2 + m_1 + 1$.

Значит, $n_1 + n_2 + n_3 = 2(m_3 + m_2 + m_1) + 3$ нечетно.

Так как $2m_k + 1 > 0$, то $n_k < n_{k+1} + n_{k+2}$ для всех $k = 1, 2, 3$.

5.4. Пусть $r = r(\vec{x})$ — число членов x_i больших 1. Пусть $z_s = x_2 + x_3 + \dots + x_s$. Для каждого $s \leq r$ положим

$$a_1 = p - (z_s - s + 3) + 1, \quad a_i = x_i \quad \text{для} \quad 2 \leq i \leq s \quad \text{и} \quad a_i = 1 \quad \text{для} \quad s + 1 \leq i \leq p,$$

$$b_1 = x_1 - a_1, \quad b_i = x_{i+s-1} \quad \text{для} \quad 2 \leq i \leq r - s + 1, \quad b_i = 1 \quad \text{для} \quad r - s + 2 \leq i \leq q = n + 1 - p.$$

Так как $s \leq r$, последовательность $b_1, b_2, \dots, b_q$ определена корректно. Для каждого i числа a_i и b_i зависят от s .

Получаем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = p - (z_s - s + 3) + 1 + z_s + p - s = 2p - 2,$$

то есть последовательность $a_1, a_2, \dots, a_p$ деревянная. Также

$$b_1 + b_2 + \dots + b_q = z_n - a_1 - a_2 - \dots - a_p = 2n - 2 - 2p + 2 = 2q - 2,$$

то есть последовательность $b_1, b_2, \dots, b_q$ деревянная.

Осталось доказать существование числа $s \leq r$, при котором $1 \leq a_1 \leq x_1 - 1$. Для каждого $i < r$ имеем $x_1 \geq x_i$, значит

$$z_i - i + x_1 + 1 \geq (z_{i+1} - (i + 1) + 3) - 1.$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} 2 &= z_1 - 1 + 3, \\ z_1 - 1 + x_1 + 1 &\geq (z_2 - 2 + 3) - 1, \\ z_2 - 2 + x_1 + 1 &\geq (z_3 - 3 + 3) - 1, \\ &\dots, \\ z_{r-1} - (r - 1) + x_1 + 1 &\geq (z_r - r + 3) - 1, \\ z_r - r + x_1 + 1 &= n - 1. \end{aligned}$$

Здесь последнее равенство не аналогично предыдущим равенствам, но следует из того, что последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n$ деревянна, и $1 = x_{r+1} = \dots = x_n$. Так как $2 \leq p \leq n - 1$, существует число $s \leq r$, для которого

$$z_s - s + 3 \leq p \leq z_s - s + x_1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq a_1 \leq x_1 - 1.$$

Список литературы.

- [A] S. Arvakumov, *A counterexample to the Lando conjecture on intersection of spheres in 3-space*, preprint, 2012.
- [A12] I. Arzhantsev, V. Bogachev, A. Garber, A. Zaslavsky, V. Protasov and A. Skopenkov, *Students' mathematical olympiades at Moscow State University 2010-2011*, Mat. Prosveschenie, 16 (2012), 214-227.
- [D] Н. П. Долбилин, *Жемчужины теории многогранников*, М.: MCCME, 2000.
- [H10] T. Hirasa, *Dissecting the torus by immersions*, Geometriae Dedicata, 145:1 (2010), 33-41
- [R] A. Rukhovich, *On intersection of two embedded spheres in 3-space*, <http://arxiv.org/abs/1012.0925>
- [T07] T. Nowik, *Dissecting the 2-sphere by immersions*, Geometriae Dedicata 127, (2007), 37-41, <http://arxiv.org/abs/math/0612796>.
- [W] <http://ru.wikipedia.org/wiki/Многогранник>