Московская математическая конференция школьников
ПРОГРАММА заседания 12.12.2021, посвященного памяти Н.Н. Константинова

Время московское. Можно участвовать только в части заседания; как очно, так и дистанционно. Заседание в МЦНМО, в конференцзале 401; буфет в ауд. 404.

Подробнее: `http://www.mccme.ru/mmks`

11.00-11.10. Открытие. Выступление Алексея Александровича Заславского.

11.10-11.35. *Зюбин Константин (дистанционно),* Описание строения группы обратимых центросимметричных двумерных матриц по модулю 2^k (Председатель А.А. Заславский)

11.35-11.55. *Волович Дмитрий,* Интересная функция многочлена (Председатель А.А. Заславский)

11.55-12.10. *Никишин Максим (дистанционно),* Пример нахождения подхода к решению задачи по аналогии с теорией квадратичных вычетов (Председатель Д.В. Прокопенко)

12.10-12.25. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

12.25-12.55. *Лацкович Миклош, Васенов Иван (докладчик; дистанционно),* Разрезания правильных многоугольников на подобные прямоугольные треугольники (Председатель В.В. Буланкина)

12.55-13.15. *Вигдорчик Леонид (дистанционно),* Разрезания правильных многоугольников на подобные прямоугольные треугольники, II (Председатель В.В. Буланкина)

13.15-13.35. *Дмитренко Андрей и Скачкова Маргарита (дистанционно),* Исследование внешнего бильярда вне правильного пятиугольника (Председатель А.Б. Скопенков)

13.35-13.50. Перерыв (чай, кофе, бутерброды)

13.50-14.10. *Пелишенко Михаил,* Точка Микеля четырех прямых общего положения (Председатель Ф.К. Нилов)

14.10-14.25. *Суворов Алексей,* Окружностное пространство и теорема Кези (Председатель Ф.К. Нилов)

14.25-14.50. *Шень Александр Ханиевич (дистанционно)* Игры и их цены

14.50-15.00. Награждение

Решение жюри будет также доступно не позже 13.12 по адресу `https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/jury.pdf`

Аннотации некоторых докладов ММКШ-2021

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

А.Х. Шень, *Игры и их цены.*

Известно (хотя и не совсем очевидно), что в конечной игре с полной информацией и двумя исходами у одного из игроков есть стратегия, гарантирующая ему выигрыш. По аналогичным причинам в случае нескольких исходов можно определить «справедливую цену игры». До какой степени эти утверждения можно обобщать? Что будет для бесконечных игр? Что будет, если игроки ходят не по очереди, а одновременно (и втайне друг от друга)? Что будет, если по ходу игры бросают монеты? Нужно ли, реализовывая выигрышную стратегию, помнить ход игры или достаточно знать текущую позицию? Мы обсудим некоторые из таких вопросов.

ДОКЛАДЫ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Полные тексты см. на `http://www.mccme.ru/mmks/notes.htm`

Номинация научно-исследовательских работ

M. Laczkovich and I. Vasenov, *Tiling of regular polygons with similar right triangles.*

A tiling is a decomposition of a polygon into finitely many non-overlapping triangles. We prove that *if a regular n-gon, $n \neq 4$, is tiled with similar right triangles, then the smaller angle of these triangles is π/n.*

Номинация учебно-исследовательских работ

Вигдорчик Леонид, *Разрезания правильных многоугольников на подобные прямоугольные треугольники, II.*

Пусть имеется замощение правильного n-угольника, конечным количеством подобных прямоугольных треугольников. Доказано, что при $n > 2$, $n \neq 4, 5, 8, 12, 14, 20, 32, 44$, больший острый угол треугольников не равен трети угла при вершине n-угольника, т.е. меньший угол треугольников не равен $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3n}$.

Зюбин Константин, *Описание строения группы обратимых центросимметричных двумерных матриц над $\mathbb{Z}_{2^k}$.*

В системе шифрования с открытым ключом MMMC1, предложенной С. К. Росошеком, для создания ключей шифрования используются обратимые центросимметричные матрицы 2×2 с элементами — вычетами по модулю n. Нетрудно проверить, что группа таких матриц изоморфна мультипликативной группе «дуальных чисел» по модулю n, т.е. группе обратимых многочленов с коэффициентами из $\mathbb{Z}_n$ по модулю многочлена $x^2 - 1$. Основной результат: при $n = 2^k > 2$ каждая из этих изоморфных групп изоморфна прямой сумме $\mathbb{Z}_{2^{k-1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{k-2}} \oplus \mathbb{Z}_2^2$.

Никишин Максим, *Пример нахождения подхода к решению задачи по аналогии с теорией квадратичных вычетов.*

Доказано следующее (финал Всеросса, 2021, 9.7). *Если n делится на k^2 для целых чисел $n > 20$ и $k > 1$, то найдутся целые числа $a, b, c > 0$ такие, что*

$n = ab + bc + ca$. Идея решения заключается в том, что $n = ab + bc + ca = c(a+b) + ab \equiv -a^2 \mod (a+b)$. Так задача сводится к нахождению числа, по модулю которого $-n$ является квадратичным вычетом.

Номинация исследовательских разработок

Волович Дмитрий, *Интересная функция многочлена.*

Интересная функция многочлена — среднее арифметическое всех прообразов при многочлене. В докладе изучается, какие многочлены можно восстановить, зная их интересную функцию.

Дмитренко Андрей, Скачкова Маргарита, *Исследование внешнего бильярда вне правильного пятиугольника.*

Внешние бильярды как динамические системы на плоскости стали активно изучаться в 1970е годы, когда стали возможны компьютерные эксперименты. О внешних бильярдах имеется много открытых вопросов. В частности, хотя внешний бильярд вне правильного пятиугольника изучен достаточно хорошо, его исследование продолжается и по сей день.

Мы рассматриваем *периодические относительно исследуемого отображения орбиты точек* в некоторой области плоскости. Мы вводим кодировку для этих орбит и описываем *множество всех маршрутов* в этой кодировке. Полученный результат является частным случаем теоремы, доказанной в 2015 году N.Bedaride и J.Cassaign. В конце доклада мы коснемся более содержательных продвижений о внешнем бильярде вне правильного пятиугольника.

Пелишенко Михаил. *Точка Микеля четырех прямых общего положения.*

Основной результат — теорема о точке Микеля четырех прямых общего положения.

Предположительно он может быть обобщен до следующего. Для N прямых $l_1, \ldots, l_N$ общего положения индуктивно определим $P(l_1, \ldots, l_N)$ — точку Микеля для четного N и обобщенную окружность (т.е. окружность или прямую) Микеля для нечетного N. Положим $P(l_1) := l_1$. Пусть $N > 1$ и точка Микеля или обобщенная окружность Микеля определена для $N-1$ прямых общего положения. Пусть $l_1, \ldots, l_N$ — прямые общего положения.

Если N нечетно, то N точек Микеля, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием одной из прямых, лежат на одной окружности. Она и называется *обобщенной окружностью Микеля* $P(l_1, \ldots, l_N)$.

Если N четно, то N обобщенных окружностей Микеля, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием одной из прямых, пересекаются в одной точке. Она и называется *точкой Микеля* $P(l_1, \ldots, l_N)$.

Суворов Алексей, *Окружностное пространство и теорема Кези.*

Основной результат — альтернативное доказательство теоремы Кези в одну сторону. Идея — использование *псевдоевклидовой метрики* на трехмерном пространстве (окружностное пространство). Свойства, связанные с окружностями, переписываются в терминах этого пространства. В результате с окружностями можно работать, как с точками.