

## Дискретные гармонические функции

**Определение.** Функция, определённая на решётке  $Z^2$ , называется гармонической, если каждое её значение равно среднему арифметическому четырёх соседних.

### Общие свойства

1. Принцип суперпозиции. Сумма гармонических функций также является гармонической. Произведение гармонической функции на число также является гармонической функцией.
2. Принцип максимума. Если функция гармоническая в ограниченной области, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на границе области.
3. Теорема единственности. Существует не больше одной функции, гармонической в данной ограниченной области с заданными значениями на границе.
4. Контурные свойства. Как выразить значение гармонической функции в точке через её значения на контуре «ромба» с центром в этой точке?

### Теоремы и задачи

1. Если все значения гармонической функции натуральны, то она постоянна.
2. Если все значения гармонической функции положительны чисел, то она постоянна.
3. Если гармоническая функция ограничена, то она постоянна.
4. Простейшие примеры полиномов – гармонических функций:  $xy$ ,  $x^2 - y^2$ . Описать все.
5. Сколько значений однозначно задают гармоническую функцию на плоскости?
6. Теорема существования. Метод релаксации.
7. Метод релаксации для неограниченных областей. Будет ли при каких-то условиях сходиться функция на конечном участке?

### Обобщения

1. Берём среднее с весом.
2. Рассматриваем треугольные и другие сетки.
3. Трёхмерные решётки.

### Ссылки

Peter G. Doyle J. Laurie Snell 'Random walks and electric networks' <http://de.arxiv.org/abs/math/0001057v1>

М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов Случайные блуждания и электрические цепи// Сборник "Математическое Просвещение". Третья серия. Выпуск 16, 2012 год