О разрезании выпуклых многоугольников

А.ЗАСЛАВСКИЙ

Задачи на разрезание благодаря простоте и наглядности их формулировок всегда пользовались популярностью у любителей математики. При этом некоторые из этих задач оказываются весьма сложными. Например, сформулированная в начале прошлого века задача о разрезании квадрата на попарно различные квадраты меньших размеров была решена только спустя несколько десятилетий, причем для ее решения был разработан специальный метод, основанный на физической интерпретации разрезания. Удивительно, но этим же методом можно решить и, казалось бы, не имеющую никакого отношения к разрезаниям задачу о случайном блуждании. Подробнее об этом можно прочитать в книге М.Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М.: Мир, 1999) или в статье М.Скопенкова, М.Прасолова и С.Дориченко «Разрезания металлического прямоугольника» («Квант» №3 за 2011 год). Следует также заметить, что вопрос о наименьшем числе различных квадратов, на которые можно разрезать квадрат, до сих пор остается открытым.

Неожиданно сложными могут оказаться и задачи о разрезании многоугольников на треугольники. Например, не известно элементарное решение следующей задачи: можно ли разрезать квадрат на нечетное число равновеликих треугольников. Попробуйте самостоятельно решить две вполне элементарные, но тоже не очень простые задачи.

Упражнения

1. Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на а) прямоугольные; б) равнобедренные; в) тупоугольные; г) остроугольные треугольники.

2. На какое наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать квадрат?

В этой статье мы будем разрезать выпуклые многоугольники на выпуклые многоугольники с попарно различным числом сторон. Вопрос, на который мы бы хотели найти ответ, можно сформулировать так.

Мегазадача. *Дан выпуклый n-угольник. При каких k его можно разрезать на k выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон?*

К сожалению, полного решения мегазадачи автор предложить читателям не может. Тем не менее, мы докажем несколько любопытных результатов, а именно:

1. *Для каждого k существует такое число n_k, что многоугольники, имеющие меньше n_k сторон, нельзя разрезать на k многоугольников, а многоугольники, имеющие n_k или больше сторон, – можно.*

2. *Для чисел n_k будут получены верхние и нижние оценки, которые при $k \le 17$ оказываются равными. Это позволяет дать ответ на вопрос мегазадачи при всех $n \le 100$.*

Разбор случая $n = 3$

Для $n = 3$ мегазадача предлагалась в «Задачнике «Кванта» (М1807). Напомним ее решение.

Пусть m – наибольшее из чисел сторон многоугольников разбиения. Так как соответствующий многоугольник выпуклый, к границе треугольника примыкает не более 3 его сторон (две стороны выпуклого многоугольника не могут лежать на одной прямой, значит, к каждой стороне треугольника примыкает не более одной стороны многоугольника). В силу выпуклости остальных $k - 1$ многоугольников каждый из них граничит не более чем с одной стороной m-угольника. Следовательно, $m \le k + 2$, и, значит, есть единственная возможность: треугольник разрезан на k многоугольников с числом сторон от 3 до $k + 2$.

Так как $(k + 2)$-угольник граничит с тремя сторонами исходного треугольника, $(k + 1)$-угольник может граничить только с двумя из них (рис.1). Следовательно, он должен граничить со всеми остальными многоугольниками. Аналогично, k-угольник может граничить лишь с одной стороной исходного треугольника и, значит, граничит со всеми остальными многоугольниками. Наконец, $(k - 1)$-угольник не может граничить со сторонами треугольника, так как в противном случае он не будет граничить с каким-то из трех предыдущих многоугольников, поэтому он граничит со всеми многоугольниками.

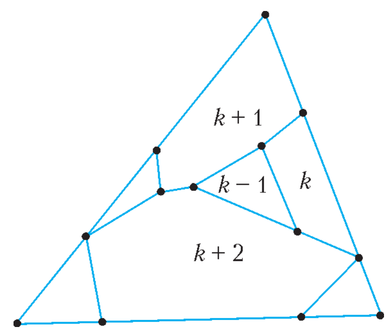

Рис. 1

Таким образом, при $k > 4$ пять многоугольников с наибольшим числом сторон попарно граничат друг с другом. Но на плоскости пять попарно граничащих областей существовать не могут[1], следовательно, при $k > 4$ искомое разрезание невозможно. Пример разрезания с $k = 4$ приведен на рисунке 2. Построение примеров для $k = 2, 3$ не представляет сложностей.

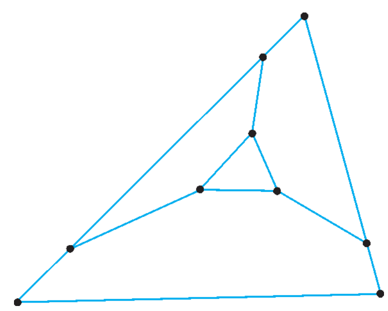

Рис. 2

К сожалению, попытка распространить приведенное рассуждение даже на случай $n = 4$ приводит к необходимости перебора большого числа вариантов. Решить же таким способом задачу для $n > 4$, скорее всего, вообще невозможно. Поэтому будем действовать иначе.

Задача 1. *Докажите, что если на k многоугольников можно разрезать n-угольник, то можно так разрезать и многоугольники с большим числом сторон.*

Решение. Достаточно показать, как можно из разрезания n-угольника получить разрезание $(n + 1)$-угольника. Пусть многоугольник $A_1 \ldots A_n$ разрезан на многоугольники $P_1, \ldots, P_k$, имеющие $m_1 < \ldots < m_k$ соответственно сторон. Рассуждая так же, как в случае $n = 3$, можно убедиться, что многоугольник P_k содержит одну из сторон исходного n-угольника. Можно считать, что это сторона A_nA_1 многоугольника. Возьмем точку A_{n+1} вне многоугольника $A_1 \ldots A_n$ и достаточно близко к середине A_nA_1 так, чтобы углы

[1] Об этом можно прочесть, например, в книге В.Г.Болтянского и В.А.Ефремовича «Наглядная топология» (Библиотечка «Квант», вып.21).

$A_{n+1}A_1A_2$ и $A_{n+1}A_nA_{n-1}$ были меньше $180°$. Тогда выпуклый многоугольник $A_1\ldots A_{n+1}$ будет разрезан на k выпуклых многоугольников: $P_1, \ldots, P_{k-1}$ и многоугольник, полученный из P_k заменой стороны A_nA_1 на ломаную $A_nA_{n+1}A_1$. Число сторон этого последнего многоугольника равно m_k+1, т.е. больше, чем у любого из многоугольников $P_1, \ldots, P_{k-1}$.

Таким образом, для каждого k существует такое число n_k, что многоугольники, имеющие меньше чем n_k сторон, нельзя разрезать на k многоугольников, а многоугольники, имеющие n_k или больше сторон, – можно. Будем искать оценки для чисел n_k.

Нижняя оценка n_k

Пусть n-угольник разрезан на k многоугольников. Обозначим через S сумму углов этих многоугольников, измеренную в развернутых углах. Так как многоугольники имеют попарно различное число сторон, то $S \geq \frac{k(k+1)}{2}$.

Вершины многоугольников разбиения относятся к одному из следующих типов:

1) Вершины исходного многоугольника, являющиеся вершинами ровно одного многоугольника разбиения.

2) Вершины исходного многоугольника, являющиеся вершинами нескольких многоугольников разбиения. Обозначим их число через m, тогда вершин первого типа будет $n-m$.

3) Вершины, лежащие на сторонах исходного многоугольника. Обозначим их число через x.

4) Вершины, лежащие на сторонах многоугольников разбиения (и не совпадающие с их вершинами). Обозначим их число через y.

5) Вершины, не лежащие на сторонах исходного многоугольника и многоугольников разбиения. Обозначим их число через z.

Заметим, что сумма углов многоугольников разбиения в вершинах третьего и четвертого типов равна π, а в вершинах пятого типа – 2π. Отсюда получаем равенство

$$S = n - 2 + x + y + 2z. \qquad (1)$$

Далее, каждая из вершин второго, третьего или четвертого типов принадлежит хотя бы двум, а пятого – хотя бы трем многоугольникам разбиения. Поэтому для суммарного количества вершин этих многоугольников, равного $S + 2k$, получаем неравенство

$$S + 2k \geq (n-m) + 2m + 2x + 2y + 3z. \qquad (2)$$

Вычитая (1) из (2), получаем

$$2 + m + x + y + z \leq 2k.$$

С другой стороны, умножив равенство (1) на 2 и вычтя из него (2), получаем

$$n - 4 - m + z \geq S - 2k.$$

Пусть $l = m + x$ – количество многоугольников разбиения, граничащих с внешностью исходного n-угольника. Тогда, объединяя два полученных неравенства, получаем

$$S - 2k - n + 4 \leq z \leq 2k - l.$$

И, значит,

$$n \geq l + S - 4k + 6 \geq l + \frac{(k-3)(k-4)}{2}. \qquad (3)$$

Заметим теперь, что $l \geq 3$, и если убрать l многоугольников, образующих границу n-угольника, то получим область, ограниченную l выпуклыми внутрь ее ломаными и разрезанную на $k-l$ многоугольников. Продеформировав эти многоугольники, можно превратить область в выпуклый l-угольник. Следовательно, $l \geq n_{k-l}$. Подставляя в (3) минимальное l, удовлетворяющее этому неравенству, получим рекуррентное выражение для n_k. Воспользуемся им для вычисления нескольких первых значений:

k	n_k	l	k	n_k	l
≤4	3	3	11	34	6
5	4	3	12	42	6
6	6	3	13	52	7
7	9	3	14	63	8
8	14	4	15	75	9
9	19	4	16	87	9
10	26	5	17	101	10

Изучая эту таблицу, можно заметить следующие закономерности.

Если k увеличивается на 1, то l либо также увеличивается на 1, либо остается без изменения. При этом, если исключить малые значения k, при которых $l = 3$, интервалы между моментами сохранения l возрастают. Эту закономерность можно доказать по индукции.

На самом деле, проведенное нами рассуждение содержит довольно существенный пробел. Утверждение, что область, ограниченную l выпуклыми внутрь ломаными, можно продеформировать в выпуклый l-угольник, сохраняя структуру ее разрезания, нуждается в доказательстве. Более того, строгого математического доказательства этого факта автору найти не удалось. В качестве неформального аргумента в пользу его справедливости приведем следующую физическую интерпретацию требуемой деформации.

Предположим, что стороны внешних ломаных – жесткие палочки, соединенные шарнирами в вершинах, а внутренние стороны остальных многоугольников сделаны из пружинок, которые могут растягиваться (менять длину), но не могут сгибаться. В точках $C_1, \ldots, C_l$ – концах ломаных, ограничивающих область, – палочки прикреплены к плоскости. Теперь будем двигать точки $C_1, \ldots, C_l$, увеличивая расстояние между ними. Тогда соединяющие эти точки ломаные будут приближаться к отрезкам прямых, и в пределе мы получим выпуклый l-угольник. При этом внутренние пружинки по-прежнему будут образовывать выпуклые многоугольники.

Верхняя оценка n_k

Оценку сверху для чисел n_k также будем строить рекуррентно, увеличивая число многоугольников разбиения. Пусть n-угольник $A_1\ldots A_n$ разрезан на k многоугольников, имеющих 3, 4, ..., $k+2$ сторон. Если на какой-то стороне A_iA_{i+1} n-угольника лежат две вершины B_1, B_2 многоугольников разбиения, то продеформируем эти многоугольники, сдвинув B_1, B_2 внутрь n-угольника $A_1\ldots A_n$. В результате вместо стороны A_iA_{i+1} мы получим выпуклую внутрь n-угольника трехзвенную ломаную $A_iB_1B_2A_{i+1}$. Теперь возьмем на продолжении сторон $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+1}A_{i+2}$ за A_i и A_{i+1} точки C_1 и C_{k-1} и соединим их ломаной $C_1\ldots C_{k-1}$ из $k-2$ звеньев так, чтобы получился выпуклый многоугольник $A_1\ldots A_{i-1}C_1\ldots C_{k-1}A_{i+2}\ldots A_n$ с $n+k-3$ сторонами. Этот многоугольник будет разрезан на многоугольники, имеющие от 3 до $k+3$ сторон. При этом число l многоугольников, выходящих на границу, не изменится, поскольку многоугольник, содержащий сторону B_1B_2, из граничного станет

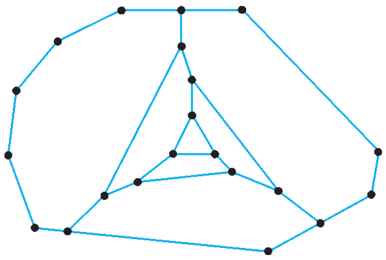

Рис. 3

внутренним. На рисунке 3 показано, как, пользуясь этим алгоритмом, получить девятиугольник, разрезанный на семь многоугольников. Однако дальше действовать так не удастся, потому что сторон, содержащих две вершины, не останется. Поэтому придется выбрать одну из сторон, содержащих одну вершину, и пристроить новый многоугольник к ней. Тогда l увеличится на 1, а число сторон многоугольника – на $k-2$. При продолжении этого процесса две стороны, содержащие вершины разбиения, будут сближаться, и в какой-то момент снова возникнет сторона, содержащая две вершины, так что на следующем шаге можно будет обойтись без увеличения l. Для $k \le 17$ можно выбирать стороны, к которым пристраивается новый многоугольник, так, чтобы эти моменты совпадали с моментами сохранения l в приведенной таблице. В результате для всех этих значений k верхняя и нижняя оценки будут совпадать. Остается ли это верным при всех k, автору неизвестно. Возможно, читатели «Кванта» смогут найти ответ на этот вопрос.

Подведем итоги

Итак, хотя решить поставленную мегазадачу нам не удалось, мы все же смогли продвинуться в этом направлении. Прежде всего, из результата задачи 1 следует, что число k многоугольников, на которые можно разрезать выпуклый n-угольник, должно лежать между 2 и некоторым зависящим от n числом $k_{\max}$. При этом предложенные нами алгоритмы позволяют оценить это число как сверху, так и снизу. Более того, для рассмотренных значений $n \le 100$ верхняя и нижняя оценки оказались равными, так что для этих значений задача решена полностью.

Приведем несколько возможных направлений дальнейшего исследования мегазадачи.

1. Предложенные алгоритмы не дают явную формулу для нижних и верхних оценок чисел n_k, а только позволяют последовательно вычислять эти оценки. Явная формула позволила бы находить оценки для данного k непосредственно.

2. Вычисляя для малых значений k верхние и нижние оценки, мы обнаружили, что соответствующие значения l во всех случаях совпадают. Это, в свою очередь, обеспечивает и совпадение самих оценок. Если совпадение значений l удастся доказать и для остальных значений k, мегазадача будет полностью решена.

Возможно, читатели смогут продвинуться в указанных направлениях или найти другие пути к окончательному решению мегазадачи.

Еще несколько задач

В заключение приведем еще несколько довольно сложных задач, близких к разобранной. Первые две взяты из статьи О.Ижболдина и Л.Курляндчика «Разрежем на треугольники» («Квант» №5 за 1996 год), третью автор решал, будучи школьником на Московской математической олимпиаде в 1975 году, четвертая взята из Задачника «Кванта».

Задачи

2. Выпуклый многоугольник разрезан на треугольники. Докажите, что среди этих треугольников найдется хотя бы один, на границе которого нет вершин других треугольников.

3. При каких n выпуклый n-угольник может быть разрезан на треугольники так, чтобы ни у каких двух из этих треугольников не было общей стороны?

4. Существует ли выпуклый многоугольник, который можно разрезать на невыпуклые четырехугольники?

5 (М484). При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников?

Важная лемма

Д.ШВЕЦОВ, Ю.ЗАЙЦЕВА

В математике под леммой обычно понимают утверждение, полезное не само по себе, а необходимое для доказательства других более важных и красивых теорем. В нашей статье речь пойдет об одной такой лемме, важность которой постараемся показать.

Теорема о средней линии известна школьникам начиная с 8-го класса, а вот утверждение, о котором речь пойдет ниже, зачастую ускользает от них.

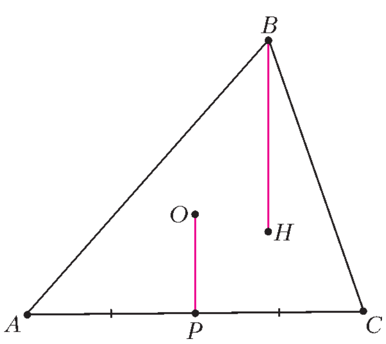

Рис. 1

Важная лемма. *Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, H – его ортоцентр, P – середина стороны AC (рис. 1). Тогда*

$$BH = 2OP.$$

Доказательство. Дополним рисунок 1, а именно отметим точки K, L, M – середины отрезков AB, BH, CH соответственно (рис. 2).

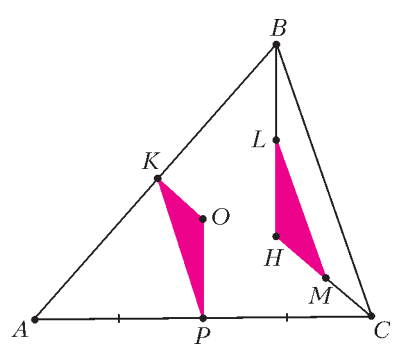

Рис. 2

Заметим, что $OK \perp AB$, так как O – точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности), но и $CH \perp AB$, поэтому $CH \parallel OK$. Аналогично убеждаемся, что $OP \parallel BH$. Далее, KP – средняя линия треугольника ABC, поэтому $KP \parallel BC$ и $KP = \frac{1}{2}BC$. А LM – средняя линия треугольника BHC, следовательно, $LM \parallel BC$ и $LM = \frac{1}{2}BC$. Получаем, что у треугольников KOP и MHL стороны попарно параллельны, следовательно, их углы попарно равны (почему?). Но $KP = \frac{1}{2}BC = LM$, т.е. $\Delta KOP = \Delta LMH$. Поэтому $OP = LH = \frac{1}{2}BH$, чем и завершается доказательство.

Оказывается, что данная конструкция изобилует параллелограммами и средними линиями. В обозначениях рисунка 2 докажите такие утверждения.