Экстремальные системы множеств и векторов *

А.М. Райгородский

1 Экстремальные системы множеств

1.1 Вступление

Прежде всего рассмотрим множество $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. В этом множестве возьмем произвольные сочетания $M_1, \ldots, M_s$ с некоторым s и составим из них совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$. Если $|M_i| = k$ для каждого i, то назовем совокупность $\mathcal{M}$ *k-равномерной*. Если в $\mathcal{R}_n$ задана k-равномерная совокупность $\mathcal{M}$, состоящая из s множеств, то будем говорить также, что $\mathcal{M}$ — это совокупность *с параметрами* (n, k, s).

Как можно интерпретировать несколько сухую абстракцию, которую мы описали выше? Ну, например, представим себе, что $k = 2$. Тогда у нас есть $\mathcal{R}_n$ — множество из n чисел — и некоторый набор (неупорядоченных) пар элементов из $\mathcal{R}_n$ — совокупность $\mathcal{M}$. Да ведь это самый обычный граф! В нем $\mathcal{R}_n$ служит множеством вершин, а $\mathcal{M}$ — множеством ребер.

Если $k \geq 3$, то, по упомянутой только что причине, пару $H = (\mathcal{R}_n, \mathcal{M})$ называют *гиперграфом*. Скажем, 3-равномерный гиперграф образуют все остроугольные треугольники с вершинами в некотором (фиксированном) множестве точек X на обычной плоскости. (Если таких треугольников нет, то тоже, конечно, не беда: просто множество “ребер” гиперграфа в этом случае будет пустым.)

Гиперграфы играют огромную роль в математике. И в частности, исключительно важны гиперграфы, которые оптимальны с той или иной точек зрения. Сейчас нас будут особенно интересовать гиперграфы, которые обладают наибольшим количеством ребер при условии, что эти ребра удовлетворяют некоторому ограничению на взаимное расположение. Такие гиперграфы “работают” в теории кодирования и в комбинаторной геометрии. Знакомиться с ними и с их применением мы будем посредством задач.

1.2 Основные задачи

Задача 1.1. Найдите число различных совокупностей с параметрами (n, k, s).

Задача 1.2. Назовем совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ *t-пересекающейся*, если $|M_i \cap M_j| \geq t$ для любых i и j. Докажите, что для произвольных n и k существует 1-пересекающаяся совокупность с параметрами (n, k, s), где $s \geq C_{n-1}^{k-1}$.

*Этот текст является улучшенной версией текста http://www.mccme.ru/mmks/dec08/raigor.pdf

Задача 1.3. Докажите, что при $k \le \frac{n}{2}$ размер s любой 1-пересекающейся совокупности с параметрами (n, k, s) не превосходит C_{n-1}^{k-1}. Зачем нужно условие $k \le \frac{n}{2}$?

Задача 1.4. Докажите, что для произвольных n и k существует t-пересекающаяся совокупность с параметрами (n, k, s), где $s \ge C_{n-t}^{k-t}$.

Задача 1.5. Найдите какие-нибудь значения параметров n, k, t, при которых $2k-t < n$ и, тем не менее, существует t-пересекающаяся совокупность с параметрами (n, k, s), где $s > C_{n-t}^{k-t}$. Зачем нужно условие $2k - t < n$?

Задача 1.6*. Найдите какие-нибудь последовательности $k = k(n) \to \infty$ и $t = t(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, для которых $2k - t < n$ и, тем не менее, существуют t-пересекающиеся совокупности с параметрами (n, k, s), где $s/C_{n-t}^{k-t} \to \infty$.

Задача 1.7. Назовем совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$ *t-непересекающейся*, если $|M_i \cap M_j| \ne t$ для любых i и j. Обозначим через $S(n, k, t)$ мощность самой большой t-непересекающейся совокупности с параметрами n и k. Найдите $S(n, 3, 1)$.

Задача 1.8. Найдите $S(10, 5, 2)$.

Задача 1.9. Найдите $S(11, 5, 2)$.

Задача 1.10. Докажите, что $c_1 n^2 \le S(n, 5, 2) \le c_2 n^2$, где c_1, c_2 — некоторые положительные константы.

Задача 1.11. Назовем *(n, k, t)-кодом* произвольную совокупность $\mathcal{M}$ с параметрами (n, k, s), в которой любые два множества пересекаются не более чем по t общим элементам. Найдите мощность s наибольшего $(6, 3, 1)$-кода.

1.3 Приложения

Назовем *хроматическим числом пространства* $\mathbb{R}^n$ величину $\chi(\mathbb{R}^n)$, равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы расстояние между одноцветными точками не равнялось единице.

Задача 2.1. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$.

Задача 2.2. Докажите, что $4 \le \chi(\mathbb{R}^2) \le 7$.

Задача 2.3. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \ge n + 2$ при $n \ge 2$.

Задача 2.4. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) < \infty$ для любого n.

Задача 2.5. Докажите, что хроматическое число не изменится, если, вместо единичного расстояния, запрещать любое другое фиксированное расстояние $a > 0$ между точками одного цвета.

Задача 2.6. Докажите, что для любых n, k, t справедлива оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \frac{C_n^k}{S(n,k,t)}$, а стало быть, верно и неравенство

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{k,t} \frac{C_n^k}{S(n,k,t)}.$$

Указание. Пусть дана совокупность $\mathcal{M}$ с параметрами (n, k, C_n^k). Сопоставим каждому множеству $M \in \mathcal{M}$ вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, у которого $x_i = 1$, если $i \in M$, и $x_i = 0$, если $i \notin M$. Получится совокупность векторов $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{X}| = C_n^k$. Положим, далее, $a = \sqrt{2k - 2t}$ (ср. задачу 2.5). Заметим, что множества из $\mathcal{M}$ пересекаются по t элементам тогда и только тогда, когда отвечающие им векторы отстоят друг от друга на расстояние a.

Задача 2.7. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^2$, где $c > 0$.

Задача 2.8. Докажите, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^3$, где $c > 0$.

2 Экстремальные системы векторов

2.1 Вступление

В задаче 2.6 мы уже сталкивались с тем, что множества можно “кодировать” (0,1)-векторами, а мощности пересечений множеств — расстояниями между соответствующими векторами. На самом деле, мощность пересечения множеств в точности равна скалярному произведению отвечающих им (0,1)-векторов. Поэтому прямым обобщением задачи об отыскании величины $S(n, k, t)$ служит следующая задача. Пусть $\mathcal{X}$ — произвольная совокупность n-мерных $(-1, 0, 1)$-векторов, в каждом из которых ровно k координат величины ± 1 и ровно $n - k$ координат величины 0, причем первая ненулевая координата равна 1. Предположим, что в $\mathcal{X}$ скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ произвольных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ не равно t. Спрашивается, как ведет себя величина $X(n, k, t)$, равная максимальной мощности описанного множества $\mathcal{X}$?

2.2 Основные задачи

Задача 3.1. Докажите, что при $n = 2k$ и нечетном k выполнена оценка $X(n, k, 0) \geq 2^{n-1}$.

Задача 3.2. Найдите $X(2, 1, 0)$ и $X(4, 2, 0)$.

Задача 3.3. Найдите $X(6, 3, 0)$.

Задача 3.4. Покажите, что $X(8,4,0) \leq 70$.

Задача 3.5. Покажите, что $X(8,4,0) \geq 35$.

Задача 3.6. Уточните оценку из задачи 3.4.

Задача 3.7. Уточните оценку из задачи 3.5.

Задача 3.8. Найдите $X(8,4,0)$.

Задача 3.9. Исследуйте поведение величины $X(16,8,0)$.

Задача 3.10. Найдите какое-нибудь $n = 2k$ с нечетным k, при котором $X(n,k,0) > 2^n$.

Задача 3.11. Докажите, что при $n = 2k$, $k \to \infty$, выполнено $\frac{X(n,k,0)}{2^n} \to \infty$.

Задача 3.12*. Докажите, что при $n = 2k$, $k \to \infty$, выполнено $\frac{X(n,k,0)}{(2.1)^n} \to \infty$.

Задача 3.13. Исследуйте поведение величины $X(n,k,t)$ при произвольных значениях аргументов.

2.3 Приложения

Задача 4.1. Докажите, что

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \max_{k,t} \frac{C_n^k 2^k}{X(n,k,t)}.$$

Задача 4.2. Попытайтесь за счет задачи 4.1 уточнить неравенство $\chi(\mathbb{R}^n) \geq cn^3$.

Список цитированной литературы

[1] А.М. Райгородский, *Хроматические числа*, Москва, МЦНМО, 2003.

[2] А.М. Райгородский, *Проблема Борсука*, Москва, МЦНМО, 2006.

[3] А.М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2007.

[4] А.М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, Москва, МЦНМО, 2008.

[5] А.М. Райгородский, О.И. Рубанов, В.А. Кошелев, *Хроматические числа*, Квант, N3 (2008), 13-22.