ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

А.Заславский

1 Определения и вводные задачи

Как известно, вокруг любого треугольника можно описать окружность и в любой треугольник можно вписать окружность. Кроме того, у любого треугольника существуют три вневписанные окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Мы будем обозначать O, R — центр и радиус описанной окружности, I, r — центр и радиус вписанной, I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, CA, AB, соответственно, r_a, r_b, r_c — их радиусы.

Основным объектом нашего изучения будут треугольники, удовлетворяющие условию $R = r_c = 1$. Все предлагаемые ниже задачи относятся именно к такому треугольнику ABC.

1. Найти расстояние OI_c.

2. Известно, что треугольник ABC равнобедренный. Найти его углы.

3. Доказать, что углы треугольника удовлетворяют соотношениям:

a)

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{4}.$$

b)

$$\cos C = \cos A + \cos B.$$

4. Пусть C', A', B' — точки касания вневписанной окружности со стороной AB и продолжениями сторон BC, AC.

a) Доказать, что отрезки IC', I_aA', I_bB' и I_cO пересекаются в одной точке.

b) В каком отношении эта точка делит отрезок I_cO?

5. Доказать, что $AA' = BB' = CC'$.

Известно, что прямые, соединяющие вершины любого треугольника с точками касания противоположных сторон и вписанной окружности, пересекаются в одной точке. Эта точка G называется *точкой Жергонна*. Аналогично, если заменить вписанную окружность вневписанной, можно определить три *внешних точки Жергонна* G_a, G_b, G_c.

6. Доказать, что G_c лежит на описанной окружности ABC.

7. Доказать, что O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$.

2 Основные задачи

Определение. Прямая l называется *полярой* точки P относительно окружности с центром O и радиусом R, если луч OP пересекает l и перпендикулярен ей, а расстояние от O до l равно $\frac{R^2}{OP}$. Треугольник называется *автополярным* относительно окружности, если каждая его сторона является полярой противоположной вершины.

8. Доказать, что треугольник $A'B'C'$ автополярен относительно описанной окружности треугольника ABC.
9. Доказать, что касательные к окружности ABC в точках A и B пересекаются на прямой $A'B'$.
10. Пусть AA_1, BB_1 — биссектрисы углов A и B. Доказать, что O лежит на прямой A_1B_1.
11. Пусть прямая A_1B_1 пересекает окружность ABC в точках X и Y.
a) Доказать, что треугольник I_cXY — правильный.
b) Найти его центр.
12. Пусть AA_2, BB_2, CC_2 — высоты треугольника ABC.
a) Доказать, что I лежит на A_2B_2.
b) Доказать, что прямая OI проходит через C_1.
13. (A.Golmakani) Пусть прямые AA_1, BB_1 пересекают касательную к описанной окружности в точке C в точках P и Q. Доказать, что прямая OI делит отрезок PQ пополам.
Известно, что симедианы любого треугольника (прямые, симметричные медианам относительно биссектрис) пересекаются в одной точке, которая называется *точкой Лемуана* L.
14. Доказать, что прямые OG_c и LI_c параллельны.
15. Доказать, что поляра G_c относительно вневписанной окружности проходит через L.

3 Дополнительные задачи

Согласно *Теореме Понселе* существует бесконечно много треугольников, имеющих данные описанную и вневписанную окружности. Рассмотрим все такие треугольники ABC.
16. Доказать, что что стороны всех соответствующих треугольников $A'B'C'$ касаются одной и той же гиперболы.
17. В какой точке эта гипербола касается прямой $A'B'$?
18. Найти фокусы гиперболы.
19. Доказать, что точки пересечения прямых AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C'$ лежат на одной прямой, касающейся гиперболы.
20. В какой точке происходит касание?