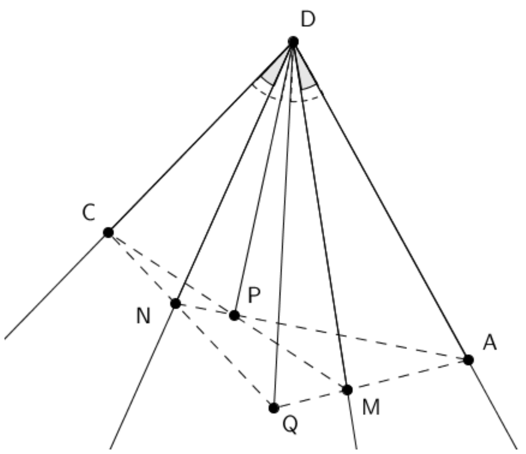
Теорема об изогоналях

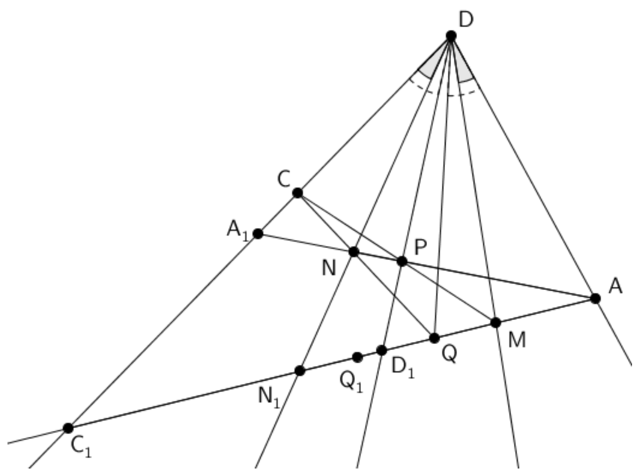
А.Куликова

1. Основная часть

Теорема об изогоналях. *Внутри угла AOB проведены лучи OD и OC, симметричные относительно биссектрисы этого угла. Если M — точка пересечения AD и BC, а N — точка пересечения BD и AC, то лучи ON и OM также симметричны относительно биссектрисы угла AOB.*
Данная теорема — переформулировка задачи с Санкт-Петербургской олимпиады школьников 2004 года. В статье приведено доказательство теоремы и продемонстрирована эфективность применения этой теоремы в олимпиадных задачах высокого уровня. В результате работы над этой темой придуманы две задачи.

Доказательство:





Отношением направленных отрезков $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \lambda$ будем называть двойное отношение точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, и обозначать (AB, CD).

Центральной проектированием прямой l на прямую l_1 с центром в точке O, не принадлежащим ни одной из двух прямых, будем называть отображение, которое точке A прямой l ставит в соотвествие точку пересечения прямой OA с прямой l_1. При центральном проектировании двойное отношение точек сохраняется.

Основным инструментом при доказательстве теоремы является сохранение двойных отношений при центральном проектировании. Формулировка этого утверждения и соответствующие определения приводятся в [1].

Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, мы будем называть изогоналями относительно этого угла.

1) Продлим AP и AQ до пересечения со сторонами угла в точках A_1 и C_1. Пусть DN пересекает AC_1 в точке N_1, DP в D_1. Предположим, что DP и DQ не изогонали, тогда есть Q_1 на AC_1, такая что DQ и DQ_1 — изогонали.

2) Рассмотрим центральное проектирование прямой CD на прямую AQ с центром в точке $P : (CD, A_1C_1) = (MD_1, AC_1)$. При проекции с центром в точке $N : (CD, A_1C_1) =$

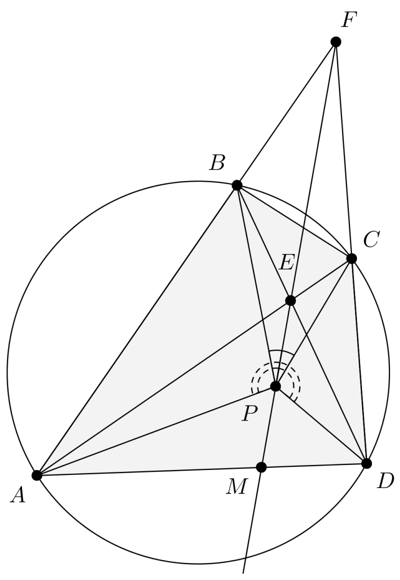
(QN_1, AC_1).

3) Так как при симметрии относительно биссектрисы угла, изогонали переходят в друг друга, то $(QN_1, AC_1) = (Q_1M, C_1A) = (MQ_1, AC_1)$.

4) Заметим, что $(MD_1, AC_1) = (QN_1, AC_1) = (MQ_1, AC_1)$, значит, точки D_1 и Q_1 совпадают, следовательно, DP и DQ — изогонали.

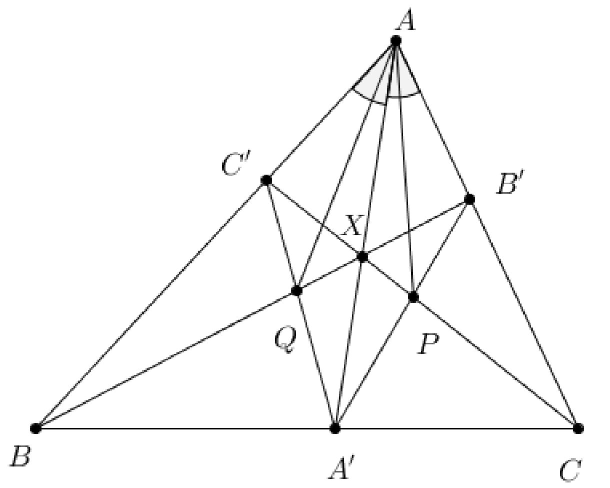
Применение теоремы об изогоналях в задачах

1. *Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Диагонали AC и DB пересекаются в точке E, а прямые, содержащие противолежащие стороны, в точке F. На прямой EF взяли такую точку P, что $\angle BPE = \angle EPC$. Доказать, что $\angle APE = \angle DPE$.* Санкт – Петербургская олимпиада школьников по математике.



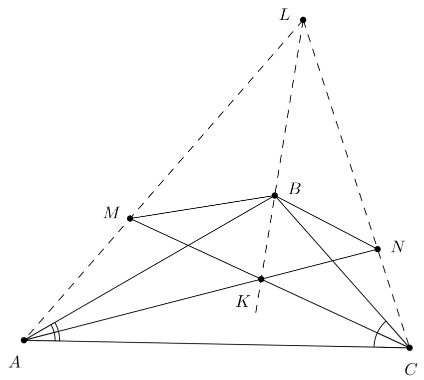
Доказательство:
Заметим, что PE — совпавшие изогонали в углу BPC. Точки E и F — точки на этой изогонали. Точки A и D — пересечение прямых FB и CE, FC и BE. По теореме об изогоналях PA и PD также являются изогоналями. Следовательно $\angle APE = \angle DPE$, что и требовалось доказать.
При решении задачи не использовался факт о том, что четырехугольник вписанный, значит, задача верна для любых выпуклых четырехугольников.

2. *В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X. Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'. Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.* Турнир городов, Весенний тур, 2006 г, 10-11 классы, 4, основной вариант.



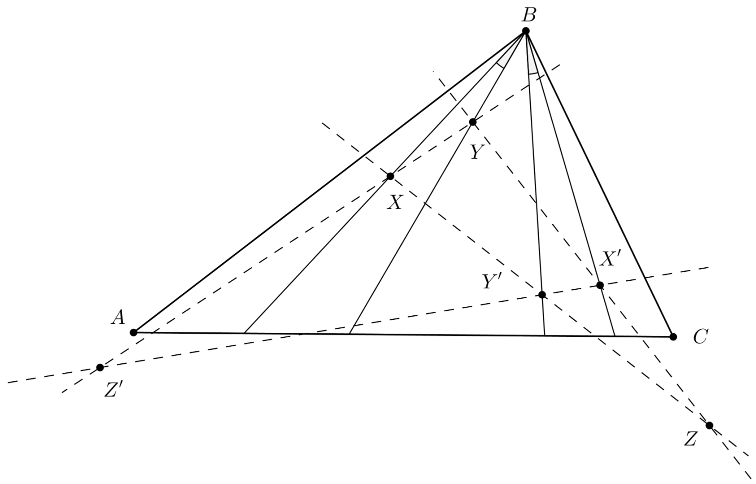
Доказательство:
Для решения задачи удобно рассматривать биссектрису $A'A$ как две совпашие изогонали в углу BAC. X и A — точки на изогонали, а C' и B' — точки на сторонах угла. Точки Q и P — пересечение прямых BB' и $A'C'$, CC' и AB'. По теореме об изогоналях AQ и AP так же изогонали. То есть $\angle PAC = \angle QAB$. Что и требовалось доказать.

3. *На биссектрисе угла B треугольника ABC выбраны две точки K и L. Точки M и N — пересечение прямых CK и AL, AK и CL. Докажите, что $\angle MBA = \angle NBC$.*



Доказательство:
Рассмотрим угол BAC. Заметим, что K и L — точки на изогоналях (биссектриса является изогональю к себе), а A и C — точки на сторонах угла. Точки M и N — пересечение прямых CK и AL, AK и CL. По теореме об изогоналях BM и BN — изогонали, следовательно, $\angle MBA = \angle NBC$. Что и требовалось доказать.

4. ***Теорема.*** *Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y'. Тогда точки пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены. [3, с.93]*

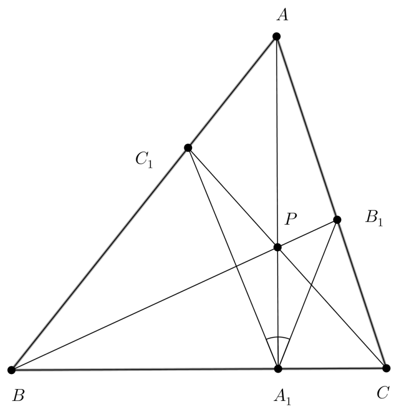


Доказательство:

Рассмотрим угол XBX'. Y и Y' — точки на изогоналях ($\angle ABX = \angle CBX'$ и $\angle ABY = \angle CBY'$, следовательно BY, BY' — изогонали в $\angle XBX'$), а X и X' — точки на сторонах угла. Точки Z и Z' — пересечение прямых $X'Y$ и $Y'X$, $Y'X'$ и XY. По теореме об изогоналях BZ и BZ' — изогонали. Аналогично, AZ, AZ' и CZ, CZ' — изогонали в углах $\angle BAC, \angle BCA$. Следовательно, Z и Z' изогонально сопряжены.

2. Дополнительные задачи

5. *В треугольнике ABC проведены чевианы BB_1 и CC_1. Доказать, что BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника, если $\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A$.*



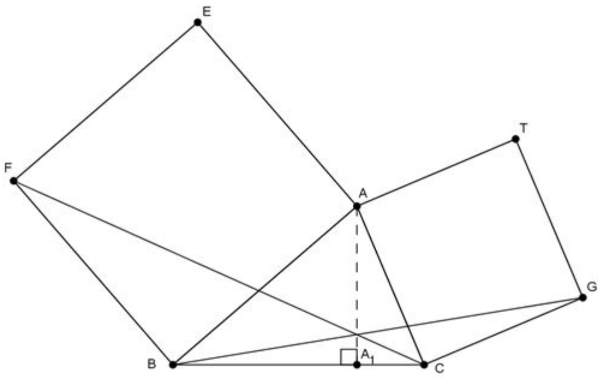
Доказательство:

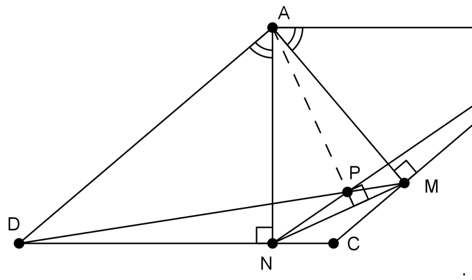
Рассмотрим $\angle C_1A_1B_1$. $\angle C_1A_1B = \angle B_1A_1C$ (так как $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$ и $\angle BA_1A = \angle CA_1A$), поэтому B и C — точки на изогоналях, а C_1 и B_1 — точки на сторонах угла. Точки A и P — пересечение прямых BC_1 и CB_1, BB_1 и CC_1. По теореме об изогоналях A_1P и A_1A — изогонали, но так как AA_1 — биссектриса угла $C_1A_1B_1$, то P так же лежит на биссектрисе, то есть на высоте треугольника. Следовательно, BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1.

Следующие две задачи имеют схожее решение.

1) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1. [2, 9.8]

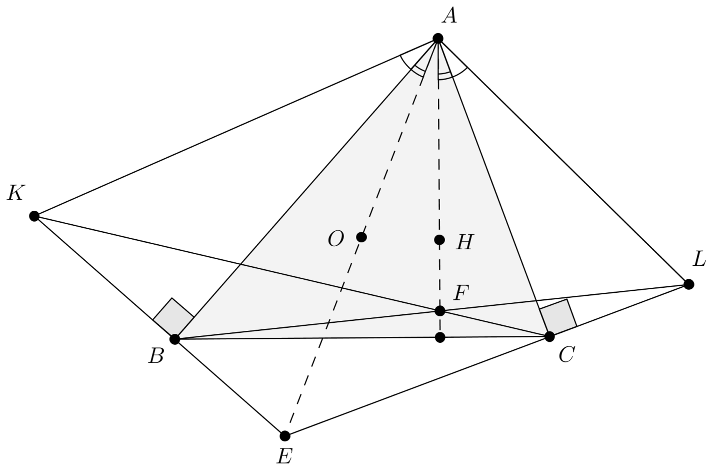
2) Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD. P — точка пересечения BN и DM. Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны. *А. Полянский, Устная городская олимпиада по геометрии, 2010, 10-11.4.*





Обе эти задачи являются частным случаем следующей конструкции.

6. *Пусть AK и AL –- изогонали, $\angle ABK = \angle ACL = 90°$. Доказать, что прямые KC и LB пересекаются на высоте AH. [2, 4.12.5)]*

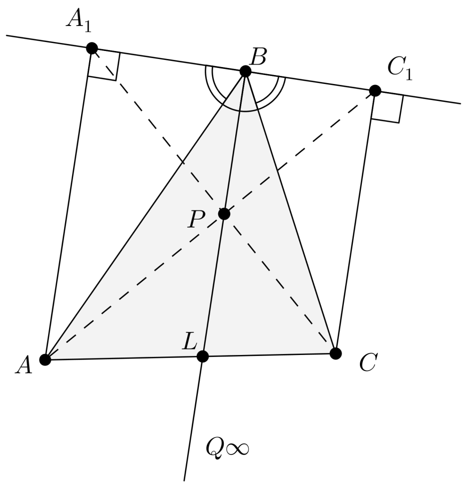


Доказательство:

1) Рассмотрим угол BAC. K и L — точки на изогоналях, а C и B — точки на сторонах угла. Точки E и F — пересечение прямых KB и CL, KC и BL. По теореме об изогоналях AE и AF также являются изогоналями.

2) $\angle ABE = 90°$, следовательно AE — диаметр описанной окружности треугольника ABC, тогда AF — высота.

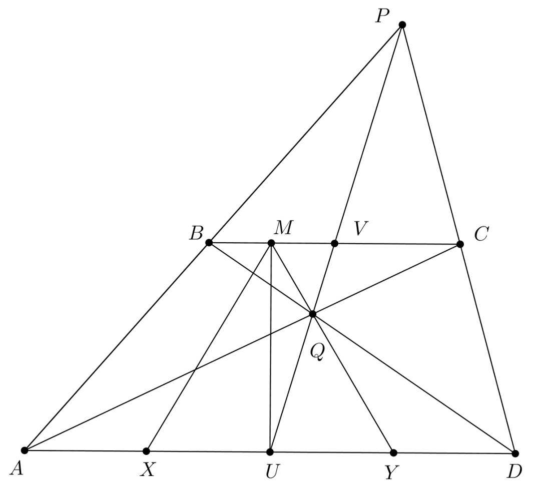
7. *Пусть BA_1 и BC_1 — внешние биссектрисы угла B треугольника ABC, $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90°$. Доказать, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC.* Региональный этап Всероссийской олимпиады.



Доказательство:

Рассмотрим угол ABC. A_1 и C_1 — точки на изогоналях, а A и C — точки на сторонах угла. Точки P и Q_∞ — пересечение прямых AC_1 и CA_1, A_1A и C_1C. По теореме об изогоналях BP и BQ_∞ также являются изогоналями, следовательно $BQ_\infty \| AA_1$, $\angle LBC_1 = 90°$. Следовательно BL — биссектриса. Точка P — пересечение AC_1 и A_1C, так же лежит на биссектрисе. Изогональю для биссектрисы является она же.

8. *Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а ее диагонали — в точке Q. Точка M на меньшем основании BC такова, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.* Финал олимпиады по геометрии им. И.Ф.Шарыгина, 2016, 9.6.

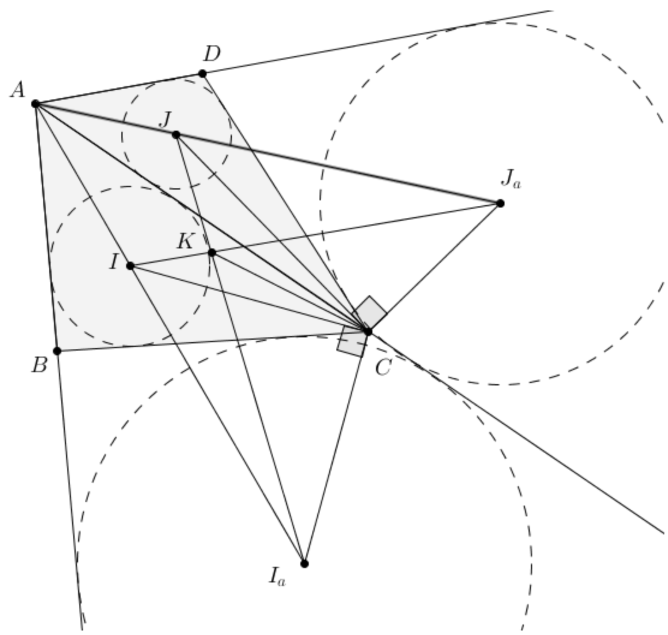


Доказательство:

1) Так как $AM = MD$, то AMD — равнобедренный треугольник, следовательно, $\angle MAD = \angle MDA = \angle AMB = \angle DMC$

2) A, D — точки на изогоналях для угла BMC. Тогда по теореме об изогоналях MP, MQ — изогонали, так как P — пересечение DC и AB, а Q — пересечение AC и BD. Значит $\angle PMB = \angle QMB$. Что и требовалось доказать.

9. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a — центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD.* А. Акопян, П. Кожевников, устная олимпиада по геометрии, 2014, 10-11, №6.



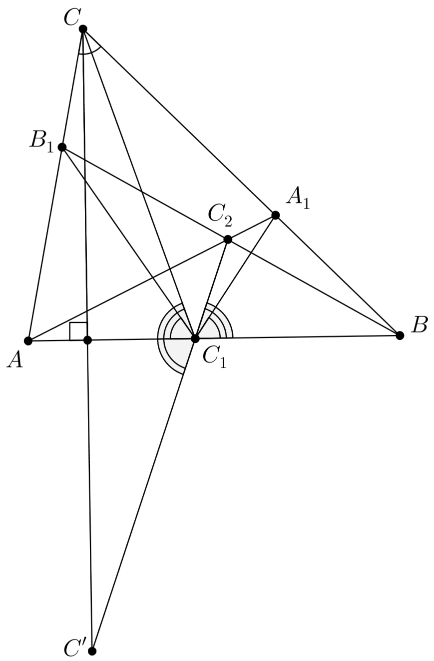
Доказательство:

1) По свойству биссектриса треугольника перпендикулярна внешней биссектрисе, а значит $\angle ICI_a$ и $\angle JCJ_a$ — прямые углы.

2) Для угла ICJ CI_a и CJ_a — изогонали, а следовательно, по теореме об изогоналях, CK и CA — изогонали (K — пересечение IJ_a и JI_a, а A — пересечение II_a и JJ_a).

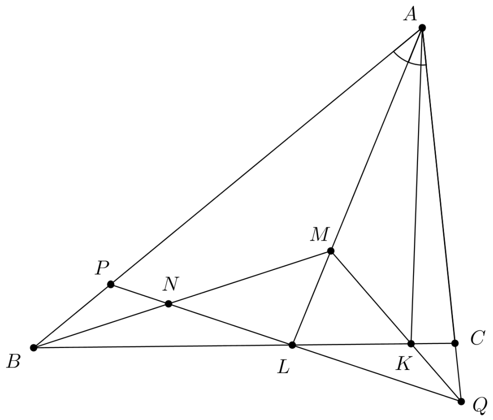
3) Пусть $\angle ACJ = \alpha$ и $\angle KCA = \beta$. Тогда заметим, что $\angle BCK = \angle KCD = 2\alpha + \beta$, так как $\angle ICK = \angle ACJ = \angle JCD$ и $\angle BCI = \angle ICA$. Следовательно, CI — биссектриса. Что и требовалось доказать.

10. *На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1. Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2. Доказать, что все прямые C_1C_2 проходят через одну фиксированную точку.* Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина, заочный тур, №20, 2013 г.



Доказательство:
Рассмотрим угол AC_1B. A_1 и B_1— точки на изогонали, а A и B — точки на сторонах угла. Точки C и C_2 — пересечение прямых AB_1 и BA_1, AA_1 и BB_1. По теоремме об изогоналях C_1C_2 и C_1C — изогонали. Продлим C_1C_2 до пересечения с прямой CH в точке C', где CH — высота. Заметим, что тогда $\angle CC_1A = \angle C_2C_1B = \angle AC_1C'$, следовательно, треугольник CC_1C' — равнобедренный. Тогда прямая C_1C_2 проходит через точку C', симметричную вершине C относительно стороны AB. Все прямые C_1C_2 проходят через эту точку.

11. *Пусть M — точка на биссектрисе AL треугольника ABC. Через L провели прямую, пересекающую AB в точке P, а продолжение AC за точку C — в точке Q. Пусть N — пересечение BM и PQ, а K — пересечение QM и BC. Доказать, что $\angle NAL = \angle KAL$.* Украина, отбор на международную олимпиаду, 2004 год.



Доказательство:
Рассмотрим угол BAC. Заметим, что M и L — точки на изогоналях (биссектриса является изогональю к себе), а B и Q — точки на сторонах угла. Точки N и K — пересечение прямых BM и QL, QM и BL. По теореме об изогоналях AN и AK — изогонали, следовательно, $\angle NAL = \angle KAL$. Что и требовалось доказать.

3. Благодарности

Я признательна Д. В. Прокопенко за постоянную помощь в написании работы и постановку задачи. Так же хотелось бы выразить благодарность рецензентам, в частности А.А. Заславскому, за помощь в подготовке данного текста.

Список литературы

[1] "Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки - к профессии"под редакцией А.А. Заславского, А.Б. Скопенкова, М.Б. Скопенкова. Параграф II Геометрия, Глава 12.2 — М.: МЦНМО, 2009.

[2] Акопян А. Геометрия в картинках. — М., 2011.

[3] Акопян А. Заславский А., Геометрические свойства кривых второго порядка. — М.: МЦНМО, 2007.