

**Геометрическое место ортоцентров треугольников,
вписанных в конику**
А.А.Заславский, А.И.Сгибнев

Для начала напомним хорошо известные факты.

Задача 1. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно стороны AB , лежит на описанной окружности треугольника.

Утверждение задачи 1 можно переформулировать следующим образом.

Пусть даны окружность ω и ее хорда AB . Тогда геометрическим местом ортоцентров вписанных в ω треугольников ABC является окружность, симметричная ω относительно прямой AB .

Задача 2. Докажите, что ортоцентр треугольника, вписанного в равностороннюю гиперболу Γ , лежит на Γ .

Утверждение задачи 2 также можно переформулировать.

Пусть даны равносторонняя гипербола Γ и ее хорда AB . Тогда геометрическим местом ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC является сама гипербола Γ .

Сформулируем теперь общий

Вопрос. Пусть даны коника Γ и ее хорда AB . Найти геометрическое место ортоцентров вписанных в Γ треугольников ABC .

Задача 3. Найдите ответ на вопрос, если AB — хорда параболы, перпендикулярная ее оси.

Частичный ответ на вопрос можно получить с помощью следующей леммы.

Лемма. Пусть даны точки A, B и преобразование f , ставящее в соответствие каждой прямой l , проходящей через A , прямую $f(l)$, проходящую через B , причем f — проективно (т.е. сохраняет двойные отношения четверок прямых). Тогда геометрическим местом точек пересечения l и $f(l)$ является коника, проходящая через A и B . Если при этом $f(AB) = AB$, то коника распадается на две прямые, одна из которых совпадает с AB .

Задача 4. Докажите лемму.

Задача 5. Докажите, что искомое ГМТ является коникой.

Задача 6. В каких случаях полученная коника вырождена?

Задача 7*. Докажите, что ГМТ, соответствующие параллельным хордам коники Γ , получаются друг из друга параллельным переносом.

Задача 8*. Дайте точное описание искомого ГМТ.