Минимизация ранга восполнением матриц

представляют А. Воропаев, Т. Гараев, С. Дженжер,
О. Никитенко, А. Петухов, А. Скопенков *

Содержание

1 Мотивировки и некоторые основные результаты

Замечание (мотивировки; формально не используется далее)

«*Восполнение матриц — задача восстановления недостающих элементов в матрице, известной только частично. Одним из примеров такой задачи является восполнение матрицы с рейтингами фильмов в задаче Нетфликса: дана матрица рейтингов, в которой i, j-ый элемент равен оценке, поставленной пользователем i фильму j, если такая оценка есть, и пропущен в противном случае; мы хотим восполнить недостающие элементы этой матрицы, чтобы предсказать, насколько пользователям понравятся эти фильмы, и дать хорошие рекомендации...*» [MC] Пропущенные элементы матрицы заполняются так, чтобы минимизировать *ранг* восполненной матрицы. Все нужные определения (например, ранга) даны далее.

Для простоты мы рассматриваем матрицы над множеством $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ всех остатков по модулю 2 (с операциями сложения и умножения). Мы приведем интересные

* *А. Воропаев* (Москва). *Т. Гараев:* Московский Государственный Университет. *С. Дженжер, А. Скопенков:* Московский Физико-Технический Институт. *О. Никитенко:* Алтайский Технический Университет (Барнаул). *А. Петухов:* Институт Проблем Передачи Информации им. А.А. Харкевича (Москва). *А. Скопенков:* Независимый Московский Университет, https://users.mccme.ru/skopenko/.
Благодарим Е. Когана за разрешение использовать его текст [Ko21], В. Ретинского и Я. Абрамова за полезные обсуждения, Д. Деомидова и Ф. Нилова за переводы фрагментов текста, А. Рябичева и издательство МЦНМО за разрешение использовать подготовленные ими рисунки.

элементарные результаты из линейной алгебры. Эти результаты позволяют построить алгоритмы, оценивающие ранг частично заполненных матриц для частного случая восполнения диагонали (предложение 1.1 и теоремы 1.3, 1.4, см. также предложение 1.2). Далее мы рассмотрим более сложную задачу. Вместо соотношений вида $M_{ij} = a_{ij}$ для некоторых элементов M_{ij} матрицы M (где a_{ij} это известные элементы) мы рассмотрим более сложные соотношения на элементы матрицы. Мы оценим минимальный ранг матриц с такими соотношениями (теоремы 5.1, 7.1).

Краткий обзор истории этой и близких задач см. в [MC, NKS] и [Ko21, Remark 4]. Эти результаты имеют приложения к вложениям графов в неориентируемые поверхности (включая вложение по модулю 2, см. начало §5) и вложениям k-мерных «гиперграфов» в $2k$-мерные поверхности, см. [KS21, KS21e, DS22]. В частности, теоремы 1.3, 1.4 влекут существование полиномиальных (по количеству рёбер) алгоритмов, распознающих «слабую реализуемость» «графов с вращениями» на неориентируемых поверхностях (см. замечание ниже).

Обозначим через $\mathbb{Z}_2^{s\times n} = (\mathbb{Z}_2^s)^n$ множество всех $s\times n$ матриц с элементами из $\mathbb{Z}_2$.

Предложение 1.1. *(a) Пусть имеется симметричная матрица с элементами из $\mathbb{Z}_2$. Тогда следующие условия равносильны:*

- *можно поменять некоторые элементы на главной диагонали так, чтобы все ненулевые строки матрицы оказались равны;*
- *нельзя сделать такую одинаковую перестановку строк и столбцов[1], что в верхнем левом углу полученной матрицы будет стоять подматрица вида:*

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & * & 0 \\ 1 & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix},$$

*где через * обозначены произвольные (возможно, различные) элементы.*

(b) Существует алгоритм сложности $O(n^2)$, который для любой матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ определяет, можно ли поменять некоторые элементы на главной диагонали так, чтобы в получившейся матрице все ненулевые строки были равны.

Часть «только тогда» пункта (a) можно сдавать отдельно.

Алгоритмические результаты в этом тексте могут быть пропущены участниками, ориентированными на теорию, поскольку эти результаты являются простыми следствиями математических результатов. Сложность алгоритма — количество «элементарных» шагов в этом алгоритме. Алгоритм имеет сложность $O(f(n))$, если сложность не превосходит $Cf(n)$ для некоторой константы $C > 0$ для всех n.

Квадратная матрица $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ называется **вырожденной**, если сумма её нескольких различных столбцов (ненулевого количества столбцов) равна нулевому столбцу (т. е. столбцу, состоящему только из нулей). Иначе матрица называется **невырожденной**. Вводные задачи о вырожденных матрицах, полезные для следующего результата, приведены в §2.

[1] Это означает, что строки и столбы последовательно занумерованы числами от 1 до n и выбрана перестановка f этих чисел; строки и столбцы переставляются так, что i,j-ый элемент становится $f(i), f(j)$-ым.

Предложение 1.2. *(a) Для любой матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ можно поменять несколько элементов на главной диагонали так, чтобы получившаяся матрица была вырожденной.*

(b) То же с заменой «вырожденной» на «невырожденной».

Рассмотрим матрицу $M \in \mathbb{Z}_2^{s\times n}$. **Ранг** $\operatorname{rk} M$ — максимальное количество столбцов матрицы M таких, что сумма никаких из них не равна нулю. (Это «размерность» «векторного пространства», образованного столбцами матрицы). Вводные задачи на ранг, полезные для следующих результатов, приведены в §3.

Для $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ обозначим через $R(M)$ минимальный из рангов всех матриц, полученных путем изменения некоторых чисел на главной диагонали матрицы M.

Матрица называется **диагональной**, если все её значения вне главной диагонали равны 0.

Теорема 1.3. *(a') Чтобы сделать квадратную матрицу ранга k из квадратной матрицы ранга n изменением некоторых чисел на главной диагонали, необходимо изменить не менее $|n-k|$ чисел.*

(a) Для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ неравенство $R(M) \leqslant k$ равносильно существованию диагональной матрицы D с не более чем k нулями на главной диагонали такой, что $\operatorname{rk}(M+D) \leqslant k$.

(b) Для любого фиксированного k существует алгоритм сложности $O(n^{k+3})$, определяющий для любой матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$, верно ли, что $R(M) \leqslant k$.

Единичной матрицей E называется диагональная матрица, у которой все значения на диагонали равны 1.

Теорема 1.4. *(a) Для любой невырожденной матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ и диагональной матрицы $D \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ верно, что $2\operatorname{rk}(M+D) \geqslant \operatorname{rk}(M+E)$.*

(b) Существует алгоритм сложности $O(n^4)$, который для матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ находит число k такое, что $k/2 \leqslant R(M) \leqslant k$.

Замечание (определение слабой реализуемости; формально не используется далее)

Иероглифом называется (неориентированное циклическое) слово длины $2n$ из n букв, в котором каждая буква встречается дважды.

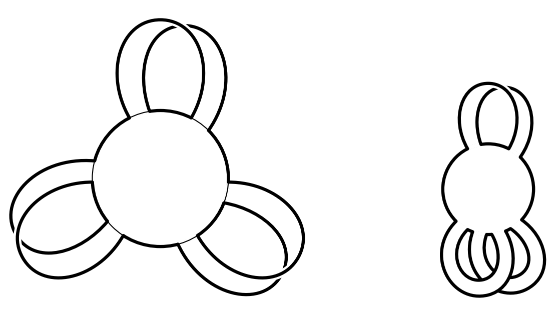

Рис. 1: Диск с ленточками, соответствующий иероглифу *aabbcc* (слева) и *aabcbc* (справа)

Возьмем границу выпуклого многоугольника. Отметим на ней непересекающиеся отрезки, отвечающие буквам данного слова, в том порядке, в котором буквы идут в слове. Для каждой буквы соединим (необязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой (т. е. «растянутым» и «помятым» прямоугольником) так, чтобы разные ленточки не пересекались. Ленточки могут быть перекрученными или неперекрученными. *Диском с ленточками*, отвечающим данному слову, называется объединение построенных (двумерного) выпуклого многоугольника и ленточек.

Назовем иероглиф *слабо реализуемым* на ленте Мёбиуса, если из неё можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу. Можно аналогично определить слабую реализуемость на бутылке Клейна и других неориентируемых поверхностях.

Две буквы a, b в иероглифе H *перекрещиваются в* H, если они чередуются в циклической последовательности данного иероглифа (т. е. если они идут в циклическом порядке $abab$, а не $aabb$). Определим *матрицу перекрещиваний* $M(H) \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ иероглифа H следующим образом. На главной диагонали поставим нули. Поставим единицу в клетку (i, j) для $i \neq j$, если буквы i, j перекрещиваются в H, в противном случае поставим ноль.

Верен следующий результат: *Иероглиф* H *слабо реализуем на ленте Мёбиуса тогда и только тогда, когда* $R\big(M(H)\big) \leqslant 1$.

См. подробнее [Bi20], [Ko21, Appendix], [Sk20, §2].

Рекомендации участникам

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если задача выделена словом «теорема» («лемма», «следствие» и т. д.), то её утверждение более важное. Как правило, мы приводим (в виде задачи) *формулировку* красивого или важного утверждения *перед* его *доказательством.* В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться последующие задачи. Мы не лишаем Вас удовольствия самостоятельно найти момент, когда Вы наконец-то сможете доказать такое утверждение. Вообще, если Вы застряли на какой-то задаче, попробуйте перейти к следующим, они могут оказаться полезными. *Замечания* и задачи, помеченные звёздочками, формально не используются в дальнейшем. В тексте определения важных понятий помечены **жирным шрифтом**, чтобы затем было проще их найти. Приглашаем Вас *обсуждать* с жюри возникающие вопросы. Те, кто успешно работают над проектом, завоюют право получить интересные *дополнительные задачи для исследования.*

Участник (или команда), решающий задачи проекта, получает «боб» за каждое **письменное решение для пользователя** (не являющееся просто ответом), оцененное в «+» или «+.».
См. рекомендации https://www.mccme.ru/circles/oim/home/pism.pdf
Дополнительные бобы могут выдаваться за красивые решения, решения сложных задач или оформление некоторых решений в системе TEX. У жюри бесконечно много бобов. У каждого участника (или каждой команды) в начале один боб. Решения можно сдавать и **устно**, и **письменно для соавтора**, отдавая один боб за каждые пять попыток (неважно, удачных или нет).

Пожалуйста, сообщите нам, если Вы знаете решения каких-то из предложенных задач. Это не противоречит Вашему участию в проекте, но это и не обязывает Вас решать этот проект. После проверки у Вас некоторых из задач, названных Вами решёнными заранее, Вы сможете пользоваться результатами всех этих задач. При этом решения этих задач не будут считаться Вашим достижением на ЛКТГ. Зато у Вас появится возможность дойти до более сложных задач. Мы будем рады их выдать, они уже готовы!

(В проекте задачи были разбиты следующим образом: сначала задачи до теоремы 4.3 включительно, затем некоторые решения к простым задачам из §§1–2, затем остальные задачи и оставшиеся решения.)

2 Вырожденные матрицы

2.1. *(a1-a4) Какие из следующих матриц являются вырожденными?*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. *(a) Вырожденность матрицы сохраняется при перестановке столбцов (строк).*

(b) Вырожденность матрицы сохраняется при добавлении одного столбца (одной строки) к другому (другой).

(c) Любая матрица может быть превращена в диагональную преобразованиями из пунктов (a,b).

(d) Матрица вырождена тогда и только тогда, когда она не может быть превращена в единичную преобразованиями из (a,b).

(f) Квадратная матрица вырождена тогда и только тогда, когда сумма её некоторых строк (ненулевого количества строк) является нулевой строкой.

(g) Существует алгоритм сложности $O(n^3)$, определяющий, является ли матрица $n \times n$ вырожденной.

Для матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ положим $\det M := 0$, если она вырождена, и $\det M := 1$ иначе. Это число называется *определителем* матрицы M. Другое обозначение:

$$\det\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{vmatrix}, \quad \det M = \begin{vmatrix} M_{1,1} & \dots & M_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & \dots & M_{n,n} \end{vmatrix}.$$

2.3. *(a)* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad + bc$.

(b) $\det(a_1+b_1, a_2, \dots, a_n) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n) + \det(b_1, a_2, \dots, a_n)$. *Здесь и ниже* $a_j, b_1 \in \mathbb{Z}_2^n$ *это столбцы длины* n.

(c) $\det(a_1, \dots, a_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n} \det(a_1^-, \dots, a_{i-1}^-, a_{i+1}^-, \dots, a_n^-)$, *где каждый столбец* $a_i^- \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$ *получается из столбца* a_i *удалением последней координаты.*

*(d)** $\det M = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \prod\limits_{i=1}^{n} M_{i,\sigma(i)}$, *где* S_n *— множество перестановок (т.е. взаимно однозначных соответствий)* $\sigma : [n] \to [n]$.

2.4. *(a1-a4) Для каждой матрицы из задачи 2.1 выясните, можно ли изменить некоторые элементы на главной диагонали так, чтобы полученная матрица была вырожденной.*

(b1-b4) То же с заменой «вырожденной» на «невырожденной».

Лемма 2.5. *(a) Пусть* $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ *— матрица с нулями на главной диагонали. Определим последовательность* $M^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ *рекурсивно.*

- $M^{(0)} := M$;
- $M^{(i)}$ *есть результат замены в* $M^{(i-1)}$ *элемента* $M^{(i-1)}_{i,i} = 0$ *на* $1+\delta_i$, *где* $\delta_i := \det M^{(i-1)}_{[i]\times[i]}$ *есть определитель верхней левой* $i\times i$*-подматрицы матрицы* $M^{(i-1)}$.

Тогда матрица $M^{(n)}$ *невырождена.*

(b) *Существует алгоритм сложности* $O(n^4)$, *который для матрицы* $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ *находит набор таких значений из* $\mathbb{Z}_2$, *что после подстановки их на главную диагональ матрицы* M *получится невырожденная матрица.*

3 Ранг матрицы

3.1. *(a1-a4) Найдите* $\operatorname{rk} M$ *для матриц*

$$M = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(b1-b4) Найдите $R(M)$ *для матриц из задачи 2.1.*

3.2. *Выберем матрицу* $M \in \mathbb{Z}_2^{s\times n}$.

(a) *Из матрицы* M *можно выбрать* $\operatorname{rk} M$ *столбцов так, чтобы любой столбец был суммой нескольких выбранных столбцов.*

(b) *Пусть имеется* k *столбцов (не обязательно матрицы* M*) таких, что любой столбец матрицы* M *есть сумма нескольких из них. Тогда* $\operatorname{rk} M \leqslant k$.

(c) *Ранг подматрицы не превосходит ранга матрицы.*

3.3. (a) *Перестановка столбцов (или строк) не меняет ранга матрицы.*

(b) *Добавление одного столбца к другому столбцу (или одной строки к другой) не меняет ранга матрицы.*

(c) *Ранг матрицы равен максимальному количеству её строк таких, что сумма никаких из них не равна нулевой строке.*

(d) *Ранг матрицы равен максимальному размеру её невырожденной квадратной подматрицы.*

Квадратная матрица, в которую выставлены значения из $\mathbb{Z}_2$, называется **чётной**, если все её значения на главной диагонали равны нулю.

3.4. (a) *Для любой* $M \in \mathbb{Z}_2^{s\times n}$ *все ненулевые строки равны тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rk} M \leqslant 1$.

(b) *Для симметричной матрицы* $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ *все ненулевые строки равны тогда и только тогда, когда, используя одинаковые перестановки строк и столбцов, из неё можно получить матрицу, левый верхний угол которой состоит из единиц, а элементы вне этого квадрата равны нулю.*

(c) *Ранг любой ненулевой чётной симметричной матрицы больше единицы.*

3.5. *Величина* $R(M)$ *необязательно сохраняется при*

(a) *перестановках столбцов;*

(b) *добавлении одного столбца к другому.*

3.6. *(a) Существует алгоритм сложности $O(n^3)$, вычисляющий ранг матрицы из $\mathbb{Z}_2^{s\times n}$, $s \leqslant n$.*

(b) Для всякого числа k существует алгоритм сложности $O(n^2)$, проверяющий свойство «$\mathrm{rk}\, M \leqslant k$» для $M \in \mathbb{Z}_2^{s\times n}, s \leqslant n$.*

Лемма 3.7. *Пусть M, D — это матрицы одного размера, в клетках которых стоят элементы $\mathbb{Z}_2$. Тогда*

(a) $\mathrm{rk}(M + D) \leqslant \mathrm{rk}\, M + \mathrm{rk}\, D$*;*

(b) $\mathrm{rk}(M + D) \geqslant \mathrm{rk}\, M - \mathrm{rk}\, D$.

3.8. *Существует алгоритм сложности $O(n^{k+3})$, находящий по матрице $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ диагональную матрицу D такую, что*

(a) $\mathrm{rk}(M + D) \leqslant k$*,*

(b) $\mathrm{rk}(M + D) = k$*,*

при условии, что такая матрица D существует.

3.9. *Для любых ли $m, k \leqslant n$ и матрицы $M \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$ ранга m верно следующее: если матрица ранга k может быть получена изменением некоторого количества диагональных элементов матрицы M, то это может быть сделано изменением ровно $|m - k|$ элементов?*

3.10. *(a,b,c) Найдите число матриц ранга k в $\mathbb{Z}_2^{n\times n}$ для $k = 0, 1, 2$.*

4 Вложения по модулю 2 графов в поверхности

Данный раздел не нужен для понимания дальнейшего текста, однако он дает мотивацию к §5.

Мы будем обозначать через S либо тор, либо сферу с ручками, либо ленту Мёбиуса, либо бутылку Клейна, либо какую-то другую 2-мерную поверхность. Их простое определение можно найти, например, в §2.1 в

[Sk20]=https://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf

Далее изображения графов на S могут иметь самопересечения. *Вложением* называется изображение графа без самопересечений.

4.1. *Существуют вложения графов* *(a1,a2,a3) K_5, K_6, K_7 в тор;*

(b1,b2) K_5, K_6 в ленту Мёбиуса;

(c) K_8 в сферу с двумя ручками;

(d) K_m в сферу с каким-то числом (зависящим от m) ручек.

Замечание. *В данной задаче требуются не строгие доказательства, а большие, понятные и желательно красивые рисунки.*

4.2. *Граф K_5 может быть изображён на плоскости так, что изображения (то есть образы) любых двух несмежных рёбер пересекаются в чётном числе точек.*

Точкой самопересечения изображения называется точка на изображении, которая отвечает более чем одной точке графа.

Говорят, что изображение графа находится **в общем положении**, если

- любой точке самопересечения отвечают ровно две точки графа;
- изображение любой вершины не является точкой самопересечения;

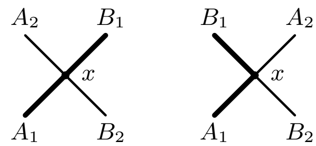

Рис. 2: Трансверсальное пересечение и нетрансверсальное пересечение

- изображение графа имеет конечное число точек самопересечения, и
- в любых таких точках самопересечение трансверсальное (рис. 2)[2].

Изображение графа в общем положении называется $\mathbb{Z}_2$**-вложением**, если изображения любых двух несмежных рёбер пересекаются в чётном числе точек.

Замечание. Пусть S — либо плоскость, либо тор, либо лента Мёбиуса. Если граф допускает $\mathbb{Z}_2$-вложение в S, то этот граф допускает вложение в S. Тем не менее, существует граф, имеющий $\mathbb{Z}_2$-вложение в сферу с 4 ручками, но не вложимый в неё. См. ссылки в [Bi21, Remark 1.3.b,c].

Теорема 4.3. *Если граф K допускает $\mathbb{Z}_2$-вложение в сферу с g ручками, то*
(a) $g \geqslant (m-4)/3$ для $K = K_m$.
(b) $g \geqslant (m-5)^2/16$ для $K = K_m$.
(c) $g \geqslant (n-2)^2/4$ для $K = K_{n,n}$.

Идея доказательства теоремы 4.3 заключается в том, что на поверхности, в которую большой граф допускает $\mathbb{Z}_2$-вложение, пересечения кривых устроены достаточно сложно (в смысле ранга некоторой матрицы; см. утверждение 4.5). Точнее, теорема 4.3.a [PT19] следует из теорем 4.4 и 5.1.b вместе с утверждением 4.5 (все ниже). Теорема 4.3.b следует из пункта теоремы 4.3.c (докажите!). Теорема 4.3.c доказана в [FK19], см. структурированное изложение в [DS22]. Аналогично, утверждения 4.5 и 5.2 (вместе с теоремой 4.4 и её неориентированным аналогом) влекут несуществование $\mathbb{Z}_2$-вложения K_8 в тор, и K_7 в ленту Мёбиуса (или даже K_7 в бутылку Клейна, чей аналог для невложимости не следует из неравенства Эйлера). Аналогичным образом результат о невложимости в более высоких размерностях следует из теоремы 7.1.

Обозначим через $|X|_2 \in \mathbb{Z}_2$ чётность числа элементов в конечном множестве X.

Говорят, что замкнутые кривые $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ на S находятся в **общем положении**, если изображение графа (несвязного объединения p циклов), полученное из этих кривых, находится в общем положении. Их $p \times p$-*матрица пересечений* G определена как

$$G_{i,j} := \begin{cases} |\gamma_i \cap \gamma_j|_2, & \text{если } i \neq j, \\ |\gamma_i \cap \gamma_i'|_2, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где γ_i' — это кривая, близкая к кривой γ_i и в общем положении с ней.

Пользуйтесь следующей «гомологической теоремой Бетти» без доказательства.

[2]Строго говоря, трансверсальность легко определить только для PL (кусочно-линейного) изображения графа. PL кривые на торе легко определить, если рассматривать тор как склейку многоугольника. Тогда *PL кривая на торе* — это семейство ломаных на многоугольнике, удовлетворяющее некоторым условиям (выпишите эти условия!). Похожим образом любая поверхность S может быть получена склейкой многоугольника. (Для ленты Мёбиуса и бутылки Клейна см. [Sk20, §2.1]; для сферы с ручками см. визуализацию в `https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw` и в `https://www.youtube.com/watch?v=U5N5mg3MePM`.) Это позволяет определить PL кривые на S. Тогда изображение графа на S называется *PL (кусочно-линейным)*, если изображение любого ребра этого графа PL. Другая формализация приведена в [Sk20, §4, §5].

Теорема 4.4. *Для любых кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ в общем положении*

(a) на сфере с g ручками ранг их матрицы пересечений не превосходит $2g$.

(b) на диске с m лентами Мёбиуса ранг их матрицы пересечений не превосходит m.

Здесь *диск с k лентами Мёбиуса* — это фигура, изображённая на рис. 1, слева. Более точно, диск с m лентами Мёбиуса — это объединение диска и m попарно непересекающихся ленточек, концы которых приклеены к $2m$ попарно непересекающимся дугам на граничной окружности диска (ленточки могут не лежать в плоскости диска) так, что

• ориентации концов каждой из ленточек, заданные ориентацией граничной окружности диска, «сохраняют направление вдоль ленточки», и

• ленточки «разделены», т. е. существуют m попарно непересекающихся дуг A_i граничной окружности диска такие, что концы i-ой ленточки приклеены к двум непересекающимся дугам, содержащимся в A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Вы можете делать аппроксимации общего положения на интуитивном уровне.

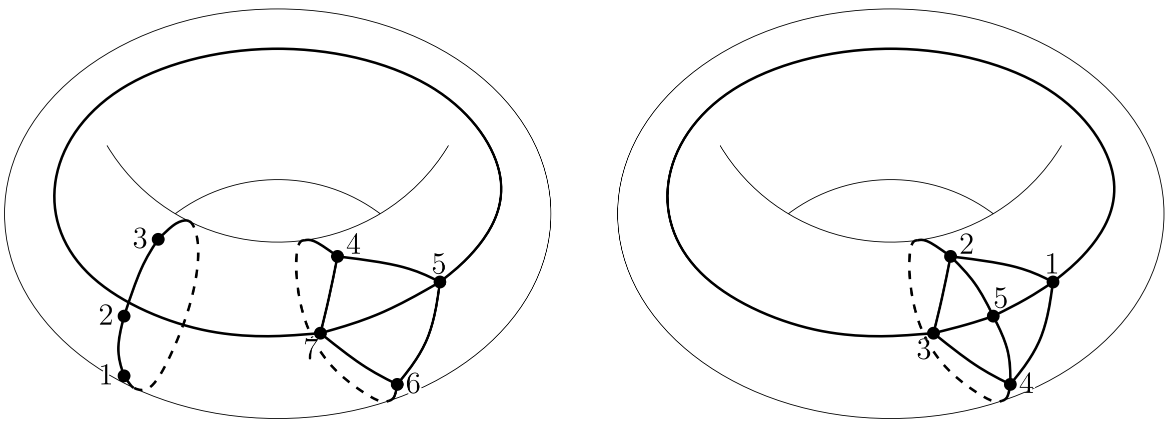

Рис. 3: Слева: K_3 и K_4 на торе. Справа: K_5 на торе

4.5. *Рассмотрим произвольное вложение (или $\mathbb{Z}_2$-вложение) $f\colon K_n \to S$. Рассмотрим произвольное отображение $f'\colon K_n \to S$ в общем положении с f и близкое к f. Для любых попарно различных $i, j, k \in [n]$ обозначим через $\langle ijk\rangle$ цикл длины три в K_n. Положим*

$$ijk \wedge pqr := \big|f\langle ijk\rangle \cap f'\langle pqr\rangle\big|_2.$$

Тогда

(4.5.1) $123 \wedge 456 = 0.$

(4.5.2) $123 \wedge 456 + 123 \wedge 567 + 123 \wedge 467 + 123 \wedge 457 = 0.$

$123 \wedge 345 + 123 \wedge 346 + 123 \wedge 356 + 123 \wedge 456 = 0.$

$123 \wedge 234 + 123 \wedge 235 + 123 \wedge 245 + 123 \wedge 345 = 0.$

$123 \wedge 123 + 123 \wedge 124 + 123 \wedge 134 + 123 \wedge 234 = 0.$

См. рис. 3, слева. Для одной формулы, охватывающей эти четыре, см. свойство линейной зависимости в §5.

(4.5.3) $125 \wedge 345 + 135 \wedge 245 + 145 \wedge 235 = 1.$

См. рис. 3, справа. Подсказка: выведите из (B) ниже.

Замечание. (A) Для любых попарно различных точек A_1, A_2, A_3, A_4 на прямой существует только одна «чередующаяся» раскраска в два цвета.

(B) Для любых попарно различных точек A_1, A_2, A_3, A_4 на окружности

$$|A_1A_2 \cap A_3A_4| + |A_1A_3 \cap A_2A_4| + |A_1A_4 \cap A_2A_3| = 1.$$

(B') Для любого отображения $f\colon K_5 \to \mathbb{R}^2$ «общего положения» число точек пересечений, образованных образами несмежных рёбер в $\mathbb{R}^2$, нечётно.

Простая импликация $(A) \Rightarrow (B')$ приводится в [Sk14] (в линейном случае; в PL случае импликация аналогична).

В отличие от невложимости, отсутствие $\mathbb{Z}_2$-вложимости не следует из неравенства Эйлера [Sk20, §2.4] (как и (B') не следует из формулы Эйлера для планарных графов).

5 Ранг матриц с соотношениями

Мы сокращаем $\{i\}$ до i. Назовём $\binom{[m]}{3}$*-матрицей* такую симметричную квадратную матрицу с элементами из $\mathbb{Z}_2$, строки и столбцы которой соответствуют всем 3-элементным подмножествам множества $[m]$, и для которой выполнены следующие свойства:

(тривиальность) $A_{P,Q} = 0$, если $P \cap Q = \varnothing$;

(линейная зависимость) для любых 4-элементного и 3-элементного подмножеств $F, P \subset [m]$

$$\sum_{i \in F} A_{F-i,P} = 0.$$

(нетривиальность) для любых $i \in [m]$ и 4-элементного подмножества $F \subset [m] - i$ выполнено $A_{F,i} = 1$, где

$$A_{F,i} := \sum_{\{X,Y\}\ :\ F \cup i = X \cup Y,\ |X|=|Y|=3,\ X \cap Y = i} A_{X,Y} = \sum_{\{\sigma,\tau\}\ :\ F = \sigma \sqcup \tau,\ |\sigma|=|\tau|=2} A_{i \sqcup \sigma, i \sqcup \tau}.$$

По утверждению 4.5, некоторая $\binom{[m]}{3}$-матрица строится по $\mathbb{Z}_2$-вложению $f\colon K_m \to S$ в поверхность. Действительно, положим $A_{\{i,j,k\},\{p,q,r\}} := ijk \wedge pqr$. Если поверхность S ориентируема, то такая матрица A чётна (т. е., $A_{P,P} = 0$ для любого 3-элементного подмножества $P \subset [m]$).

Теорема 5.1. *(a) Если A является $\binom{[m]}{3}$-матрицей, то* $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{m-4}{3}$.

(b) Более того, если A чётна, то $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{2(m-4)}{5}$.

Вы можете отдельно представлять решения следующих частных случаев теоремы 5.1. Более сильные оценки доказаны в §7.

5.2. *(a)* Не существует $\binom{[7]}{3}$-матрицы ранга* 1.

(b) Не существует чётной $\binom{[8]}{3}$-матрицы ранга менее* 3.

Теорему 5.1 можно вывести из предложений 5.7.a,b.

Следующее утверждение в дальнейшем не используется. В его доказательстве не обязательно явно предоставлять матрицу, достаточно описать её построение. Мы знаем только решение, использующее утверждения 4.1, 4.5 и теорему 4.4.

5.3. *(a) Существует ненулевая* $\binom{[4]}{3}$*-матрица.*

(b) Существует $\binom{[5]}{3}$*-матрица.*

(c) Для любого $m \geqslant 5$ *существует* $\binom{[m]}{3}$*-матрица.*

(a',b',c') То же для чётных матриц.

(d) Существует $\binom{[5]}{3}$*-матрица ранга* 1.

(e) Существует чётная $\binom{[5]}{3}$*-матрица ранга* 2.

(f) Существует $\binom{[6]}{3}$*-матрица ранга* 1.

(g) Существует* $\binom{[8]}{3}$*-матрица ранга более* 2.

5.4. *Пусть* B *— квадратная матрица размера* $\binom{m-1}{3}$*, полученная из* $\binom{[m]}{3}$*-матрицы удалением строк и столбцов, соответствующих всем подмножествам, содержащим элемент* m*. Тогда* B *является* $\binom{[m-1]}{3}$*-матрицей.*

5.5. *(a) Пусть* B *— квадратная матрица размера* $\binom{m-3}{3}$*, полученная из* $\binom{[m]}{3}$*-матрицы* A *удалением строк и столбцов, соответствующих подмножествам, содержащим хотя бы один элемент множества* $X := \{m, m-1, m-2\}$*. Если* $A_{X,X} = 1$*, то* $\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} B$.

(b) Пусть B *— квадратная матрица, полученная из* $\binom{[m]}{3}$*-матрицы* A *удалением строк и столбцов, соответствующих подмножествам, содержащим хотя бы один элемент* 3*-элементных подмножеств* $X, Y \subset [m]$*. Если* $A_{X,X} = A_{Y,Y} = 0$ *и* $A_{X,Y} = 1$*, то* $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B + 2$.

Обозначим через r_m минимальный ранг $\binom{[m]}{3}$-матрицы. Обозначим через $\widetilde{r_m}$ минимальный ранг чётной $\binom{[m]}{3}$-матрицы. Очевидно, $r_m = \widetilde{r_m} = 0$ для $m \leqslant 4$, и $r_m \leqslant \widetilde{r_m}$. Нетривиальность означает, что $r_5, \widetilde{r_5} \geqslant 1$. Теорема 5.1 утверждает, что $r_m \geqslant \dfrac{m-4}{3}$ и $\widetilde{r_m} \geqslant \dfrac{2(m-4)}{5}$.

5.6. *(a,b) Найдите* r_5, r_6 *и* $\widetilde{r_5}, \widetilde{r_6}, \widetilde{r_7}$*.*

(c) Обе последовательности $r_m, \widetilde{r_m}$ *не убывают.*

Предложение 5.7. *(a)* $r_m \geqslant \min\{r_{m-3} + 1, \widetilde{r_m}\}$ *(точнее, либо* $r_m = \widetilde{r_m}$*, либо* $r_m \geqslant r_{m-3} + 1$*);*

(b) $\widetilde{r_m} \geqslant \widetilde{r_{m-5}} + 2$.

6 Classification of symmetric bilinear forms

Fix a symmetric matrix $A \in \mathbb{Z}_2^{n\times n}$. For $U, V \in \mathbb{Z}_2^n$ let

$$A(U, V) = U \cdot_A V := \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j} U_i V_j \quad (= U^T A V).$$

A **basis** of $\mathbb{Z}_2^n$ is an inclusion-minimal ordered set of vectors such that every vector from $\mathbb{Z}_2^n$ is the sum of some vectors from this set.

Теорема 6.1. *For* $n = 2$ *there is a basis* X_1, X_2 *of* $\mathbb{Z}_2^2$ *and numbers* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$ *such that either* *(i) for any $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ we have*

$$(a_1X_1 + a_2X_2) \cdot_A (b_1X_1 + b_2X_2) = \gamma_1 a_1 b_1 + \gamma_2 a_2 b_2, \quad \text{or}$$

(ii) for any $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ we have

$$(a_1X_1 + a_2X_2) \cdot_A (b_1X_1 + b_2X_2) = a_1b_2 + a_2b_1.$$

Recall that problems stated after theorems are hints to proofs of the theorems.

6.2. *Assume that $n = 2$, $X \in \mathbb{Z}_2^2$ and $X \cdot_A X = 1$.*

(a) For any $P \in \mathbb{Z}_2^2$ there is $\lambda_{X,P} \in \mathbb{Z}_2$ such that for $P_X := P + \lambda_{X,P}X$ we have $P_X \cdot_A X = 0$.

(b) There is a basis $X_1 = X$, X_2 of $\mathbb{Z}_2^2$ and numbers $\gamma_1 = 1, \gamma_2 \in \mathbb{Z}_2$ such that the property (i) of Theorem 6.1 holds.

6.3. *Assume that $n = 2$, $X, Y \in \mathbb{Z}_2^2$ and $X \cdot_A Y = 1$, $X \cdot_A X = Y \cdot_A Y = 0$. Then $X_1 := X$, $Y_1 := Y$ is a basis of $\mathbb{Z}_2^2$ such that the property (ii) of Theorem 6.1 holds.*

Теорема 6.4. *For $n = 3$ there is a basis X_1, X_2, X_3 of $\mathbb{Z}_2^3$ and numbers $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{Z}_2$ such that either*

(i) for any $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}_2$ we have

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) \cdot_A (b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) = \gamma_1 a_1 b_1 + \gamma_2 a_2 b_2 + \gamma_3 a_3 b_3, \quad \text{or}$$

(ii) for any $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}_2$ we have

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3) \cdot_A (b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3) = a_1b_2 + a_2b_1 + \gamma_3 a_3 b_3.$$

6.5. *Assume that $X, Y \in \mathbb{Z}_2^3$ and $X \cdot_A Y = 1$, $X \cdot_A X = Y \cdot_A Y = 0$.*

(a) For any $P \in \mathbb{Z}_2^3$ there are $\lambda_{X,Y,P}, \lambda_{Y,X,P} \in \mathbb{Z}_2$ such that for $P_{X,Y} := P + \lambda_{X,Y,P}Y + \lambda_{Y,X,P}X$ we have $P_{X,Y} \cdot_A X = P_{X,Y} \cdot_A Y = 0$.

(b) There is a basis $X_1 = X$, $X_2 = Y$, X_3 of $\mathbb{Z}_2^3$ and a number $\gamma_3 \in \mathbb{Z}_2$ such that the property (ii) of Theorem 6.4 holds.

Теорема 6.6. *There are k, l and a basis $X_1, Y_1, \ldots, X_k, Y_k, Z_1, \ldots, Z_{n-2k}$ of $\mathbb{Z}_2^n$ such that $2k + l \leqslant n$ and for any $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}_2^k$ and $c, c' \in \mathbb{Z}_2^{n-2k}$ we have*

$$\begin{gathered}(a_1X_1 + b_1Y_1 + \ldots + a_kX_k + b_kY_k + c_1Z_1 + \ldots + c_{n-2k}Z_{n-2k}) \cdot_A \\ \cdot_A (a'_1X_1 + b'_1Y_1 + \ldots + a'_kX_k + b'_kY_k + c'_1Z_1 + \ldots + c'_{n-2k}Z_{n-2k}) = \\ = a_1b'_1 + a'_1b_1 + \ldots + a_kb'_k + a'_kb_k + c_1c'_1 + \ldots + c_lc'_l.\end{gathered}$$

If A is even, then $l = 0$.

6.7. *Assume that $X \in \mathbb{Z}_2^n$ and $X \cdot_A X = 1$.*

(a) State and prove the n-dimensional analogue of Assertion 6.2.a.

(b) There is a basis $X, E_1, \ldots, E_{n-1}$ of $\mathbb{Z}_2^n$ and a symmetric matrix $B \in \mathbb{Z}_2^{(n-1)\times(n-1)}$ such that for any $a, b \in \mathbb{Z}_2$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2^{n-1}$ we have

$$(aX + \lambda_1E_1 + \ldots + \lambda_{n-1}E_{n-1}) \cdot_A (bX + \mu_1E_1 + \ldots + \mu_{n-1}E_{n-1}) = ab + \lambda \cdot_B \mu.$$

6.8. *Assume that $X, Y \in \mathbb{Z}_2^n$ and $X \cdot_A Y = 1$, $X \cdot_A X = Y \cdot_A Y = 0$.*

(a) State and prove the n-dimensional analogue of Assertion 6.5.a.

(b) There is a basis $X, Y, E_1, \ldots, E_{n-2}$ of $\mathbb{Z}_2^n$ and a symmetric matrix $B \in \mathbb{Z}_2^{(n-2)\times(n-2)}$ such that for any $a_X, a_Y, b_X, b_Y \in \mathbb{Z}_2$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2^{n-2}$ we have

$$(a_XX + a_YY + \lambda_1E_1 + \ldots + \lambda_{n-2}E_{n-2}) \cdot_A (b_XX + b_YY + \mu_1E_1 + \ldots + \mu_{n-2}E_{n-2}) = a_Xb_Y + a_Yb_X + \lambda \cdot_B \mu.$$

7 Rank of matrix with relations: generalization

The following results are 'higher-dimensional' (and more strong) generalizations of Theorem 5.1, Assertions 5.4 and 5.5, and Proposition 5.7. They give a simplified well-structured exposition of [PT19, Theorem 1].

An $\binom{[m]}{l}$*-matrix* is a symmetric square matrix with $\mathbb{Z}_2$-entries whose rows and whose columns correspond to all l-element subsets of $[m]$, and for which (triviality) and the following properties hold:

(linear dependence) for each $(l+1)$-element and l-element subsets $F, P \subset [m]$

$$\sum_{i\in F} A_{F-i,P} = 0.$$

(non-triviality) for each $i \in [m]$ and $(2l-2)$-element subset $F \subset [m]-i$ we have $A_{F,i} = 1$, where

$$A_{F,i} := \sum_{\{X,Y\}\ :\ F\cup i=X\cup Y,\ X\cap Y=i,\ |X|=|Y|=l} A_{X,Y} = \sum_{\{\sigma,\tau\}\ :\ F=\sigma\sqcup\tau,\ |\sigma|=l-1} A_{i\sqcup\sigma,i\sqcup\tau}.$$

Analogously to Assertion 4.5, an $\binom{[m]}{l}$-matrix is constructed by a $\mathbb{Z}_2$-embedding of the $(l-1)$-dimensional skeleton of the $(m-1)$-dimensional simplex to a $2(l-1)$-dimensional manifold.

Теорема 7.1. *Suppose $l \geqslant 3$ and A is an $\binom{[m]}{l}$-matrix.*

(a) Then $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{m-2l+2}{l-1}$. *(b) If, moreover, A is even, then* $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{2(m-2l+2)}{l}$.

You can deduce Theorem 7.1 from Propositions 7.4.a,b.

7.2. *Let A' be the square matrix of size $\binom{m-1}{l}$ obtained from an $\binom{[m]}{l}$-matrix by deleting rows and columns corresponding to all subsets containing m. Then A' is an $\binom{[m-1]}{l}$-matrix.*

7.3. *Let A be an $\binom{[m]}{l}$-matrix and $X := \{m-l+1, m-l+2, \dots, m\}$.*

(a,b') Let B be the square matrix of size $\binom{m-l}{l}$ obtained from A by deleting rows and columns corresponding to subsets containing at least one of the elements of X.

If $A_{X,X} = 1$, then $\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} B$.

If $A_{X,X} = A_{Y,Y} = 0$ and $A_{X,Y} = 1$ for some $Y \subset [m]$, then $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B + 2$.

(b) Let C be the square matrix obtained from A by deleting rows and columns corresponding to subsets containing at least one element of X or of certain l-element subset $Y \subset [m]$. If $A_{X,X} = A_{Y,Y} = 0$ and $A_{X,Y} = 1$, then $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} C + 2$.

(a') For l-element subsets $P, Q \subset [m-l+1]$ define

$$D_{P,Q} := A_{P,Q} + A_{P,X}A_{Q,X}.$$

If $A_{X,X} = 1$, then $\operatorname{rk} D < \operatorname{rk} A$ and D is an $\binom{[m-l+1]}{l}$-matrix.

Assertions 7.3.a,b are only required to illustrate the idea of Assertions 7.3.a',b' by proving much easier results giving estimates $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{m-2l+2}{l}$ and, for A even, $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{2(m-2l+2)}{2l-1}$.

Denote by r_m the minimal rank of an $\binom{[m]}{l}$-matrix. Denote by $\widetilde{r_m}$ the minimal rank of an even $\binom{[m]}{l}$-matrix. Clearly, $r_m = \widetilde{r_m} = 0$ for $m \leqslant 2l-2$, both sequences $r_m, \widetilde{r_m}$ are non-decreasing, and $r_m \leqslant \widetilde{r_m}$. The non-triviality implies that $r_{2l-1}, \widetilde{r_{2l-1}} \geqslant 1$. Theorem 7.1 asserts that $r_m \geqslant \dfrac{m-2l+2}{l-1}$ and $\widetilde{r_m} \geqslant \dfrac{2(m-2l+2)}{l}$.

Предложение 7.4. *(a)* $r_m \geqslant \min\{r_{m-l+1}+1, \widetilde{r_m}\}$ *(more precisely, either* $r_m = \widetilde{r_m}$*, or* $r_m \geqslant r_{m-l+1}+1$*);*

(b) $\widetilde{r_m} \geqslant \widetilde{r_{m-l}} + 2$.

Proof of Proposition 7.4.a also uses an algebraic version (b) of the higher-dimensional analogue of the following result (a).

Предложение 7.5. *(a) Denote by* $X = \binom{\binom{[5]}{2}}{2}$ *the set of unordered pairs of* 2*-element subsets of* $[5]$*. For any* $i \in [5]$ *and a partition* $[5]-i = \sigma \sqcup \tau$ *into disjoint* 2*-element sets denote*

$$T_{i,\{\sigma,\tau\}} := \big\{\{\alpha,\beta\} \in X \ :\ \alpha \subset \sigma \sqcup i,\ \beta \subset \tau \sqcup i\big\}.$$

Denote by A_i *the sum modulo* 2 *(i. e., the symmetric difference) of sets* $T_{i,\{\sigma,\tau\}}$ *over all non-ordered partitions* $[5]-i = \sigma \sqcup \tau$ *as above. Then*

$$A_i = \big\{\{\alpha,\beta\} \in X \ :\ \alpha \cap \beta = \varnothing\big\}$$

and so is independent of i.

(b) Let A *be a symmetric square matrix with* $\mathbb{Z}_2$*-entries whose rows and whose columns correspond to all* l*-element subsets of* $[m]$*. If* A *satisfies the linear dependence property (from the definition of an* $\binom{[m]}{l}$*-matrix), then* $A_{F,i}$ *depends only on* $F \sqcup i$ *not on* (F,i)*.*

Указания и решения к §§1–7

Доказательство предложения 1.1 см. в [Bi20].

1.2. (a) Изменим числа на главной диагонали матрицы M таким образом, чтобы сумма элементов в каждой строке стала чётной. Тогда получившаяся матрица будет вырожденной.

(b) Используйте индукцию. См. лемму 2.5.a.

1.3. (a) Любая матрица с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$, полученная из матрицы M заменой элементов на главной диагонали, может быть представлена единственным образом как $M + D$, где D — диагональная матрица. По лемме 3.7.b, для всякой диагональной матрицы D с более чем k нулями на главной диагонали, мы имеем $\operatorname{rk}(M+D) \geqslant \operatorname{rk} M - \operatorname{rk} D > n-(n-k) = k$.

(b) Алгоритм (b) строится с помощью (a) и леммы 2.5.b. Заметим, что алгоритм леммы 2.5.b имеет сложность $O(n^4)$. Легко видеть, что перебор всех диагональных матриц $n \times n$ с не более k нулями на главной диагонали использует

$$O\left(n\binom{n}{0} + n\binom{n}{1} + \ldots + n\binom{n}{k}\right) \overset{(*)}{=} O\left((k+1)n\binom{n}{k}\right) = O\left(n \cdot n^k\right) = O\left(n^{k+1}\right)$$

операций. Здесь равенство (*) выполняется, так как можно считать, что $n \geqslant 2k$. Таким образом, ввиду утверждения 3.6.b, сложность всего алгоритма равна $O(n^4) + O(n^{k+1}n^2) = O(n^{k+3})$ (т. к. $k \geqslant 1$).

1.4. (a) Обозначим через n число столбцов в M и в D. По лемме 3.7.b мы имеем

$$\begin{aligned}2\operatorname{rk}(M+D) &= \operatorname{rk}(M+D) + \operatorname{rk}((M+E)+(E+D)) \geqslant \\ &\geqslant (\operatorname{rk} M - \operatorname{rk} D) + (\operatorname{rk}(M+E) - \operatorname{rk}(E+D)) = \\ &= n - \operatorname{rk} D + \operatorname{rk}(M+E) - (n - \operatorname{rk} D) = \operatorname{rk}(M+E).\end{aligned}$$

(b) Обозначим через M_n матрицу, полученную применением алгоритма леммы 2.5.b к матрице M. Положим $k := \mathrm{rk}(M_n + E)$. Тогда $R(M) = \mathrm{rk}(M + D)$ для некоторой диагональной матрицы D. Вместе с пунктом (a) это влечёт $k/2 \leqslant R(M) \leqslant k$, что и требовалось.

Число k может быть вычислено за $O(n^3)$ операций. Таким образом, общая сложность алгоритма равна $O(n^4) + O(n^3) = O(n^4)$.

2.1. *Ответ:* Матрицы A_1, A_2, A_3 вырождены. Матрица A_4 невырождена.

2.2. Указание: в (a)-(b) выделите максимальную невырожденую подматрицу; в (c) воспользуйтесь индукцией.

Пункт (a) понятен.

Зафиксируем матрицу M.

(b) Для матрицы M' обозначим через $\mathrm{row}_{i\to i+j}M'$ модификацию матрицы M', при котором i-ая строка переходит в сумму i-ой и j-ой строки; $\mathrm{col}_{i\to i+j}M'$ определяются аналогично.

Для доказательства пункта (b) достаточно показать, что M вырождена тогда и только тогда, когда $\mathrm{row}_{i\to i+j}M$ вырождена и тогда и только тогда, когда $\mathrm{row}_{i\to i+j}M$ вырождена.

Далее, заметим, что $\mathrm{row}_{i\to i+j}\mathrm{row}_{i\to i+j}M = M = \mathrm{col}_{i\to i+j}\mathrm{col}_{i\to i+j}M$. Таким образом, достаточно показать, что если M вырождена, то и $\mathrm{row}_{i\to i+j}M$, и $\mathrm{col}_{i\to i+j}M$ вырождены.

Предположим, что сумма столбцов с номерами $c_1, c_2, \ldots, c_s$ в M равна 0. Тогда сумма столбцов с теми же номерами в $\mathrm{row}_{i\to i+j}M$ равна 0. Если $i \notin \{c_1, \ldots, c_s\}$, то сумма столбцов с теми же номерами в матрице $\mathrm{col}_{i\to i+j}M$ равна 0. Если $i, j \in \{c_1, \ldots, c_s\}$, то сумма столбцов с номерами $\{c_1, \ldots, c_s\}\backslash j$ в матрице $\mathrm{col}_{i\to i+j}M$ равна 0. Если $i \in \{c_1, \ldots, c_s\}, j \notin \{c_1, \ldots, c_s\}$, тогда сумма столбцов с номерами $\{c_1, \ldots, c_s\}\cup\{j\}$ в матрице $\mathrm{col}_{i\to i+j}M$ равна 0. Это доказывает (b).

(c) Мы явно покажем, как матрицу M привести к диагональному виду.

Если все элементы в матрице M равны 0, то M диагональна. Пусть в матрице M есть ненулевой элемент. Переставим строку с этим элементом с верхней строкой, и столбец с этим элементом с левым столбцом. Прибавим верхнюю строку полученной матрицы к остальным строкам с ненулевым левым элементом. Аналогично прибавим левый столбец полученной матрицы к остальным столбцам с ненулевым верхним элементом. В полученной матрице в левом столбце и верхней строке все элементы нулевые, кроме левого верхнего. Удалим из полученной матрицы верхнюю строку и левый столбец.

Повторим описанную процедуру индуктивно к полученной подматрице. В итоге M приведется к диагональной матрице.

(d) С помощью п. (c) мы можем перевести матрицу M в диагональную матрицу, пользуясь преобразованиями из п. (a,b); также матрица M вырождена тогда и только тогда, когда полученная матрица диагональна. Остается заметить, что диагональная матрица невырождена тогда и только тогда, когда она равна единичной.

(f) Следует из прямых аналогов пунктов (a)-(d) для строк.

(g) Алгоритм строится по пункту (c). У алгоритма есть n больших шагов, один из которых описан во втором абзаце решения пункта (c). Каждый большой шаг содержит не более одной перестановки строк, не более одной одной перестановки столбцов и до $2n$ прибавлений строк и столбцов. Таким образом, сложность всего алгоритма равна $O(n) + n \cdot O(n^2) = O(n^3)$.

2.3. (a) Формула справедлива, так как матрица из $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ вырождена тогда и только тогда, когда или в ней есть нулевая строка, или нулевой столбец, или в когда в ней совпадают строки и совпадают столбцы (в последнем случае все элементы матрицы единицы).

Другое решение. Ниже приведины все матрицы из $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ с точностью до перестановки строк и столбцов:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Первые две матрицы невырождены, в то время как оставшиеся вырождены. Легко проверить формулу на данных матрицах.

(d) Следует из пунктов (b,c).

Далее приводим альтернативное прямое решение.

Рассмотрим шахматную доску размера $n \times n$. *Правильной расстановкой ладей* для данной шахматной доски называется такая расстановка n ладей на доске, что они не бьют друг друга. *Правильной M-расстановкой ладей* для данной шахматной доски называется такая правильная расстановка ладей, что все ладьи стоят на клетках, отвечающих единичным элементам матрицы M.

Обозначим через $\det^* M$ чётность числа правильных M-расстановок ладей. Тогда (d) можно переформулировать так: $\det M = \det^* M$. Равенство следует из того, что

- преобразования из 2.2.a, 2.2.b сохраняют $\det^* M$ и
- $\det M' = \det^* M'$ для диагональной матрицы M'.

2.4. Для любой невырожденной матрицы из задачи 2.1 мы показали, как поменять элементы на главной диагонали, что бы сделать её невырожденной; покажем обратное для A_4:

$$A_1 \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad A_2, A_3 \to \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}, \quad A_4 \to \begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2.5. (a) В следующем абзаце мы докажем индукцией по $i \geqslant 1$, что определитель $\Delta_i := \det M^{(i)}_{[i]\times[i]}$ левой верхней $i \times i$-угловой подматрицы матрицы $M^{(i)}$ равен 1. Таким образом, $\det M^{(n)} = \Delta_n = 1$.

База $i = 1$ выполняется, поскольку $\Delta_1 = 1+\delta_0 = 1$. Докажем шаг индукции $i-1 \to i$. Применим формулу разложения определителя Δ_i по последней строке соответствующей подматрицы матрицы $M^{(i)}$ (утверждение 2.3.c). Поскольку $M^{(i-1)}_{i,i} = M_{i,i} = 0$ и $\Delta_{i-1} = 1$, мы получаем $\Delta_i = \delta_i + (1 + \delta_i)\Delta_{i-1} = 1$.

(b) Алгоритм строится по пункту (a). Алгоритм по сути является вычислением определителей n квадратных подматриц размеров $1, 2, \dots, n$. Значит, по утверждению 2.2.g его сложность равна $O(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = O(n \cdot n^3) = O(n^4)$.

3.1. *Ответы:* (a1) 0; (a2) 1; (a3), (a4) 3; (b1) 0; (b2), (b3) 1; (b4) 2.

3.2 Указание к пункту (b): найдите число различных сумм из k столбцов.

Пункт (a) следует из определения ранга матрицы.

(b) По определению ранга, число различных сумм из столбцов матрицы M равно $2^{\mathrm{rk}\, M}$. С другой стороны, число таких сумм не превосходит 2^k. Следовательно, $2^k \geqslant 2^{\mathrm{rk}\, M}$ и $k \geqslant \mathrm{rk}\, M$.

3.3. Доказательства пунктов (a), (b) аналогичны доказательствам пунктов 2.2.a,b.

3.4. Пункт (a) ясен.

(b) Если для ненулевой симметричной матрицы M существует такая перестановка столбцов и строк, то $\operatorname{rk} M = 1$ по утверждению 3.2.b.

Возьмём симметричную матрицу M ранга 1. В качестве требуемой перестановки можно взять любую перестановку, отображающую ненулевые строки матрицы M в первую строку. Действительно, возьмём любые ненулевые строки с номерами i, j. Если $M_{i,j} = 0$, то существует такая ненулевая строка с номером k, для которой $M_{i,k} = 1$. Тогда строки с номерами j и k являются различными ненулевыми строками матрицы M ранга 1. Противоречие. Следовательно, $M_{i,j} = 1$.

(c) Возьмите ненулевые строки и примените аргументы из предыдущего пункта.

3.5. (a) $R\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = 2, \quad R\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 1.$

(b) $R\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix} = 2, \quad R\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = 1.$

3.6. Подсказка к пункту (a): см. утверждение 2.2.

(a) Алгоритм из доказательства утверждения 2.2.c обеспечивает диагональную матрицу того же ранга и имеет требуемую сложность. Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов в ней.

(b) Нужно построить такое множество S_k из столбцов, что

• эти столбцы составляют невырожденную подматрицу;

• первые k столбцов матрицы M являются суммами некоторых столбцов из множества S_k.

Если $|S_k| > r$ для некоторого $k = 1, \ldots, n$, то ответ «нет». Если для любого $k = 1, \ldots, n$ справедливо неравенство $|S_k| \leqslant r$, то ответ «да».

Ответ корректен, так как $|S_1| \leqslant |S_2| \leqslant \ldots \leqslant |S_n|$, и $|S_n| > r$ равносильно неравенству $\operatorname{rk} M > r$.

Положим $S_1 := \varnothing$, если первый столбец матрицы M равен 0, и $S_1 := \{1\}$ иначе.

Определим S_{k+1} по S_k. Составим множество всех сумм столбцов матрицы M с индексами из S_k (требуется $O(n)$ операций, так как $|S_k| \leqslant r$). Затем сравним $(k+1)$-ый столбец матрицы M со всеми суммами из этого множества (на это потребуется не более $2^r O(n) = O(n)$ операций). Если $(k+1)$-ый столбец матрицы M равен хотя бы одной сумме, то $S_{k+1} := S_k$. Иначе $S_{k+1} := S_k \cup \{k+1\}$.

Легко проверить, что общая сложность алгоритма равна $O(n^2)$.

3.7. Пункт (b) следует из пункта (a), поскольку

$$\operatorname{rk} M = \operatorname{rk}(M + D + D) \leqslant \operatorname{rk}(M + D) + \operatorname{rk} D \implies \operatorname{rk}(M + D) \geqslant \operatorname{rk} M - \operatorname{rk} D.$$

Теперь мы докажем пункт (a). Выберем столбцы из утверждения 3.2.a для матрицы M и матрицы D. Тогда каждый столбец матрицы $M + D$ является суммой нескольких из выбранных $\operatorname{rk} M + \operatorname{rk} D$ столбцов. По утверждению 3.2.b $\operatorname{rk}(M + D) \leqslant \operatorname{rk} M + \operatorname{rk} D$.

3.8. Утверждение и доказательство утверждения 3.8 аналогичны утверждению и доказательству теоремы 1.3.b.

3.9. Ответ: нет. Для матрицы M ниже и $k = 1$ утверждение неверно.

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

3.10. *Ответы:* (a) 1; (b) $(2^n-1)^2$; (c) $(2^n-1)^2(2^n-2)^2/6$.

(a) Существует ровно одна матрица ранга 0: матрица, у которой все элементы нулевые.

(b) Для матрица ранга 1 все столбцы, содержащие ненулевой элемент, совпадают. Следовательно, такие матрицы находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными парами, образованными

• непустым подмножеством множества столбцов («ненулевые столбцы»), и

• ненулевым вектором $v \in \mathbb{Z}_2^n$ («вектор-столбец»).

Поэтому существуют $(2^n-1)^2$ таких матриц.

(c) Зафиксируем матрицу M ранга 2. Тогда существует пара (v,w) столбцов матрицы M, образующих невырожденную матрицу. Любой другой столбец — это либо 0, либо v, либо w, либо $v+w$ (см. утверждение 3.2). Это множество $S=S_M$ из четырёх векторов не зависит от выбора двух столбцов v,w; мы назовем его *оболочкой столбцов* матрицы M. (Оно является двумерным векторным подпространством в $\mathbb{Z}_2^n$.)

Каждая оболочка столбцов определяется любой упорядоченной парой векторов в ней. Любая оболочка столбцов содержит ровно 6 таких упорядоченных пар. Значит, всего существует $(2^n-1)(2^n-2)/6$ оболочек столбцов. Мы докажем, что существуют ровно $(2^n-1)(2^n-2)$ матриц ранга 2 для данной оболочки столбцов. Таким образом, существует $(2^n-1)^2(2^n-2)^2/6$ матриц ранга 2.

Первое доказательство. Сопоставим матрице M два множества — множество столбцов X матрицы M, которые равны v или $v+w$, и множество столбцов Y матрицы M, которые равны w или $v+w$. Из условия $\operatorname{rk} M=2$ следует, что оба множества должны быть непустыми и $X\neq Y$. Более того, саму матрицу M по паре (X,Y) множеств можно восстановить. Пар (X,Y) различных непустых множеств ровно $(2^n-1)(2^n-2)$.

Второе доказательство. Для данного 4-элементного множества $S=\{0,v,w,v+w\}$ рассмотрим матрицу M, оболочкой столбцов которой является S. Рассмотрим матрицу M в качестве отображения ϕ_M из множества $[n]$ столбцов в S. Условие $\operatorname{rk} M=2$ равносильно следующему условию:

(*) образ отображения ϕ_M содержит по крайней мере два вектора из $v,w,v+w$.

Существует всего 4^n отображений $[n]\to S$. Существует всего 2^n отображений $[n]\to\{0,v\}$. То же самое верно для пары $\{0,v\}$, заменённой на $\{0,w\}$ или $\{0,v+w\}$. Есть лишь одно отображение $[n]\to\{0\}$. Значит, существуют ровно $4^n-3\cdot 2^n+2=(2^n-1)(2^n-2)$ отображений, удовлетворяющих условию (*).

Замечание. Вообще, количесто матриц ранга k из $\mathbb{Z}_2^{m\times n}$ равно

$$\frac{2^{k(k-1)/2}\Pi_{i=0}^{k-1}(2^{m-i}-1)\Pi_{i=0}^{k-1}(2^{n-i}-1)}{\Pi_{i=0}^{k-1}(2^{k-i}-1)}.$$

См. теорему 7.1.5 в [ACM29, p. 299] (эта теорема ещё более общая; для нашего случая матриц над $\mathbb{Z}_2$ возьмите $q=2$, $\mathrm{GF}(2)=\mathbb{Z}_2$).

4.1. (a1-a3) Изящная реализация графа K_5 на торе показана на рис. 4, слева. Реализации графов K_6 и K_7 аналогичны, см. рис. 4, в центре.

Другое решение (эта идея также работает для (c, d)): нарисуйте граф K_5 на плоскости с *одним* самопересечением, в малой окрестности точки самопересечения прикрепите ручку, а потом поднимите одно из рёбер как мост над другим ребром, проведя его по ручке, см. рис. 5, слева.

(b2) См. рис. 4, справа.

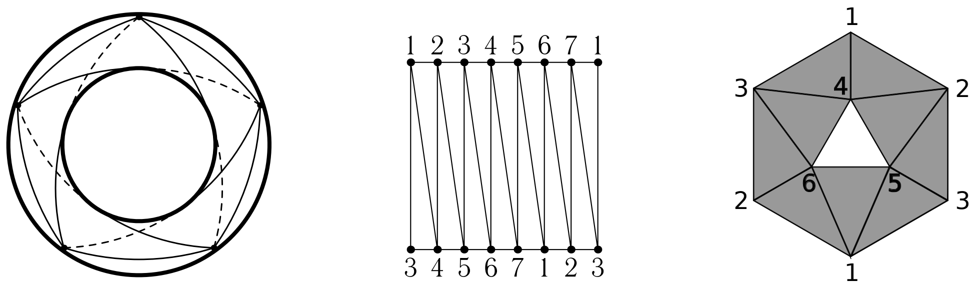

Рис. 4: Реализация непланарных графов

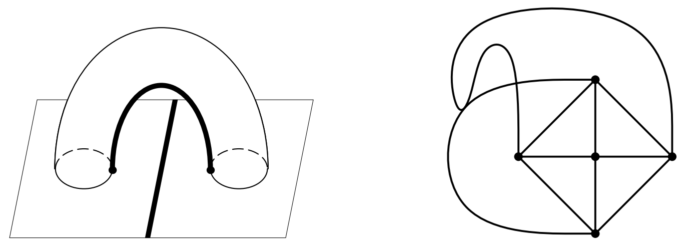

Рис. 5: Слева: разрешение самопересечения добавлением ручки. Справа: «чётная не общего положения реализация» графа K_5 на плоскости

4.2. См. рис. 5, справа.

5.1. (b) Индукция по m. База $m \leqslant 4$ очевидна. Из предложения 5.7.b и предположения индукции получаем

$$\widetilde{r_m} \geqslant \widetilde{r_{m-5}} + 2 \geqslant \frac{2(m-5-4)}{5} + 2 = \frac{2(m-4)}{5}.$$

(a) Индукция по m. База $m \leqslant 4$ очевидна. Из предложения 5.7.a, теоремы 5.1.b и предположения индукции получаем

$$r_m \geqslant \min\{r_{m-3}+1, \widetilde{r_m}\} \geqslant \min\left\{\frac{m-3-4}{3}+1, \frac{2(m-4)}{5}\right\} = \frac{m-4}{3}.$$

5.3. Через A^f обозначим $\binom{[m]}{3}$-матрицу, построенную по вложению $f\colon K_m \to S$, как описано в начале §5.

(a) Рассмотрим подграф K_4 на вершинах $1,2,3,4$ графа K_5. Рис. 3 справа задает вложение f графа K_4 в тор. Матрица A^f — искомая.

(b) Рис. 3 справа задает вложение f графа K_5 в тор. Матрица A^f — искомая.

(c) По утверждению 4.1.d, существует вложение f графа K_m в сферу с ручками. Матрица A^f — искомая.

(a', b', c') Матрицы из пунктов (a), (b) и (c) — искомые.

(d, e, f) Следуют из задач 5.6.a,b.

5.4. Следует из определений $\binom{[m]}{3}$-матрицы и $\binom{[m-1]}{3}$-матрицы.

5.5. (a, b) См. доказательство предложений 7.4.a,b ниже.

5.6. (a) Так как $\binom{[m]}{3}$-матрица для $m \geqslant 5$ невырождена, то $r_5, r_6 \geqslant 1$. Значения $r_5 = r_6 = 1$ достигаются на матрицах A^f для f из утверждения 4.1.b1, b2.

(b) Из утверждения 3.4.c следует, что $\widetilde{r}_5, \widetilde{r}_6, \widetilde{r}_7 \geqslant 2$. Значения $\widetilde{r}_5 = \widetilde{r}_6 = \widetilde{r}_7 = 2$ достигаются на матрицах A^f для f из утверждений 4.1.a1, a2, a3.

(c) Для $\binom{[m]}{3}$-матрицы A её $\binom{[m-1]}{3}$-подматрица B, введённая в утверждении 5.4, имеет такой же ранг, или меньший. Следовательно, $r_m \geqslant r_{m-1}$. Если матрица A чётная, то и матрица B чётная. Следовательно, $\widetilde{r_m} \geqslant \widetilde{r_{m-1}}$.

5.7. (a) (Take $l = 3$.) Take an $\binom{[m]}{l}$-matrix A such that $\operatorname{rk} A = r_m$. If A is even, then $r_m = \widetilde{r_m}$, so we are done. Otherwise there is an l-element subset $X \subset [m]$ such that $A_{X,X} = 1$. Let B be the 'restriction' of A to l-element subsets of $[m] - X$.

Then

$$r_m = \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B + 1 \geqslant r_{m-l} + 1, \quad \text{where}$$

• the first inequality follows by Assertion 5.5.a;

• the second inequality holds because B is a $\binom{[m]-X}{l}$-matrix by Assertion 5.4.

(b) (Take $l = 3$.) Take an even $\binom{[m]}{l}$-matrix A such that $\operatorname{rk} A = \widetilde{r_m}$. By the non-triviality $A \neq 0$. Hence there are l-element subsets $X, Y \subset [m]$ such that $A_{X,Y} = 1$. Let C be the 'restriction' of A to l-element subsets of $[m] - X - Y$.

Then

$$\widetilde{r_m} = \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} C + 2 \geqslant \widetilde{r_{m-2l+1}} + 2, \quad \text{where}$$

• the first inequality follows by Assertion 5.5.b;

• the second inequality holds because C is a $\binom{[m]-X-Y}{l}$-matrix by Assertion 5.4, and because $A_{X,Y} = 1$, so by the triviality $X \cap Y \neq \varnothing$, hence $|[m] - X - Y| \geqslant m - 2l + 1$.

6.7. (a) $\lambda_{X,P} = X \cdot_A P$.

6.8. (a) $\lambda_{X,Y,P} = X \cdot_A P$, $\lambda_{Y,X,P} = Y \cdot_A P$.

7.2. (For 5.4 take $l = 3$.) It is obvious that all the conditions for the mentioned submatrix are satisfied.

7.3. (a) (For 5.5.a take $l = 3$.) Let B' be the 'restriction' of A to X and to l-element subsets of $[m] - X$. Then

$$\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B' = \operatorname{rk} B + 1,$$

where equality holds because by the triviality $B'_{X,Z} = 0$ for any $Z \subset [m] - X$.

(b) (For 5.5.b take $l = 3$.) Let C' be the 'restriction' of A to X, Y and l-element subsets of $[m] - X - Y$. Then

$$\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} C' = \operatorname{rk} C + 2,$$

where equality holds because by the triviality $C'_{X,Z} = C'_{Y,Z} = 0$ for any $Z \subset [m] - X - Y$.

(b') Take a basis of $\mathbb{Z}_2^{\binom{m}{l}}$ corresponding to l-element subsets of $[m]$. Define a bilinear form A on $\mathbb{Z}_2^{\binom{m}{l}}$ by setting $A(P,Q) := A_{P,Q}$ for basic vectors P, Q. Take any l-element set $P \subset [m]$. Let

$$\overline{P} = \overline{P}(X,Y) := P + A_{X,P}Y + A_{Y,P}X.$$

Recall that

$$A_{X,Y} = A_{Y,X} = 1 \quad \text{and} \quad A_{X,X} = A_{Y,Y} = 0. \tag{*}$$

Hence

$$A(\overline{P}, X) = A(\overline{P}, Y) = 0 \tag{**}$$

(i. e., $\overline{P}$ is the orthogonal projection of P to the orthogonal complement of $\langle X, Y\rangle$ with respect to A). By the triviality, for $P \subset [m] - X$ we have $\overline{P} = P + A_{Y,P}X$. Hence for every l-element sets $P, Q \subset [m] - X$ we have

$$A(\overline{P}, \overline{Q}) = A_{P,Q} + 0 + 0 + 0 = B_{P,Q}. \tag{***}$$

(I. e., B is the Gramian matrix with respect to A of the 'projections' $\overline{P}$ of l-element sets $P \subset [m]-X$.) Let B' be the Gramian matrix with respect to A of X, Y and the 'projections' $\overline{R}$ of l-element sets $R \subset [m]-X$. I. e., $B'_{P,Q} = A(\widehat{P}, \widehat{Q})$, where $\widehat{P} = P$ if $P \in \{X, Y\}$, and $\widehat{P} = \overline{P}$ otherwise ($\widehat{Q}$ is defined analogously). Then

- $B'_{X,Y} = B'_{Y,X} = 1$, $B'_{X,X} = B'_{Y,Y} = 0$ (by (*)),
- $B'_{X,P} = B'_{P,X} = B'_{Y,P} = B'_{P,Y} = 0$ for $P \neq X, Y$ (by (**)), and
- $B'_{P,Q} = B_{P,Q}$ for $P, Q \subset [m]-X$ (by (***)).

Hence $\operatorname{rk} B + 2 = \operatorname{rk} B' \leqslant \operatorname{rk} A$.

(a') In this paragraph we prove that $\operatorname{rk} D < \operatorname{rk} A$. Take a basis of $\mathbb{Z}_2^{\binom{m}{l}}$ corresponding to l-element subsets of $[m]$. Define a bilinear form A on $\mathbb{Z}_2^{\binom{m}{l}}$ by setting $A(P,Q) := A_{P,Q}$ for basic vectors P, Q. Let P_X be the orthogonal projection of P to the orthogonal complement of X (with respect to A), i. e., $P_X := P + A_{P,X}X$. We have

$$A(P_X, Q_X) = A(P,Q) + A(A_{P,X}X, Q) + A(P, A_{Q,X}X) + A(A_{P,X}X, A_{Q,X}X) = \\ = A_{P,Q} + A_{P,X}A_{X,Q} + A_{P,X}A_{Q,X} + A_{P,X}A_{Q,X}A_{X,X} = A_{P,Q} + A_{P,X}A_{Q,X} = D_{P,Q}.$$

Then D is the Gramian matrix (with respect to A) of the projections of subsets of $[m-l+1]$. Let D' be the Gramian matrix (with respect to A) of X and the projections of subsets of $[m-l+1]$. We have $D_{P,Q} = D'_{P,Q}$ for all subsets $P, Q \subset [m-l+1]$. Furthermore, $D'_{X,P} = D'_{P,X} = 0$ for any basic vector $P \neq X$ and $D'_{X,X} = A_{X,X} = 1$. Thus $\operatorname{rk} D = \operatorname{rk} D' - 1 < \operatorname{rk} A$.

In this paragraph we prove that D satisfies the triviality property. If $P \cap Q = \varnothing$, then either $P \cap X = \varnothing$, or $Q \cap X = \varnothing$. Hence $D_{P,Q} = A_{P,Q} + A_{P,X}A_{Q,X} = 0 + 0 = 0$.

In this paragraph we prove that D satisfies the linear dependence property. For each $(l+1)$-element and l-element subsets $F, P \subset [m-l+1]$ we have

$$\sum_{i\in F} D_{F-i,P} = \sum_{i\in F} A_{F-i,P} + A_{P,X} \sum_{i\in F} A_{F-i,X} = 0.$$

In this paragraph we prove that D satisfies the non-triviality property. By Proposition 7.5.b for D, we may assume that $i \neq m-l+1$. Then for each summand $D_{i\sqcup\sigma, i\sqcup\tau}$ of $D_{F,i}$ at least one of the sets $i \sqcup \sigma, i \sqcup \tau$ does not contain $m-l+1$ and hence does not intersect X. Hence $D_{i\sqcup\sigma,i\sqcup\tau} = A_{i\sqcup\sigma,i\sqcup\tau} + A_{i\sqcup\sigma,X}A_{i\sqcup\tau,X} = A_{i\sqcup\sigma,i\sqcup\tau}$. Thus $D_{F,i} = A_{F,i} = 1$.

7.4. (a) Take an $\binom{[m]}{l}$-matrix A such that $\operatorname{rk} A = r_m$. If A is even, then $r_m = \widetilde{r_m}$, so we are done. Otherwise there is an l-element subset $X \subset [m]$ such that $A_{X,X} = 1$. Without loss of generality $X = \{m-l+1, m-l+2, \ldots, m\}$. Then by Assertion 7.3.a'

$$r_m = \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} D + 1 \geqslant r_{m-l+1} + 1, \quad \text{where}$$

- D is the matrix defined in Assertion 7.3.a';
- the first inequality follows from Assertion 7.3.a';
- the second inequality holds because D is an $\binom{[m-l+1]}{l}$-matrix by Assertion 7.3.a'.

(b) Take an even $\binom{[m]}{l}$-matrix A such that $\operatorname{rk} A = \widetilde{r_m}$. By the non-triviality $A \neq 0$. Let X, Y, B be defined as in Assertion 7.3.b'. Then

$$\widetilde{r_m} = \operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B + 2 \geqslant r_{m-l} + 2, \quad \text{where}$$

- the first inequality follows from Assertion 7.3.b';

• the second inequality holds because B is an even $\binom{[m]-X}{l}$-matrix by Assertion 7.2.

7.5. (a) It suffices to check that for each pair $\{\alpha,\beta\}$ the number of sets $T_{i,\{\sigma,\tau\}}$ containing $\{\alpha,\beta\}$ is odd if and only if $\alpha\cap\beta=\varnothing$ (hence this parity not depend on i). Clearly, $|\alpha\cap\beta|\leqslant 2$.

Assume $|\alpha\cap\beta|=2$. Then $\{\alpha,\beta\}\notin T_{i,\{\sigma,\tau\}}$ for all i,σ,τ and hence $\{\alpha,\beta\}\notin A_i$ for all $i\in[5]$.

Assume $|\alpha\cap\beta|=1$. It suffices to consider the case $\alpha=\{1,2\}$, $\beta=\{1,3\}$. Then $\{\alpha,\beta\}\in T_{i,\{\sigma,\tau\}}$ iff $i=1$ and $\{\sigma,\tau\}$ is either $\big\{\{2,4\},\{3,5\}\big\}$ or $\big\{\{2,5\},\{3,4\}\big\}$ Therefore $\{\alpha,\beta\}\notin A_i$ for all $i\in[5]$.

Assume $|\alpha\cap\beta|=0$. It suffices to consider the case $\alpha=\{1,2\}$, $\beta=\{3,4\}$. Then $\{\alpha,\beta\}\in T_{i,\{\sigma,\tau\}}$ iff either

• $i=1$ and $\{\sigma,\tau\}=\big\{\{1,2,5\},\{1,3,4\}\big\}$, or
• $i=2$ and $\{\sigma,\tau\}=\big\{\{1,2,5\},\{2,3,4\}\big\}$, or
• $i=3$ and $\{\sigma,\tau\}=\big\{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\big\}$, or
• $i=4$ and $\{\sigma,\tau\}=\big\{\{1,2,4\},\{3,4,5\}\big\}$, or
• $i=5$ and $\{\sigma,\tau\}=\big\{\{1,2,5\},\{3,4,5\}\big\}$.

Therefore $\{\alpha,\beta\}\in A_i$ for every $i\in[5]$.

(b) It suffices to prove that $A_{G\sqcup i,j}=A_{G\sqcup j,i}$ for each $i,j\in[m]$ and $(2l-3)$-element subset $G\subset[m]-i-j$. Denote $\overline{\sigma}:=\{i,j\}\sqcup\sigma$. Then

$$A_{G\sqcup j,i}+A_{G\sqcup i,j}\overset{(1)}{=}\sum_{\{(\sigma,\tau)\ :\ G=\sigma\sqcup\tau,\ |\sigma|=l-2\}}(A_{\overline{\sigma},i\sqcup\tau}+A_{\overline{\sigma},j\sqcup\tau})\overset{(2)}{=}$$
$$=\sum_{\{(\sigma,\tau)\ :\ G=\sigma\sqcup\tau,\ |\sigma|=l-2\}}\ \sum_{t\in\tau}A_{\overline{\sigma},\overline{\tau-t}}\overset{(3)}{=}\sum_{t\in G}\ \sum_{\{(\sigma,\nu)\ :\ G-t=\sigma\sqcup\nu,\ |\sigma|=l-2\}}A_{\overline{\sigma},\overline{\nu}}\overset{(4)}{=}0,\quad\text{where}$$

• equality (1) holds because $A_{G\sqcup j,i}$ is equal to the sum of the first summands $A_{\overline{\sigma},i\sqcup\tau}$, and $A_{G\sqcup i,j}$ is equal to the sum of the second summands $A_{\overline{\sigma},j\sqcup\tau}$;
• equality (2) holds by the linear dependence for $F=\overline{\tau}$, $P=\overline{\sigma}$;
• equality (3) is obtained by changes of the order of summation and of variable $\nu=\tau-t$;
• equality (4) holds because ordered decompositions (σ,ν) of $G-t$ into $(l-2)$-element subsets σ,ν split into pairs $\{(\sigma,\nu),(\nu,\sigma)\}$ and $A_{\overline{\sigma},\overline{\nu}}+A_{\overline{\nu},\overline{\sigma}}=0$.

Список литературы

[ACM29] *D. Hachenberger, D. Jungnickel.* Topics in Galois Fields (2020).

[Bi20] * *А. Бикеев.* Реализуемость дисков с ленточками на ленте Мёбиуса. Математическое просвещение. Сер. 3. Вып.28. 2021. С 150-158. Исправления в печати. arXiv:2010.15833.

[Bi21] *A. I. Bikeev,* Criteria for integer and modulo 2 embeddability of graphs to surfaces, arXiv:2012.12070v2.

[DS22] *S. Dzhenzher and A. Skopenkov,* To the Kühnel conjecture on embeddability of k-complexes into $2k$-manifolds, arXiv:2208.04188.

[FK19] *R. Fulek, J. Kynčl,* $\mathbb{Z}_2$-genus of graphs and minimum rank of partial symmetric matrices, 35th Intern. Symp. on Comp. Geom. (SoCG 2019), Article

No. 39; pp. 39:1–39:16, https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10443/pdf/LIPIcs-SoCG-2019-39.pdf. We refer to numbering in arXiv version: arXiv:1903.08637.

[IF] * http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Intersection_form

[Ko21] *E. Kogan.* On the rank of $\mathbb{Z}_2$-matrices with free entries on the diagonal, arXiv:2104.10668.

[KS21] * *E. Kogan and A. Skopenkov.* A short exposition of the Patak-Tancer theorem on non-embeddability of k-complexes in $2k$-manifolds, arXiv:2106.14010.

[KS21e] *E. Kogan and A. Skopenkov.* Embeddings of k-complexes in $2k$-manifolds and minimum rank of partial symmetric matrices, arXiv:2112.06636.

[MC] https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_completion#Low_rank_matrix_completion

[NKS] *L. T. Nguyen, J. Kim, B. Shim.* Low-rank matrix completion: a contemporary survey. arXiv:1907.11705

[PT19] *P. Paták and M. Tancer.* Embeddings of k-complexes into $2k$-manifolds. arXiv:1904.02404.

[Sk14] * *A. Skopenkov,* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory, arXiv:1402.0658.

[Sk20] * *А. Скопенков,* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, МЦНМО, Москва, 2020 (2ое издание).
Фрагмент книги: http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf. Фрагмент английской версии:
https://www.mccme.ru/circles/oim/obstructeng.pdf.