

УДК 515.14  
ББК 22.152  
С44

**Скопенков А. Б.**

С44 Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. — 2-е изд., доп. — М: МЦНМО, 2020. — 304 с.  
ISBN 978-5-4439-1561-6

В книге рассматриваются важнейшие наглядные объекты математики, важные для приложений: маломерные многообразия и векторные поля на них, непрерывные отображения и их деформации. Показано, как при решении геометрических проблем естественно возникают основные идеи, понятия и методы алгебраической топологии: группы гомологий, препятствия и инварианты, характеристические классы.

Основные идеи представлены на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. За счет этого книга доступна для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты. Для ее изучения желательно минимальное знакомство с графами, векторными полями и поверхностями, хотя все необходимые определения приводятся в начале. Часть материала преподнесена в виде задач, к большинству из которых приведены указания.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, работников науки и образования, изучающих и применяющих алгебраическую топологию.

Первое издание книги вышло в 2015 г.

Благодарю издательство МЦНМО за разрешение выложить эту электронную версию. В нее вошли оглавление, введение, все пункты без звездочек из первые пяти параграфов (без решений) и список литературы бумажной версии, а также «дополнительные» пункты (2.9, 8.9, 13.5-13.7, 15.7, 15.8, 16.6), которых нет в бумажной (и в продаваемой электронной) версии 2-го издания.

**ISBN 978-5-4439-1561-6**

© Скопенков А. Б., 2020  
© МЦНМО, 2020

# Оглавление

## Введение

0.1. Зачем эта книга . . . . .	9
0.2. Основная идея . . . . .	11
0.3. Содержание и используемый материал . . . . .	12
0.4. Задачи . . . . .	14
0.5. Для специалистов . . . . .	15
0.6. Благодарности . . . . .	16
0.7. Обозначения и соглашения . . . . .	17

## § 1. Графы на плоскости

1.1. Введение и основные результаты . . . . .	18
1.2. Glossary of Graph Theory . . . . .	19
1.3. Графы и раскраски карт на плоскости . . . . .	22
1.4. Строгое доказательство формулы Эйлера . . . . .	23
1.5. Планарность дисков с ленточками . . . . .	28
1.6. Планарность утолщений . . . . .	31
1.7. Иероглифы и ориентируемые утолщения* . . . . .	34
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	36

## § 2. Наглядные задачи о поверхностях

2.1. Примеры поверхностей . . . . .	44
2.2. Разрезания и вырезания . . . . .	48
2.3. Невырезаемость и разбивающие кривые . . . . .	50
2.4. Графы на поверхностях и раскраски карт . . . . .	52
2.5. Неравенство Эйлера для сфер с ручками . . . . .	54
2.6. Реализуемость иероглифов и утолщений . . . . .	57
2.7. Топологическая эквивалентность (гомеоморфность) . . . . .	60
2.8. Неориентируемые поверхности* . . . . .	63
2.9. Реализуемость утолщений* . . . . .	68
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	75

## § 3. Векторные поля на плоскости

3.1. Введение и основные результаты . . . . .	89
---	----

3.2. Гомотопность замкнутых ломаных . . . . .	92
3.3. Векторные поля . . . . .	92
3.4. Гомотопность векторных полей . . . . .	93
3.5. Непрерывные отображения . . . . .	95
3.6. К теоремам Брауэра и Борсука—Улама . . . . .	96
3.7. Гомотопность непрерывных отображений . . . . .	97
3.8. Число оборотов вектора . . . . .	98
3.9. Поднятия и их применения . . . . .	99
3.10. Гомотопическая классификация векторных полей . . . .	102
3.11. Кусочно линейные отображения и аппроксимации . . . .	103
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	106

#### **§ 4. Векторные поля на двумерных поверхностях**

4.1. Введение и основные результаты . . . . .	115
4.2. Векторные поля и гомотопии для сферы . . . . .	116
4.3. Классификация векторных полей на торе . . . . .	119
4.4. Векторные поля на других поверхностях . . . . .	121
4.5. Двумерные многообразия . . . . .	122
4.6. Теорема Эйлера—Пуанкаре . . . . .	125
4.7. Касательные векторные поля общего положения . . . . .	127
4.8. Построение векторных полей по триангуляции . . . . .	130
4.9. Другое построение векторных полей* . . . . .	134
4.10. Нормальные векторные поля* . . . . .	136
4.11. Гомологический инвариант векторных полей* . . . . .	138

#### **§ 5. Двумерные многообразия**

5.1. Гиперграфы и их тела . . . . .	142
5.2. Гомеоморфность гиперграфов . . . . .	144
5.3. Recognition of 2-hypergraphs being homeomorphic . . . .	147
5.4. Доказательство теоремы 5.3.3 о распознавании сферы .	148
5.5. Эйлерова характеристика гиперграфа . . . . .	150
5.6. Классификация поверхностей . . . . .	153
5.7. Ориентируемые триангуляции 2-многообразий . . . .	154
5.8. Attaching a handle or a Möbius band is well-defined . . . .	156
5.9. Регулярные окрестности и клеточные подграфы . . . . .	158

#### **§ 6. Гомологии двумерных многообразий**

6.1. Критерий ориентируемости . . . . .	160
---	-----

6.2. Препятствующий 1-цикл . . . . .	161
6.3. Гомологичность 1-циклов . . . . .	163
6.4. Гомологии и первый класс Штифеля—Уитни . . . . .	165
6.5. Вычисления и свойства группы гомологий . . . . .	168
6.6. Форма пересечений: мотивировка . . . . .	169
6.7. Форма пересечений: определение и свойства . . . . .	171
6.8. Препятствие Уитни к вложимости* . . . . .	173
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	175

**§ 7. Инволюции\***

7.1. Примеры инволюций . . . . .	178
7.2. Классификация инволюций . . . . .	181
7.3. Другой подход к классификации инволюций . . . . .	184

**§ 8. Векторные поля на многомерных многообразиях**

8.1. Векторные поля в евклидовом пространстве . . . . .	186
8.2. Кусочно линейная аппроксимация . . . . .	188
8.3. Степень по модулю 2 отображения . . . . .	189
8.4. Степень отображения . . . . .	192
8.5. Гомотопическая классификация отображений в сферу . .	194
8.6. Многомерные многообразия . . . . .	196
8.7. Векторные поля на многомерных многообразиях . . . .	199
8.8. Существование касательных векторных полей . . . .	202
8.9. Существование нормальных векторных полей . . . .	203
8.10. Векторные поля на трехмерной сфере . . . . .	205
8.11. Оснащенные зацепления . . . . .	208
8.12. Векторные поля на трехмерных многообразиях* . . . .	209
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	211

**§ 9. Наборы векторных полей**

9.1. Введение и основные результаты . . . . .	214
9.2. Параллизуемость на двумерном подмногообразии . . .	217
9.3. Другое доказательство леммы о подмногообразии . .	219
9.4. Ориентируемость трехмерных многообразий . . . . .	222
9.5. План доказательства теоремы Штифеля . . . . .	225
9.6. Неформальное описание препятствующего класса* . .	226
9.7. Доказательство леммы о препятствии . . . . .	228
9.8. Характеристические классы для 4-многообразий . .	232

9.9. Характеристические классы для $n$ -многообразий . . . . .	235
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	238

### **§ 10. Гомологии многомерных многообразий**

10.1. Различие трехмерных многообразий . . . . .	245
10.2. Многомерные гиперграфы и их гомеоморфность . . . . .	248
10.3. Многомерные многообразия . . . . .	250
10.4. Клеточные разбиения и эйлерова характеристика . . . . .	252
10.5. Одномерные гомологии . . . . .	256
10.6. Общее определение групп гомологий . . . . .	261
10.7. Определение умножения пересечения в гомологиях . . . . .	263
10.8. Двойственность Пуанкаре для 3-многообразий . . . . .	265
10.9. Двойственность Пуанкаре для $n$ -многообразий . . . . .	266

### **§ 11. Дальнейшие применения гомологий**

11.1. Невложимость в коразмерности 1 . . . . .	270
11.2. Гомологии пары и двойственность Лефшеца . . . . .	274
11.3. Точная последовательность пары . . . . .	275
11.4. Сигнатура . . . . .	277
11.5. Последовательность Майера—Виеториса . . . . .	279
11.6. Двойственность Александера для многообразий . . . . .	281
11.7. Двойственность Александера—Понтрягина . . . . .	283
11.8. Последовательности Бокштейна и Кюннета* . . . . .	286
11.9. Пример Милнора 11.9.1.b нестандартной сферы . . . . .	288

### **§ 12. Непогружаемость и невложимость**

12.1. Введение и основные результаты . . . . .	293
12.2. Наборы нормальных полей . . . . .	295
12.3. Непогружаемость в коразмерности 1 . . . . .	297
12.4. Непогружаемость в коразмерности 2 . . . . .	299
12.5. Доказательство леммы Уитни о препятствии . . . . .	301
12.6. Тривиальность касательных классов* . . . . .	302
12.7. Степени двойки и классы Штифеля—Уитни* . . . . .	304
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	307

### **§ 13. Расслоения и их применения**

13.1. Простейшие расслоения . . . . .	308
13.2. Векторные расслоения . . . . .	311

13.3. Сумма векторных расслоений . . . . .	313
13.4. Классификация расслоений* . . . . .	315
13.5. Классификация сечений* . . . . .	318
13.6. Классификация зейфертовых сечений* . . . . .	319
13.7. Применение к гамильтоновым системам* . . . . .	321

**§ 14. Гомотопическая классификация отображений**

14.1. Фундаментальная группа . . . . .	323
14.2. Накрытия . . . . .	326
14.3. Теоремы о фундаментальной группе . . . . .	327
14.4. Гомотопические группы . . . . .	329
14.5. Последовательность расслоения . . . . .	332
14.6. Гомотопические группы сфер . . . . .	334
14.7. Теоремы Уайтхеда и Гуревича . . . . .	336
14.8. Последовательность вложения* . . . . .	339
14.9. Реализация циклов подмногообразиями* . . . . .	342

**§ 15. Классификация погружений и вложений**

15.1. Погружения окружности в плоскость . . . . .	345
15.2. Выворачивание сфер наизнанку . . . . .	347
15.3. Классификация погружений многообразий . . . . .	350
15.4. Набросок доказательства теоремы Кервера . . . . .	352
15.5. Заузливание вложений . . . . .	355
15.6. Инвариант дополнения . . . . .	356
15.7. Приклеивающий инвариант* . . . . .	359
15.8. Заузливания коразмерности 1* . . . . .	361
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	363

**§ 16. Инварианты кобордизма многообразий**

16.1. Введение . . . . .	365
16.2. Базовые утверждения о коборданности . . . . .	366
16.3. Числа Штифеля—Уитни . . . . .	368
16.4. Классы Понтрягина* . . . . .	369
16.5. Числа Понтрягина и формула Хирцебруха* . . . . .	371
16.6. Конечность множества гомотопических сфер* . . . . .	373
Ответы, указания и решения к некоторым задачам . . . . .	376

# Введение

Nothing was changed, but now it made sense.

U.K. Le Guin. The Beginning Place<sup>1</sup>

## 0.1. Зачем эта книга

Лучшие результаты любой математической теории — важные и интересные теоремы, в формулировках которых *нет* понятий из этой теории, но при доказательствах которых *без нее не обойтись*. К сожалению, в большинстве учебников такие результаты недостаточно доступны. Формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как о науке, изучающей немотивированные понятия и теории.

Таких блестательных результатов в алгебраической топологии много. Для удобства читателя в этой книге они выделены жирным шрифтом и, как правило, собраны в начале параграфов (вместе с краткой историей вопроса). Алгебраическая топология является фундаментальной частью математики и имеет применения за ее пределами. Как и в любой фундаментальной теории, ее основные мотивировки и идеи можно доступно изложить человеку, не имеющему глубоких специальных познаний. Такому изложению посвящена эта книга (вместе с [ST34, BE82, Pr15, An03, PS97, E84, FT07, Sk08, Sk, ZSS] и другими книгами). Ее особенность — возможность познакомиться с этими *мотивировками и идеями* на «олимпиадных» примерах, т. е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Благодаря этому я надеюсь сделать алгебраическую топологию более доступной и интересной — в первую очередь студентам и работающим в других областях математикам.

---

<sup>1</sup>Ничего не изменилось, но теперь все было понятно. (У. К. Ле Гuin. Изначальное место. Пер. автора.)

В книге рассматриваются важнейшие наглядные объекты математики, полезные для приложений: маломерные многообразия и векторные поля на них, непрерывные отображения и их деформации. Приводятся естественные построения для решения интересных топологических проблем и изящные доказательства красивых теорем с ясными и доступными формулировками. Показано, как при этом возникают полезные алгебраические понятия (группы гомологий, характеристические классы и т. д.)<sup>2</sup>. Именно на таких естественных построениях и доказательствах можно по-настоящему прочувствовать более общий теоретический материал (а при наличии некоторой математической культуры — и воссоздать его). Изучение, начинающееся с длительного освоения немотивированных общих понятий и теорий, делает малодоступными замечательные методы алгебраической топологии<sup>3</sup>. Часто изучившие курс могут воспроизвести сложную теорию, но не могут применить ее в простейшей ситуации, если не указано, что этой теорией нужно воспользоваться.

Новые вводимые понятия мотивированы тем, что интересно человеку, не считающему их интересными «сами по себе», и человеку, не интересующемуся специально топологией (но уже имеющему некоторое математическое образование). Например, доказательством красивой теоремы, решением важной задачи, осмыслением естественной идеи. Определения новых понятий естественно появ-

---

<sup>2</sup> Важнейшие геометрические проблемы, ради которых была создана алгебраическая топология, в свою очередь были мотивированы предыдущим развитием математики (причем не только геометрии, но и анализа и алгебры). Мотивировать эти геометрические проблемы не входит в цели настоящей книги. Я либо привожу ссылки, либо апеллирую к непосредственной геометрической любознательности читателя.

<sup>3</sup> Приведу лишь один пример из многих. Еще в XIX веке был придуман очень простой, наглядный и полезный инвариант многообразий — форма пересечений, т. е. умножение в гомологиях поверхностей (п. 6.7, [Hi95]). Замечательным открытием Колмогорова и Александера 1930-х годов явилось обобщение этого инварианта на фигуры, не являющиеся многообразиями (умножение в когомологиях). Умножение Колмогорова—Александера менее наглядно и определяется более громоздко, чем форма пересечений, но зато имеет более продвинутые применения. Определение формы пересечений через умножение Колмогорова—Александера делает малодоступными ее замечательные применения. Поэтому форму пересечений иногда просто переоткрывают [Mo89].

ляются (и четко формулируются) в этой ситуации, и потому их не обязательно знать заранее. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным.

Изложение построено «от частного к общему», «от простого к сложному», см. п. 0.3. Путь познания в какой-то мере повторяет путь развития. Такое изложение продолжает традицию, восходящую к древности [P]. В современном преподавании математики она представлена, например, журналом «Квант» и книгами «квантовских» авторов. Более подробно см. [ZSS, § 27, § 28]. Интересно, что приводимое изложение мне приходилось сначала переоткрывать и лишь потом убеждаться, что первооткрыватели рассуждали так же, ср. [Hi95].

Надеюсь, принятый стиль изложения не только сделает материал более доступным, но позволит сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус. Он необходим, чтобы разумно выбирать проблемы для исследования, а также ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибок (или известности полученного результата) за чрезмерным формализмом. К сожалению, такое (непреднамеренное) скрытие ошибок часто происходит с математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Такое происходило и с автором этих строк; к счастью, почти все мои ошибки исправлялись *перед* публикациями.

Чтение этой книги и решение задач потребуют от читателя усилий. Однако эти усилия будут сполна оправданы тем, что вслед за великими математиками XX века в процессе изучения геометрических проблем читатель откроет некоторые основные понятия алгебраической топологии. Надеюсь, это поможет ему совершить собственные настолько же полезные открытия (не обязательно в математике)!

## 0.2. Основная идея

Алгебраическая топология основана на следующей простой идее, часто встречающейся при решении школьных (в частности, олимпиадных) задач. *Невозможность* некоторой конструкции можно до-

казывать путем построения алгебраического *препятствия* (называемого также *инвариантом*). Примером служит четность. Точно так же *неэквивалентность* конструкций часто доказывается путем построения алгебраического *инварианта*, их различающего (этот инвариант является *препятствием* к эквивалентности). Многие непохожие друг на друга задачи топологии естественно приводят к похожим *препятствиям*. В этой книге препятствия-инварианты, являющиеся целыми числами или вычетами по модулю 2, есть почти в каждом параграфе. А группы гомологий появляются только в п. 4.11 и § 6.

Таким образом, значительная часть алгебраической топологии — это изучение геометрических задач при помощи дискретных, комбинаторных (в частности, алгебраических) методов. Алгебраическую топологию раньше называли комбинаторной.

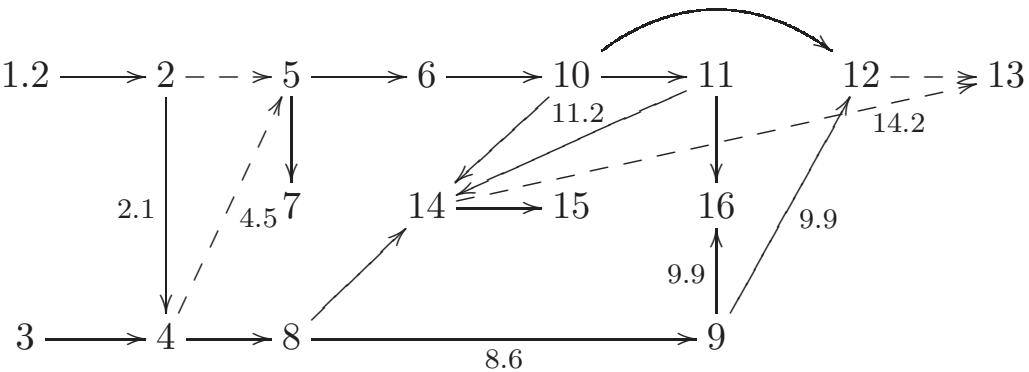
Применения теории препятствий разбиваются на два шага. Первый и обычно более простой шаг — получение необходимого условия на языке теории препятствий. Он приводится в этой книге. Второй и более сложный шаг — вычисление появляющихся препятствий. Он приводится лишь в виде наброска, цикла задач или просто ссылки (поскольку, по моему мнению, второй шаг лучше описан в литературе, чем первый). Замечу, что в простейших ситуациях очевидно, что полученное необходимое алгебраическое условие является достаточным. А вот для более сложных геометрических проблем, которые здесь не приводятся (например, о классификации многообразий или вложений), труднее всего именно доказать *достаточность* полученного необходимого условия.

### 0.3. Содержание и используемый материал

Книга предназначена в первую очередь для читателей, не владеющих алгебраической топологией (хотя, возможно, часть ее будет интересна и специалистам). Все необходимые алгебраические объекты (со страшными названиями «группы гомологий», «характеристические классы» и т. д.) естественно возникают и строго *определяются* в процессе исследования геометрических проблем. Для удобства читателя в п. 1.2, 2.1 приведены определения графов и простейших поверхностей.

В книге сначала показаны те идеи, которые видны на двумерных многообразиях (поверхностях; § 2—7). Затем — идеи, которые видны на трехмерных многообразиях (§ 8—10; § 8 и 10 интересны даже для трехмерного случая). Только потом рассматриваются многомерные многообразия. При этом двумерные и трехмерные многообразия все-таки интересны мне не сами по себе, а как простые объекты для демонстрации важных идей, которые могут приносить наиболее значительные плоды для многомерного случая. Характеристические классы по-настоящему незаменимы только для многообразий размерности выше трех.

Для многообразий методы алгебраической топологии наиболее наглядны. Это позволяет быстро добраться до по-настоящему интересных и сложных результатов. Хотя большая часть изложения использует язык «многомерных графов» (гиперграфов или симплексиальных комплексов), в этой книге в основном собраны некоторые результаты и методы, касающиеся именно частного случая многообразий. Впрочем, для глубокого изучения многообразий более общие гиперграфы все-таки понадобятся. Аналогичное изложение для произвольных графов и гиперграфов см., например, в [Sk].



Выше приведена схема существенной зависимости параграфов. Явные ссылки приведены и в тексте. Такие ссылки не отражены в схеме, если в одном параграфе используется результат из другого, но необходима только формулировка результата, а не более глубокое его понимание. Пунктир в схеме означает, что один параграф нужен для мотивировки другого, но формально не используется в нем. Номера пунктов у стрелки означают, что используются только эти пункты.

В начале большинства параграфов приведены формулировки доказываемых в них результатов. Основное содержание книги — не эти результаты, а методы их доказательств. Однако эти методы не были бы так интересны, если бы они не давали красивых результатов, формулировки которых доступны неспециалисту. Сложность материала внутри каждого параграфа растет. Поэтому вполне разумно переходить к новому параграфу, отложив окончание старого. Пункты, отмеченные звездочкой, можно пропустить без ущерба для понимания остального материала. Как правило, в них приводится краткое упрощенное изложение более продвинутого материала.

При изучении примеров, мотивирующих общее понятие групп гомологий, возникают все новые и новые частные случаи (п. 4.7—4.11, § 6, п. 7.3, 8.6, 8.12, 9.4—9.9). Полезно продумать несколько таких примеров перед знакомством с абстрактным изложением этого понятия в п. 10.6. Формально п. 10.6 не зависит от многих предыдущих параграфов. Но в нем нет ответа на вопрос «зачем», важного для начала изучения любой теории.

#### 0.4. Задачи

Большая часть материала сформулирована в виде задач. Красивые наглядные задачи, для решения которых не нужно никаких знаний, приведены уже в самом начале. Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию. Например, послушники дзэнских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками [S].

Следует подчеркнуть, что многие задачи не используются в остальном тексте. В задачах сформулированы интересные и полезные факты или изложены идеи доказательства теорем. Читателю полезно ознакомиться с самими фактами и понимать идеи доказательств, даже если детали останутся недоступными. Приводимые формулировки задач могут быть путеводителем по другим учебникам по алгебраической топологии, позволяя намечать интересные конечные цели и отбрасывать материал, не являющийся для этих целей необходимым. Полезнее всего обсуждать со специалистом как решения задач, так и возникающие при решении трудности.

Для решения каждой задачи (без звездочки) достаточно знания с настоящим текстом и *не требуется* никаких дополнительных понятий и теорий. Если используемые в задаче термины не определены в этом тексте и вам незнакомы, то соответствующую задачу следует просто игнорировать. К важнейшим задачам приводятся указания и решения. Они расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Если задача выделена словом «теорема» («следствие» и т. д.), то ее утверждение важное. Как правило, мы приводим *формулировку* красивого или важного утверждения (в виде задачи) перед его *доказательством*. (Часто происходит обратное, см. начало п. 0.1.) В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. Поэтому если некоторая задача не получается, то читайте дальше. (На занятии задача-подсказкадается только тогда, когда студент подумал над самой задачей.) Такой процесс обучения полезен, поскольку моделирует реальную исследовательскую ситуацию.

В указаниях к некоторым задачам встречаются ссылки на web-страницу книги [Sk20]. Если, паче чаяния, ее адрес изменится, ее можно будет найти с помощью поисковых систем (возможно, через домашнюю страницу автора). Там же в заданиях по курсам имеются ссылки на видео, иллюстрирующие материалы книги.

## 0.5. Для специалистов

В § 9 приводится набросок простого доказательства теоремы Штифеля 9.1.3 о параллизуемости ориентируемых трехмерных многообразий. Оно получено из обычно приводимого в книгах отбрасыванием обозначений и терминов, не нужных для него, но нужных для чего-то другого. Оно проще и доказательства из [Ki89], см. п. 9.2. В § 9, 12, 13 приводится набросок простого доказательства теорем об алгебрах с делением и о невложимости проективных пространств. В § 10, 11 приведены красивые важные задачи по основам теории гомологий, которые могут быть использованы на семинарах по этой теме.

По возможности приводятся ссылки на книги и обзоры, а не на оригинальные статьи.

Стандартная терминология теории препятствий не используется там, где (по мнению автора) она неудобна для начинающего. Приведем здесь сравнение обычной терминологии и принятой в книге. *Расстановки элементов группы  $G$  на  $i$ -симплексах триангуляции  $T$*  — то же самое, что  *$i$ -мерные цепи на  $T$  с коэффициентами  $G$* . Группа таких расстановок обычно обозначается  $C_i(T; G)$ . Множество  $\partial^{-1}(0)$  всех циклов образует подгруппу группы  $C_i(K; G)$ , обозначаемую  $Z_i(T; G)$ . Множество  $\partial C_{i+1}(T; G)$  всех границ образует подгруппу группы  $C_i(K; G)$ , обозначаемую  $B_i(T; G)$ . Когда  $G = \mathbb{Z}_2$ , мы пропускаем коэффициенты в обозначениях цепей, циклов, границ и гомологий.

В этой книге препятствия лежат в группах *гомологий*, а не в группах *когомологий* (изоморфных группам гомологий для многообразий). Обозначения для характеристических классов используются для классов, двойственных им по Пуанкаре. Эта точка зрения (двойственная принятой в учебниках, но обычная для первооткрывателей) позволяет *наглядно изображать* препятствия.

## 0.6. Благодарности

Выражаю благодарность А. Н. Драницникову, Д. Б. Фуксу, А. Т. Фоменко и Е. В. Щепину: я учился алгебраической топологии по книге [FF89] и на семинаре Драницникова—Щепина в Математическом институте Российской академии наук.

Настоящая книга основана на занятиях, проведенных мной на мехмате Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, в Независимом московском университете, на ФОПФ и ФИВТ Московского физико-технического института, в Летней школе «Современная математика», а также в Кировской и Петербургской летних математических школах в 1994–2019 гг.

Благодарю С. Я. Аввакумова, П. М. Ахметьева, Т. В. Березина, А. И. Бикеева, Ю. М. Бурмана, А. Я. Бучаева, М. Н. Вялого, И. С. Жильцова, А. А. Заславского, С. К. Ландо, С. В. Матвеева, С. А. Оленчука, С. С. Подкорытова, В. В. Прасолова, Н. А. Приходько, М. Б. Скопенкова, А. Б. Сосинского, М. Танцера, В. В. Успенского, М. С. Федо-

рова, Б. Р. Френкина, Н. В. Хорошавкину и В. В. Шувалова за полезные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения. Благодарю Д. С. Кроо, С. А. Оленчука, В. В. Прасолова и В. В. Шувалова за возможность использовать подготовленные ими компьютерные версии рисунков. Благодарю всех участников занятий за замечания и за предоставление решений некоторых задач.

Эта книга посвящена памяти Юрия Петровича Соловьёва — замечательного математика, считавшего важным изложение математики на конкретном, доступном (и в то же время строгом) языке, в отличие от «птичьего» языка излишней абстракции.

**Грантовая поддержка.** Автор поддержан РФФИ, гранты номер 15-01-06302 и 19-01-00169, и грантами фонда Саймонса 2015—2020 годов.

Интернет-страница автора: <https://users.mccme.ru/skopenko/>.

## 0.7. Обозначения и соглашения

Если вектор обозначен одной буквой (а не указанием его начала и конца), то мы не пишем над ним знак вектора и не выделяем его жирным. Вот другие основные обозначения:

- $|X|$  — число элементов в множестве  $X$ ;
- $\text{pr}_k$  — проекция на  $k$ -й сомножитель декартова произведения;
- $\rho_2$  — приведение по модулю два;
- $\mathbb{Z}_{(i)}$  — группа  $\mathbb{Z}$  для четного  $i$  и  $\mathbb{Z}_2$  для нечетного  $i$ ;
- $fx$  или  $f(x)$  — образ элемента  $x$  при отображении  $f$ ;
- $\simeq$  — гомотопность отображений (п. 3.7);
- $\cong$  — гомеоморфность подмножеств пространства  $\mathbb{R}^m$  (п. 3.1), диффеоморфность многообразий (п. 4.5), кусочно линейная гомеоморфность гиперграфов (п. 5.2), изоморфизмы групп;
- $\sim$  — гомотопическая эквивалентность пространств (п. 14.4).

Номера задач обозначаются жирным шрифтом. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой \*. Если некоторая задача не получается, то читайте дальше — следующие задачи могут оказаться подсказками.

## § 1. Графы на плоскости

Dass von diesem schwer lesbaren Buche noch vor Vollendung des ersten Jahrzehntes eine zweite Auflage notwendig geworden ist, verdanke ich nicht dem Interesse der Fachkreise...

S. Freud. Die Traumdeutung, Vorwort zur zweiten Auflage<sup>4</sup>

### 1.1. Введение и основные результаты

В п. 1.3 доказываются простейшие результаты о графах и раскрасках карт на плоскости — утверждения 1.1.1 и 1.3.2.

**1.1.1.** (a) Треугольник разбит на конечное число выпуклых многоугольников. Их можно так раскрасить в 6 цветов, что любые два многоугольника, имеющие общий граничный отрезок, будут окрашены в разные цвета.

(b)\* То же для 5 цветов.

(Знаменитая гипотеза четырех красок утверждает, что и 4 цветов хватит, но ее доказательство гораздо более сложно.)

Граф называется *планарным* (или *вложимым в плоскость*, или *реализуемым без самопересечений на плоскости*), если его можно изобразить без самопересечений на плоскости. Простейшие понятия теории графов напоминаются в п. 1.2; более строгое определение планарности приведено в п. 1.3.

Проблема вложимости графов (или графов с дополнительной структурой) в плоскость, тор, ленту Мебиуса и другие поверхности (см. § 2) — одна из основных в топологической теории графов [МТ01].

**Утверждение 1.1.2.** *Существует алгоритм распознавания планарности графов.* (См. [Sk, сноска 4], [Sk18, сноска 7].)

Один из простейших (но медленно работающих) алгоритмов строится в п. 1.5 и 1.6 (утверждение 1.1.2 вытекает из утвержде-

---

<sup>4</sup>Тому, что хотя со дня выхода моей книги еще не прошло десяти лет, уже появилась потребность во втором ее издании, я обязан отнюдь не интересу специалистов... (З. Фрейд. Толкование сновидений. Пер. А. М. Боковикова.)

ний 1.6.1 (f) и 1.6.3 (a)). Он основан на важной конструкции *утолщения*, возникающей во многих задачах топологии и ее приложений (синонимы: граф с вращениями, эскиз [Ha, LZ, MT01]). Алгоритм не использует нетривиальных результатов (таких как критерий Куратовского или теорема Фари, см. формулировки в [Sk, п. 1.2 «Алгоритмические результаты о планарности графов»]; там же приведен полиномиальный алгоритм).

На примере доказательств этих результатов демонстрируются применения формулы Эйлера 1.3.3 (c). (Стало быть, эти доказательства лучше отложить до знакомства с ней.) Эта формула доказывается в п. 1.4; там на алгоритмическом языке объясняется ее нетривиальность, игнорируемая в некоторых изложениях.

## 1.2. Glossary of Graph Theory

Вероятно, вводимые здесь понятия знакомы читателю, но мы приводим четкие определения, чтобы фиксировать терминологию (которая бывает другой в других книгах).

*Графом*  $G = (V, E)$  называется конечное множество  $V = V(G)$  вместе с семейством  $E = E(G) \subset \binom{V}{2}$  его двухэлементных подмножеств (т. е. неупорядоченных пар различных элементов). (Более точный термин для понятия графа, данного здесь, — *граф без петель и кратных ребер* или *простой граф*.) Элементы множества  $V$  называются *вершинами*. Элементы множества  $E$  называются *ребрами*. Хотя ребра — неупорядоченные пары, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершины  $a$  и  $b$  называются *концами* или *вершинами* ребра  $(a, b)$ .

При работе с графиками удобно пользоваться их изображениями — например, на плоскости или в пространстве (или, выражаясь научно, отображениями их тел в плоскость или в пространство, ср. с п. 5.1). См. рис. 1.3.1, 1.3.2, 1.7.2 ниже. Вершины изображаются точками. Каждое ребро изображается ломаной, соединяющей его концы. (При этом только концы каждой ломаной изображают вершины графа.) Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме общих концов ломаных) не являются вершинами. Важно, что график и его изображение — не одно и то же. Например, на рис.

1.3.2 (в центре и справа), 1.3.1 приведены разные изображения на плоскости одинаковых графов (точнее, изоморфных графов). Иногда на изображении не все вершины отмечаются, см. рис. 1.2.1 и 1.6.2 слева.

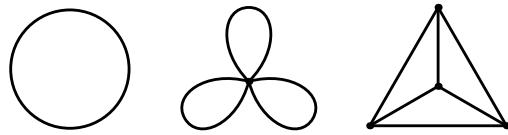


Рис. 1.2.1. Цикл, букет циклов и  $K_4$

*Путем*  $P_n$  называется граф с вершинами  $1, 2, \dots, n$  и ребрами  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . *Циклом*  $C_n$  называется граф с вершинами  $1, 2, \dots, n$  и ребрами  $(1, n)$  и  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.)

Граф с  $n$  вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается  $K_n$ . Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет ребер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через  $K_{m,n}$  обозначается двудольный граф солями из  $m$  и из  $n$  вершин, в котором имеются все  $mn$  ребер между вершинами разных долей. См. рис. 1.3.2.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально говоря, граф  $G$  называется *подграфом* графа  $H$ , если каждая вершина графа  $G$  является вершиной графа  $H$  и каждое ребро графа  $G$  является ребром графа  $H$ . При этом две вершины подграфа, соединенные ребром в графе, не обязательно соединены ребром в подграфе.

*Путем* в графе называется последовательность  $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{n-1} v_n$ , в которой для любого  $i$  ребро  $e_i$  соединяет вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$ . (Ребра  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  не обязательно попарно различны.) *Циклом* в графе называется последовательность  $v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{n-1} v_n e_n$ , в которой для любого  $i < n$  ребро  $e_i$  соединяет вершины  $v_i$  и  $v_{i+1}$ , а ребро  $e_n$  соединяет вершины  $v_n$  и  $v_1$ . *Несамопересекающимся* называется цикл, для которого вершины  $v_1, v_2, \dots, v_n$  попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начидающего) — *простой* цикл.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем, и *несвязным* иначе. Граф называется *деревом*, если он связан и не содержит несамопересекающихся циклов. *Остовом* (или *максимальным деревом*) графа называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа. Ясно, что в любом связном графе существует такой подграф.

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 1.2.2. Операция *стягивания ребра* (рис. 1.2.2) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины  $A$  и  $B$  этого ребра на одну вершину  $D$ , а все ребра, выходящие из вершин  $A$  и  $B$  в некоторые вершины, заменяет на ребра, выходящие из вершины  $D$  в те же вершины. (В отличие от стягивания ребра в мультиграфе, каждое получившееся ребро кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

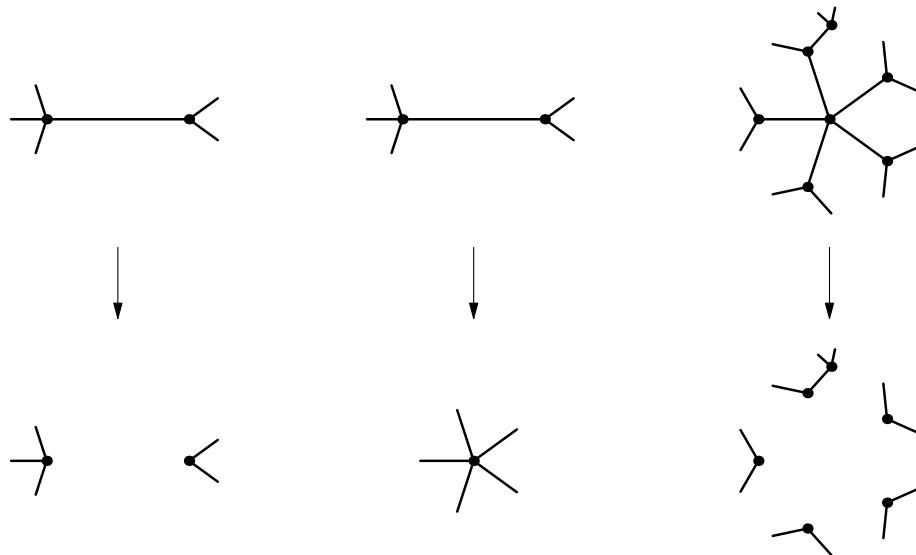


Рис. 1.2.2. Удаление ребра  $G - e$ , стягивание ребра  $G/e$  и удаление вершины  $G - x$

В большей части данного текста можно пользоваться понятием графа без петель и кратных ребер. Однако все написанное справедливо для следующего обобщения, которое кое-где даже необходимо. *Мультиграфом* (или *графом с петлями и кратными ребрами*) на-

зывается квадратная таблица (матрица) из целых неотрицательных чисел, симметрична относительно главной диагонали. При этом число, стоящее на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, интерпретируют как число ребер (или *кратность ребра*) между вершинами с номерами  $i$  и  $j$  при  $i \neq j$  и как число петель в вершине с номером  $i$  при  $i = j$ . Ребро называется *кратным*, если его кратность больше единицы.

### 1.3. Графы и раскраски карт на плоскости

**Плоским графом** называется конечный набор несамопересекающихся ломаных на плоскости, любые две из которых пересекаются только по их общим концам (в частности, если общих концов нет, то не пересекаются). Концы ломаных называются его *вершинами*, а сами ломаные — *ребрами*. Итак, плоскому графу соответствует граф (в смысле п. 1.2), *изображением* которого называется плоский граф. Иногда плоский граф называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же граф можно изобразить на плоскости (если можно) разными способами, см. рис. 1.3.1.

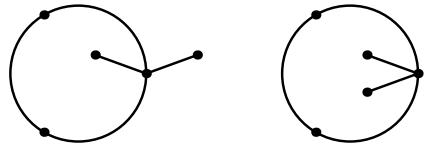


Рис. 1.3.1. Различные изображения графа на плоскости

Граф называется **планарным**, если некоторый плоский граф является его изображением.

#### 1.3.1. Следующие графы планарны:

- (а) граф  $K_5$  без одного из ребер (рис. 1.7.2);    (б) любое дерево;
- (с) граф любого выпуклого многогранника.

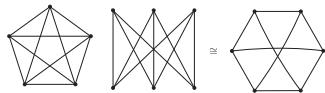


Рис. 1.3.2. Непланарные графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$

**1.3.2.** (a) Граф  $K_5$  не планарен. (b) Граф  $K_{3,3}$  не планарен.

(c) Для любого плоского связного графа с  $V$  вершинами и  $E > 1$  ребрами выполнено неравенство  $E \leqslant 3V - 6$ .

(d) В любом плоском графе есть вершина, из которой выходит не более 5 ребер.

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа. Приведем строгое определение.

Подмножество плоскости называется **связным**, если любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в этом подмножестве. (Осторожно, для более общих подмножеств, чем рассматриваемые здесь, определение связности другое!)

**Гранью** плоского графа  $G$  называется каждая из связных частей, на которые распадается плоскость  $\mathbb{R}^2$  при разрезании по всем ломанным (=ребрам) плоского графа  $G$ , т.е. любое максимальное связное подмножество в  $\mathbb{R}^2 - G$ . Заметим, что одна из таких частей будет «бесконечной».

**1.3.3.** (a) Нарисуйте плоский граф, в границе некоторой грани которого имеется три попарно непересекающихся цикла.

(b) Для любого плоского графа с  $E > 1$  ребрами и  $F$  гранями верно неравенство  $3F \leqslant 2E$ .

(c)\* **Формула Эйлера.** Для любого связного плоского графа с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $F$  гранями верно равенство  $V - E + F = 2$ .

(d) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с  $s$  компонентами связности.

Для п. (b) подумайте, скольким граням принадлежит ребро и какое наименьшее число ребер может ограничивать грань.

Доказательство формулы Эйлера приведено ниже. Сначала, используя формулу Эйлера без доказательства, решите задачи 1.1.1 и 1.3.2.

## 1.4. Строгое доказательство формулы Эйлера

**1.4.1. (a1)** На плоскости дан отрезок  $l$  и две точки вне него. Существует алгоритм, который строит некоторую ломаную, соединяющую эти точки и не пересекающую  $l$ .

(a2) То же с заменой  $l$  на несамопересекающуюся двузвенную ломаную.

(a3) То же с заменой  $l$  на незамкнутую несамопересекающуюся трехзвенную ломаную.

(a) То же с заменой  $l$  на произвольную незамкнутую несамопересекающуюся ломаную.

(b) То же для дерева  $l$  на плоскости, ребра которого являются отрезками.

(c) Если два отрезка не пересекаются, то расстояние между ними положительно. (*Расстоянием* между двумя множествами плоскости называется инфимум множества всех расстояний от точки первого множества до точки второго.)

*Указание.* Для построения алгоритмов используйте индукцию (или рекурсию). В доказательстве шага индукции используйте удаление висячей вершины и п. (c). Ср. с конструкцией *регулярной окрестности* дерева, см. рис. 1.6.3 слева и определение около него, [ВЕ82, § 6], [CR, с. 293—294]. П. (c) доказывается рассмотрением различных случаев расположения отрезков.

Нетривиальность построения алгоритма из задач 1.4.1 иллюстрирует нетривиальность следующих утверждений. (Аналогичное замечание справедливо по поводу алгоритма 1.4.3 (a) и теоремы Жордана 1.4.3 (b).)

**1.4.2.** (a) Любая незамкнутая несамопересекающаяся ломаная  $L$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  не разбивает плоскость, т. е.  $\mathbb{R}^2 - L$  связно.

(b) Никакое дерево на плоскости не разбивает плоскость.

(c) При удалении ребра из плоского графа количество граней уменьшается не более чем на 1.

(d) Для любого связного плоского графа с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $F$  гранями верно неравенство  $V - E + F \leq 2$ .

*Указание.* Используйте идеи решения задачи 1.4.1.

**1.4.3.** (a) Существует алгоритм, который по замкнутой несамопересекающейся ломаной  $L$  на плоскости и двум точкам вне нее выясняет, можно ли эти точки соединить некоторой ломаной, не пересекающей  $L$ .

(b) **Теорема Жордана.** *Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная  $L$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  разбивает плоскость ровно на*

*две связные части, т. е.  $\mathbb{R}^2 - L$  несвязно и является обединением двух связных множеств.*

Обычно теоремой Жордана называется аналог теоремы 1.4.3 (b) для *непрерывных кривых  $L$* . Он доказывается гораздо более сложно [An03, Ch99]. А теорему 1.4.3 (b) называют *кусочно линейной теоремой Жордана*.

Простое доказательство теоремы Жордана 1.4.3 (b) приведено в [CR, с. 292—295], см. замечание 1.4.8.а. Мы приведем похожее немного более сложное доказательство. Зато оно дает интересную лемму о пересечении 1.4.4 и демонстрирует технику четности и общего положения (леммы 1.4.5 и 1.4.6), полезную для дальнейшего.

*Набросок доказательства теоремы Жордана 1.4.3 (b).* Утверждение о том, что частей не более двух, проще; это следует из утверждений 1.4.2 (b, c). Ср. [BE82, § 6], [CR, с. 293—294].

Утверждение о том, что частей больше одной, труднее. Чтобы это доказать, возьмем две точки, достаточно близкие к некоторому отрезку ломаной  $L$  и симметричные относительно этого отрезка. Из следующей леммы о пересечении 1.4.4 вытекает, что

(\*) *именно эти точки невозможна соединить ломаной, не пересекающей  $L$ .*  $\square$

**Лемма 1.4.4** (о пересечении). *Любые две ломаные в квадрате, соединяющие его противоположные вершины, пересекаются.*

Лемма о пересечении выводится из следующих лемм о четности 1.4.5 и об аппроксимации 1.4.6 (a, b).

Несколько точек плоскости **находятся в общем положении**, если никакие три из них не лежат на прямой и никакие три отрезка, их соединяющие, не имеют общей внутренней точки.

**Лемма 1.4.5** (о четности). *Если вершины двух замкнутых плоских ломаных находятся в общем положении, то ломаные пересекаются в четном числе точек.*

См. комментарии и доказательство в [Sk, § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости»].

Ломаную  $A_0 \dots A_n$  назовем *погранично  $\varepsilon$ -близкой* к ломаной  $B_0 \dots B_m$ , если  $m = n$  и  $|A_i B_i| < \varepsilon$  для любого  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Лемма 1.4.6** (об аппроксимации). (a') Take any  $\varepsilon > 0$  and points  $A_1, \dots, A_n$  in a square. Then there are points  $A'_1, \dots, A'_n$  in the square such that the vertices of the square and  $A'_1, \dots, A'_n$  are in general position, and  $|A_i A'_i| < \varepsilon$  for any  $i = 1, \dots, n$ .

(a) Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $L_1, L_2$  — ломаные в квадрате, соединяющие пары его противоположных вершин. Тогда существуют ломаные  $L'_1, L'_2$  в квадрате, соединяющие пары его противоположных вершин, повершинно  $\varepsilon$ -близкие к  $L_1, L_2$ , причем все вершины ломаных  $L'_1, L'_2$  находятся в общем положении.

(b') Для любой пары непересекающихся отрезков  $XY$  и  $ZT$  находится такое  $\varepsilon > 0$ , что для любых точек  $X', Y', Z', T'$  плоскости из неравенств  $|XX'|, |YY'|, |ZZ'|, |TT'| < \varepsilon$  следует, что отрезки  $X'Y'$  и  $Z'T'$  не пересекаются.

(b) Если две ломаные  $L_1$  и  $L_2$  не пересекаются, то существует  $\varepsilon > 0$ , для которого любые ломаные  $L'_1, L'_2$ , повершинно  $\varepsilon$ -близкие к  $L_1, L_2$ , также не пересекаются.

Набросок доказательства формулы Эйлера 1.3.3 (с). Индукция по количеству ребер вне максимального дерева. База индукции — утверждение 1.4.2 (b). Шаг индукции следует из того, что

(\*\*) если при удалении ребра из плоского графа получается связный граф, то количество граней уменьшается хотя бы на 1.

Это доказывается аналогично трудной части теоремы Жордана 1.4.3 (b) с использованием леммы о пересечении 1.4.4.  $\square$

Лемма о пересечении 1.4.4 полезна и для других результатов. Часто (например, в следующей задаче) удобнее применять именно ее, а не теорему Жордана 1.4.3 (b).

**1.4.7.** (a) Из одной точки выехали два велосипедиста: первый на север, второй на восток. Оба они приехали в эту же точку: первый (впервые) с юга, второй с запада.

(b) Из одной точки выехали три велосипедиста: первый на запад, второй на север и третий на восток. Все они приехали в другую точку: первый с запада, второй с севера и третий с востока.

(a, b) Докажите, что один из велосипедистов пересекал следы другого. (См. 2-й ряд на рис. 1.5.2 и 1.6.2 слева; отправная точка не считается точкой пересечения следов; можете считать, что пути велосипедистов — ломаные.)

**Замечание 1.4.8.** (а) (к доказательству теоремы Жордана 1.4.3 (б)) Теорема Жордана — частный случай формулы Эйлера 1.3.3 (с) для графа, являющегося циклом. Поэтому вывод теоремы Жордана из формулы Эйлера включает в себя порочный круг.

Идея доказательства факта (\*) приведена в [CR, с. 293—294]. Впрочем, сами формулировка и доказательство этого факта (т. е. того, что  $B \neq \emptyset$ ) там пропущены. Рассуждение использует упрощенные версии леммы о четности (в пятом абзаце на с. 293). В начале рассуждения нужно выбрать направление, не параллельное никакой прямой, проходящей через две вершины многоугольника (даже не соседние); иначе в пятом абзаце на с. 293 случаев не два (как написано), а больше.

Доказательство факта (\*), приведенное в [BE82, § 6], использует лемму о четности 1.4.5.

Доказательство теоремы Жордана [Pr14', с. 19—20] неполно, ибо использует без доказательства нетривиальные факты, похожие на лемму о четности. Конкретнее, приводимое без доказательства утверждение из второго предложения на с. 20 (а также непрерывность изменения четности в первом предложении на с. 20) представляется читателю, не знающему доказательства теоремы Жордана, более сложным, чем сама теорема Жордана, в доказательстве которой это утверждение используется.

(б) (к доказательству формулы Эйлера 1.3.3 (с)) В рассказах для начинающих разумно не доказывать вышеупомянутое утверждение (\*\*), которое наглядно очевидно. Нужно лишь обратить внимание на то, что оно не доказано, на алгоритмические задачи, иллюстрирующие его нетривиальность (ср. с задачами 1.4.1 и 1.4.3 (а)), и на замечание о «порочном круге», приведенное в решении задачи 1.3.2 (а). К сожалению, это утверждение не доказывается и даже не комментируется в некоторых изложениях, претендующих на строгость<sup>5</sup>. В результате возникает неверное представление о том, что доказательство формулы Эйлера не использует

---

<sup>5</sup>Вот два примера. В [Pr14', доказательство теоремы 1.6] не объяснено, почему «удаление одного граничного ребра уменьшает число граней на 1»; этот факт не проще теоремы Жордана 1.4.3 (б), доказательство которой [Pr14', с. 19—20] нетривиально для начинающего и содержит пробел, указанный в конце замечания (а). Доказательство формулы Эйлера в [Om18, глава 7, § 2] также

утверждения, близкого к теореме Жордана, и потому не включает соответствующих трудностей.

### 1.5. Планарность дисков с ленточками

Пусть дано слово длины  $2n$  из  $n$  букв, в котором каждая буква встречается дважды. Возьмем выпуклый многоугольник на плоскости. Ориентируем замкнутую ломаную, его ограничивающую. Отметим на ней непересекающиеся отрезки, отвечающие буквам данного слова, в том порядке, в котором буквы идут в слове. Для каждой буквы соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ей два отрезка ленточкой (т. е. «растянутым» и «помятым» прямоугольником) так, чтобы разные ленточки не пересекались. **Диском с ленточками**, отвечающим данному слову, называется объединение построенных (двумерного) выпуклого многоугольника и ленточек<sup>6</sup>.

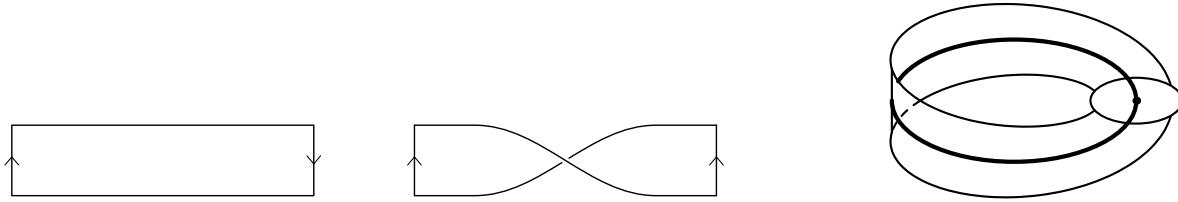


Рис. 1.5.1. Слева: стрелки, противонаправленные «при переносе» вдоль ленточки. Справа: диск с перекрученной ленточной (лента Мёбиуса)

Ленточка называется **перекрученной**, если стрелки на границе многоугольника сонаправлены «при переносе» вдоль ленточки, и **неперекрученной**, если противонаправлены (рис. 1.5.1).

не содержит ни объяснений аналогичного факта, ни ссылок на теорему Жордана (хотя ее нетривиальность обсуждается ранее).

<sup>6</sup>Точнее, так называется *любая* фигура, полученная такой конструкцией; ср. с замечанием перед задачей 2.2.2. Еще точнее, так называется пара из этого объединения и лежащего в нем объединения петель, отвечающих ленточкам. Эта разница в терминологии не важна для реализуемости, изучаемой здесь, но важна для подсчета количества дисков с ленточками, см. п. 1.7 и [Sk, п. «Ориентируемость и классификация утолщений»].

Это нестрогое определение формализуется понятиями гомеоморфности и склейки (п. 2.7 и пример 5.1.1.c); ср. п. 1.7.

Например, кольцо и цилиндр (рис. 2.1.2 и текст перед ним) — диски с одной неперекрученной ленточкой, а круг с  $n$  дырками (рис. 3.9.2) — диск с  $n$  неперекрученными ленточками. Другие примеры дисков с неперекрученными ленточками см. на рис. 1.5.2 и 1.5.3.

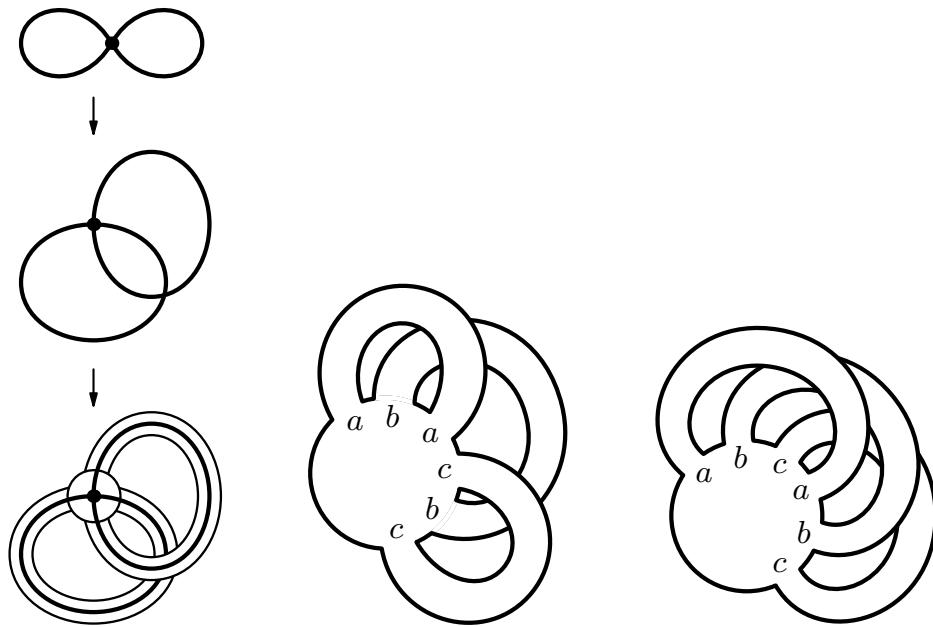


Рис. 1.5.2. Слева: вверху изображен мультиграф с одной вершиной и двумя петлями, ниже его отображение в плоскость, а еще ниже — соответствующий диск с неперекрученными ленточками; он отвечает слову  $(abab)$ .

В центре и справа: диски с тремя неперекрученными ленточками, отвечающие словам  $(abacbc)$  и  $(abcabc)$ .

Ленточки  $a$  и  $b$  в диске с ленточками называются **перекрещивающимися**, если отрезки, по которым они приклеиваются к многоугольнику, чередуются вдоль края многоугольника, т. е. идут в циклическом порядке  $(abab)$ , а не  $(aabb)$ .

**Лемма 1.5.1.** *Диск с неперекрученными ленточками можно вырезать из плоскости тогда и только тогда, когда у него нет перекрещивающихся ленточек.*

**Краевая окружность** диска с ленточками — связный кусок множества тех его точек, к которым он подходит «с одной стороны». Это нестрогое определение формализовано в п. 5.4. Крае-

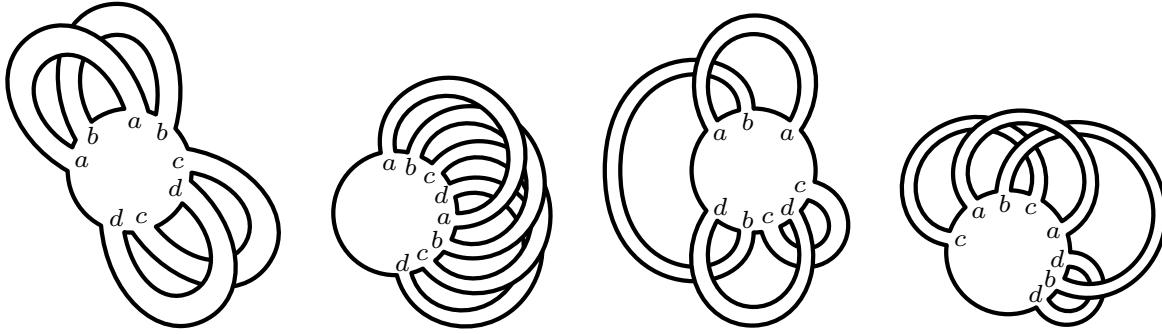


Рис. 1.5.3. Диски с четырьмя неперекрученными ленточками  
(не реализуемые на торе)

вые окружности выделены жирным на рис. 1.5.2 в центре и справа. Например, у дисков с неперекрученными ленточками на рис. 1.5.2 одна, две и две краевые окружности.

**1.5.2.** (a) Сколько краевых окружностей может быть у диска с двумя неперекрученными ленточками (более аккуратно, найдите все  $F$ , для которых существует диск с двумя неперекрученными ленточками, имеющий  $F$  краевых окружностей)?

(b) Сколько краевых окружностей у дисков с неперекрученными ленточками на рис. 1.5.3?

(c) Сколько краевых окружностей может быть у диска с пятью неперекрученными ленточками?

(d) Adding a non-twisted ribbon changes the number of boundary circles by  $\pm 1$ .

**Лемма 1.5.3.** (a) Число краевых окружностей диска с  $n$  неперекрученными ленточками не превосходит  $n + 1$ .

(a') Число краевых окружностей диска с  $n$  ленточками, среди которых есть перекрученная, не превосходит  $n$ .

(b) Для диска с  $n$  неперекрученными ленточками каждое из условий леммы 1.5.1 равносильно тому, что краевых окружностей ровно  $n + 1$ .

**1.5.4.** По слову длины  $2n$  из  $n$  букв, в котором каждая буква встречается дважды, постройте граф, число компонент связности которого равно числу краевых окружностей диска с неперекрученными ленточками, отвечающего данному слову. (Значит, это число можно находить на компьютере, не рисуя рисунка.)

## 1.6. Планарность утолщений

Для данного графа рассмотрим объединение попарно непересекающихся выпуклых многоугольников на плоскости, число которых равно числу вершин графа. На каждой из замкнутых ломаных, ограничивающих многоугольники, отметим непересекающиеся отрезки, отвечающие выходящим из соответствующей вершины ребрам. Для каждого ребра графа соединим (не обязательно в плоскости) соответствующие ему два отрезка ленточкой так, чтобы ленточки попарно не пересекались (рис. 1.6.1). **Утолщением** графа называется объединение построенных выпуклых многоугольников и ленточек. Граф называется *спайном* или *утощением* этого объединения. Справедливо замечание, аналогичное приведенному в сноске 6 в начале п. 1.5.

Утолщение графа называется **ориентируемым**, если на каждой из замкнутых ломаных, ограничивающих многоугольники, можно выбрать ориентацию, так что стрелки на границах многоугольников *противонаправлены* «при переносе» вдоль ленточки (рис. 1.5.1 слева). Заметим, что каждый из двух способов на рис. 1.6.1 может отвечать такому соединению дисков ленточками. Утолщение графа называется **неориентируемым**, если выбрать так ориентации невозможно.

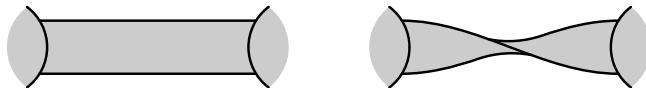


Рис. 1.6.1. Соединение дисков ленточкой

Например, ориентируемые утолщения графов  $K_{3,2}$  и  $K_{3,3}$  изображены на рис. 1.6.2.

Диск с ленточками (п. 1.5) — утолщение мультиграфа, состоящего из одной вершины с петлями.

**Регулярной окрестностью** графа, нарисованного без самопересечений на плоскости (или на сфере с ручками, см. п. 2.1), называется объединение шапочек и ленточек, построенных по графу как на рис. 1.6.3 слева (см. строгое определение в п. 5.4). Регулярная окрестность графа является его ориентируемым утолщением (рис. 1.6.3 слева). Более общим образом, если дано отображение

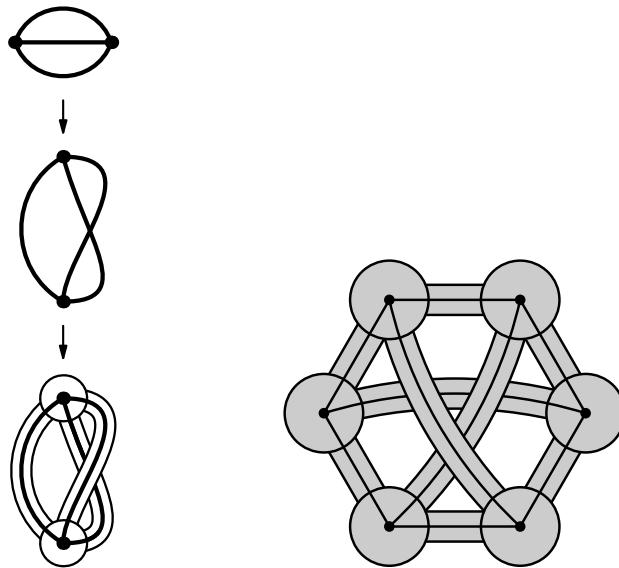


Рис. 1.6.2. Слева: вверху изображен граф  $K_{3,2}$ , ниже его отображение в плоскость, и еще ниже — соответствующее утолщение.

Справа: ориентируемое утолщение графа  $K_{3,3}$

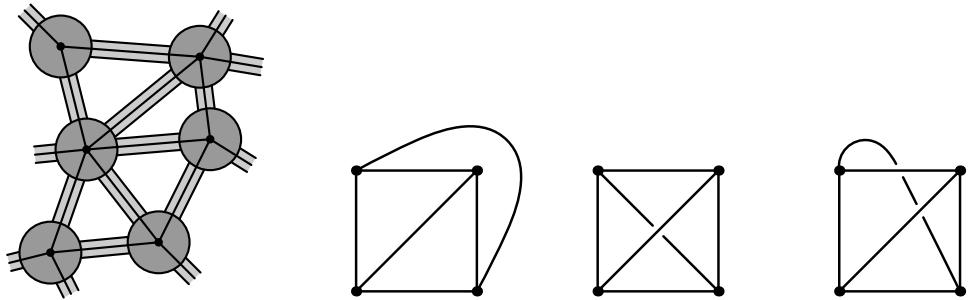


Рис. 1.6.3. Слева: шапочки и ленточки образуют регулярную окрестность (утолщение) графа на поверхности.

Справа: отображения графа  $K_4$  в плоскость

*общего положения* графа  $G$  в плоскость (или в сферу с ручками, см. п. 2.1), то можно построить ориентируемое утолщение графа  $G$ , «соответствующее» этому отображению (рис. 1.5.2 и 1.6.2 слева, рис. 1.6.3 справа).

Утолщение называется **планарным**, если его можно вырезать из плоскости.

**1.6.1. (а)** Любое утолщение дерева планарно.

- (b) Любое ориентируемое утолщение цикла планарно.
- (c) Любое ориентируемое утолщение унициклического графа планарно. (Граф называется *унициклическим*, если из него получается дерево удалением некоторого ребра.)
- (d) Планарно ли ориентируемое утолщение графа  $K_{3,2}$  на рис. 1.6.2 слева?
- (e) Какие из ориентируемых утолщений графа  $K_4$  (рис. 1.6.3 справа) планарны?
- (f) Граф планарен тогда и только тогда, когда он имеет планарное ориентируемое утолщение.
- (g) Для любого графа имеется конечное число наборов ориентированных циклических порядков ребер, выходящих из его вершин (moreover, there is an algorithm перебирающий эти наборы).

Распознавание планарности графов сводится к распознаванию планарности ориентируемых утолщений ввиду утверждений 1.6.1 (f, g).

**1.6.2.** (a) Определите операцию *стягивания ребра* утолщения, чтобы она давала операцию стягивания ребра графа и сохраняла планарность.

(b) Нарисуйте утолщения, полученные из утолщений графа  $K_4$  (рис. 1.6.3 справа) стягиванием «верхнего горизонтального» ребра.

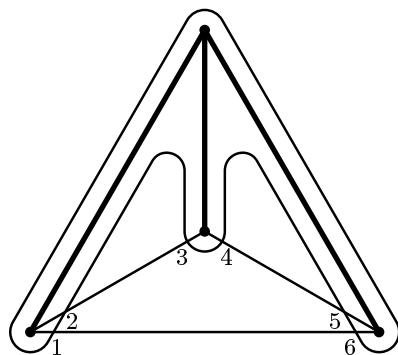


Рис. 1.6.4. Обход вокруг максимального дерева

**Теорема 1.6.3.** (a) Существует алгоритм распознавания планарности утолщений.

(b) Каждое из следующих условий на ориентируемое утолщение связного графа равносильно планарности этого утолщения.

(I) Для любого максимального дерева  $T$  при обходе вдоль границы утолщения дерева  $T$  (рис. 1.6.4) получается циклическая последовательность ребер, не лежащих в  $T$ , в которой каждое ребро встречается два раза; тогда любые два ребра не чередуются, т. е. идут в циклическом порядке ( $aabb$ ), а не ( $abab$ ).

(E) Количество краевых окружностей утолщения равно  $E - V + 2$ , где  $V$  и  $E$  — количества вершин и ребер графа.

(Краевые окружности утолщения определяются аналогично случаю дисков с ленточками.)

(S) Утолщение «не содержит» подутолщений «восьмерки» и «буквы тета», изображенных на рис. 1.5.2 и 1.6.2 слева. (Более точно, граф не содержит подграфа, гомеоморфного одному из изображенных на этих рисунках вверху, сужение утолщения на который гомеоморфно одному из изображенных на этих рисунках внизу.)

#### 1.6.4. У любого утолщения

- (a) дерева одна краевая окружность;
- (c) of a connected graph with  $V$  vertices and  $E$  edges has at most  $E - V + 2$  boundary circles.

**1.6.5.** У любого неориентируемого утолщения of a connected graph with  $V$  vertices and  $E$  edges has at most  $E - V + 1$  boundary circles.

Hint: Assertions 1.6.4.c and 1.6.5 follow from Lemmas 1.5.3.a,a'.

### 1.7. Иероглифы и ориентируемые утолщения\*

В этом пункте мы приведем интерпретацию конструкций из п. 1.5 и 1.6. Записью (или представителем) иероглифа называется слово длины  $2n$  из  $n$  букв, в котором каждая буква встречается два раза. Иероглифом называется класс эквивалентности таких слов с точностью до переименования букв и циклического сдвига. Другие названия: хордовая диаграмма; мультиграф с вращениями, имеющий одну вершину.

Иероглифы изображаются рисунками типа рис. 1.5.2 слева и 1.7.1, т. е. семейством петель с общей вершиной на плоскости. Циклический порядок задается перечислением выходящих из вершины отрезков при обходе вокруг вершины против часовой стрелки.

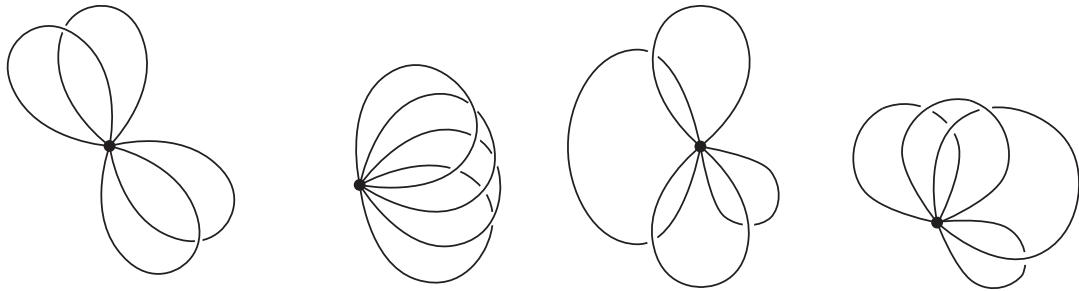


Рис. 1.7.1. Иероглифы из четырех букв (это «одномерный аналог» рис. 1.5.3)

Иероглиф можно также изобразить фигурой из  $2n$  отрезков с общей вершиной на плоскости («плоской звездой с  $2n$  лучами»), отрезки которой пересекаются друг с другом только по общей вершине и разбиты на пары в соответствии со словом-иероглифом. Если отрезки из каждой одной пары соединить ломаной (ломаные могут пересекаться), то получится предыдущее представление.

*Диском с ленточками, отвечающим иероглифу*, называется диск с ленточками, отвечающий любой записи иероглифа. Поэтому иероглиф можно задавать и как единственный соответствующий диск с неперекрученными ленточками (п. 1.5). Например, на рис. 1.5.3 изображены диски с неперекрученными ленточками, соответствующие иероглифам с рис. 1.7.1.

**1.7.1.** (а) Сколько имеется иероглифов из 3 букв? (б) А из 4?

*Полуребром* графа называется «половинка» ребра. При этом петле кратности  $k$  отвечают  $2k$  полуребер. *Ориентируемым утолщением* (одномерным) графа называется этот граф вместе с указанием для каждой его вершины ориентированного циклического порядка выходящих из нее полуребер. См. примеры на рис. 1.6.2 и 1.6.3 справа.

В п. 1.6 приведено «эквивалентное двумерное определение» ориентируемого утолщения. Оно сложнее тем, что двумерно (а не одномерно), но именно оно возникает в других областях математики. Кроме того, иногда с ним удобнее работать.

**1.7.2.** (Загадка) (а) Сколько имеется ориентируемых утолщений графа  $K_4$ ?  
 (б) То же с точностью до *изоморфизма*.

## § 2. Наглядные задачи о поверхностях

Wissen war ein bisschen Schaum, der über eine Woge tanzt. Jeder Wind konnte ihn wegblasen, aber die Woge blieb.

E. M. Remarque. Die Nacht von Lissabon<sup>7</sup>

В п. 2.1 напоминаются определения основных поверхностей. Его можно пропустить и возвращаться к нему по мере необходимости. В п. 2.2 приведены наглядные задачи о разрезании и вырезании. Сформулированы теоремы Римана и Бетти 2.3.5, необходимые для доказательства невырезаемости. В п. 2.4 приведены простейшие результаты о графах и раскрасках карт на поверхностях (теоремы 2.4.4, 2.4.5 (b), 2.4.7). Они аналогичны результатам о плоскости из п. 1.1 и 1.3. Для их доказательства необходим аналог формулы Эйлера — неравенство Эйлера 2.5.3 (а). Оно доказывается в п. 2.5 вместе с теоремой Римана 2.3.5 (а). В п. 2.6 строится алгоритм распознавания реализуемости графа на данной поверхности (т. е. доказывается теорема 2.4.5 (b)). В п. 2.7 неформально вводится и изучается понятие топологической эквивалентности поверхностей. В частности, в задачах 2.7.7 (b) и 2.7.9 (b) показана одна из основных идей доказательства теоремы 5.6.1 о классификации поверхностей. В п. 2.8 приводятся аналоги предыдущих примеров и результатов для неориентируемых поверхностей.

### 2.1. Примеры поверхностей

Если вы не знакомы с декартовыми координатами в пространстве, то в начале книги координатные определения можно опустить и работать с наглядными описаниями и изображениями на рисунках (приводимыми после координатных определений).

---

<sup>7</sup>Знание здесь — только пена, пляшущая на волне. Одно дуновение ветра — и пены нет. А волна есть и будет всегда. (Э. М. Ремарк. Ночь в Лиссабоне. Пер. Ю. Плашевского.)

**Сферой**  $S^2$  называется множество точек  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , для которых  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Это то же самое, что множество всех точек  $(x, y, z)$  вида

$$(\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, \sin \psi).$$

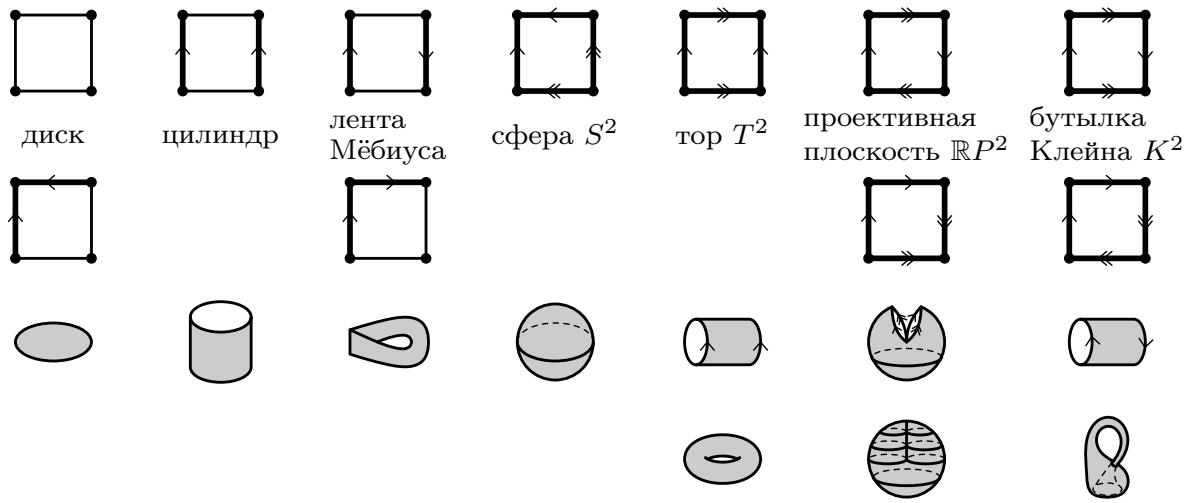


Рис. 2.1.1. Поверхности, полученные склейкой сторон прямоугольника

Далее под *прямоугольником* понимается двумерная часть плоскости (а не ее граница), и «склейка» включает «непрерывную деформацию», подтягивающую склеиваемые точки друг к другу.

Сфера получена из прямоугольника  $ABCD$  «склейкой» пар его соседних сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  с указанными направлениями (четвертая колонка на рис. 2.1.1).

**Кольцом** называется множество  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  (рис. 6.4.1). **Боковой поверхностью цилиндра** (рис. 2.1.2 справа) называется множество

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Каждая из этих фигур получена из прямоугольника  $ABCD$  «склейкой» его двух противоположных сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  «с одинаковым направлением» (вторая колонка на рис. 2.1.1).

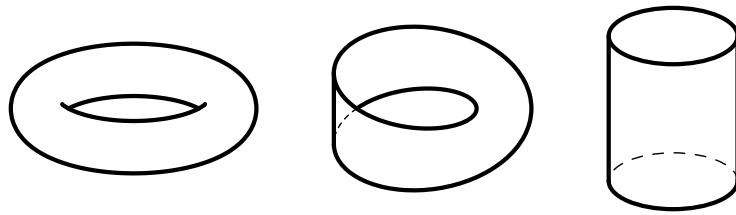


Рис. 2.1.2. Тор, лента Мёбиуса и боковая поверхность цилиндра

**Тором**  $T^2$  называется фигура, образованная вращением окружности  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  вокруг оси  $Oy$  (рис. 2.1.2 слева).

Тор — «поверхность бублика». Он получен из прямоугольника  $ABCD$  «склейкой» пар его противоположных сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$  «с одинаковыми направлениями» (пятая колонка на рис. 2.1.1).

**Лентой Мёбиуса** называется множество точек в  $\mathbb{R}^3$ , заметаемое стержнем длины 1, равномерно вращающимся относительно своего центра, при равномерном движении этого центра по окружности радиуса 9, при котором стержень делает пол-оборота (рис. 2.1.2 в середине).

Лента Мёбиуса получена из прямоугольника  $ABCD$  «склейкой» двух его противоположных сторон  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  «с противоположным направлением» (третья колонка на рис. 2.1.1).

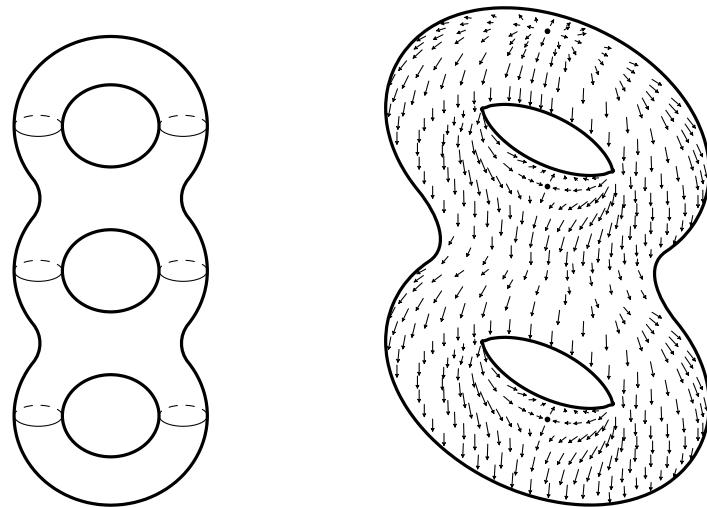


Рис. 2.1.3. Сфера с двумя и с тремя ручками

**Сферой с  $g$  ручками**  $S_g$  при  $g \geq 1$  называется множество точек  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , для которых

$$x^2 + \prod_{k=1}^g ((z - 4k)^2 + y^2 - 4)^2 = 1.$$

*Сферой с нулем ручек* называется сфера  $S^2$ . Сфера с одной ручкой — тор. Сфера с двумя и с тремя ручками изображены на рис. 2.1.3.

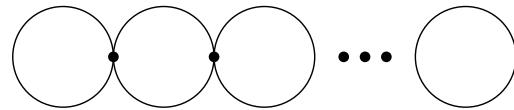


Рис. 2.1.4. «Цепочка окружностей» на плоскости

Уравнение  $\prod_{k=1}^g ((z - 4k)^2 + y^2 - 4) = 0$  задает «цепочку окружностей» на плоскости  $Oyz$  (рис. 2.1.4). Сфера с  $g$  ручками является границей «трубчатой окрестности» этой цепочки в пространстве. Поэтому сфера с  $g$  ручками получена из сферы «вырезанием»  $2g$  дисков и последующей «заклейкой»  $g$  пар краевых окружностей этих дисков криволинейными боковыми поверхностями цилиндров (рис. 2.1.5).

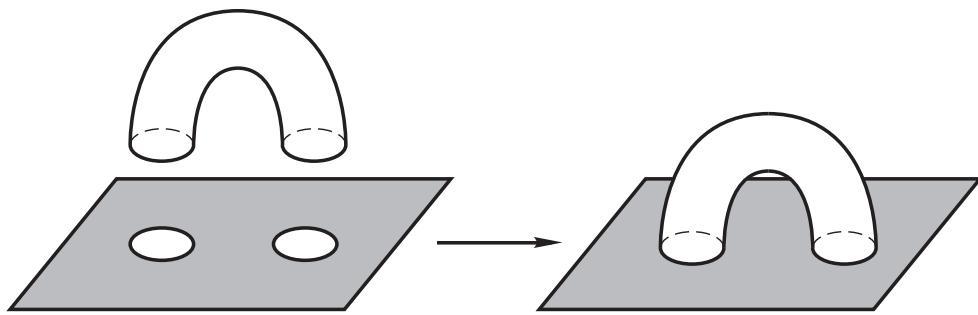


Рис. 2.1.5. Приклейвание ручки

**Сферой с  $g$  ручками и дыркой**  $S_{g,0}$  называется часть сферы с  $g$  ручками, лежащая не выше той плоскости, которая расположена чуть ниже касательной плоскости в верхней точке (т. е. расположена в области  $z \leq 4g + 2$ ). Эта фигура получена из сферы с ручками «вырезанием дырки».

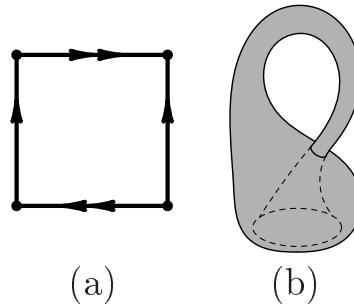


Рис. 2.1.6. Бутылка Клейна: (а) склейка прямоугольника; (б) изображение в  $\mathbb{R}^3$

Неформально говоря, *бутылка Клейна* получена из прямоугольника  $ABCD$  такой «склейкой» пар противоположных сторон, при которой одна пара  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{DC}$  склеивается «с одинаковым направлением», а другая пара  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{DA}$  — «с противоположным направлением» (рис. 2.1.6 (а)).

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^4$  окружность  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = t = 0$  и семейство ее нормальных трехмерных плоскостей. Строго говоря, **бутылкой Клейна**  $K$  называется множество точек в  $\mathbb{R}^4$ , заметаемое окружностью  $\omega$ , центр которой равномерно описывает рассматриваемую окружность, а окружность  $\omega$  в то же время равномерно поворачивается на угол  $\pi$  (поворачивается в движущейся нормальной трехмерной плоскости относительно своего диаметра, движущегося вместе с нормальной трехмерной плоскостью).

Проекция бутылки Клейна на  $\mathbb{R}^3$  изображена на рис. 2.1.6 (б).

Далее слово «поверхность» означает собирательное название определенных выше фигур, а не математический термин (ср. с определением 2-многообразия в п. 4.5).

## 2.2. Разрезания и вырезания

В задачах этого пункта нужны не аккуратные доказательства, а большие понятные и по возможности красивые рисунки.

**2.2.1.** (а) При любом  $n$  существуют  $n$  точек в трехмерном пространстве, для которых отрезки, их соединяющие, не имеют общих внутренних точек (т. е. любой граф можно нарисовать без самопересечений в пространстве).

(b) Любой граф можно нарисовать без самопересечений в книжке с некоторым количеством листов (рис. 2.2.1; определение дано после него), зависящим от графа. Более точно, для любого  $n$  существует число  $k$ , а также  $n$  точек и  $n(n - 1)/2$  несамопересекающихся ломаных в книжке с  $k$  листами, для которых каждая пара точек соединена некоторой ломаной, и никакая ломаная не пересекает внутренности другой ломаной.

(c) То же, что в п. (b), с заменой  $k$  листов на 3 листа.

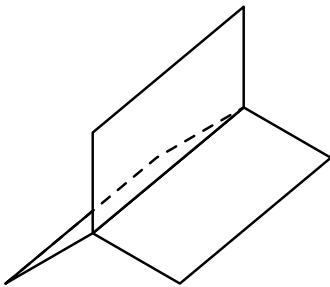


Рис. 2.2.1. Книжка с тремя листами

Возьмем в трехмерном пространстве  $n$  прямоугольников  $XYB_kA_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , любые два из которых пересекаются только по отрезку  $XY$ . *Книжкой с  $n$  листами* называется объединение этих прямоугольников, см. рис. 2.2.1 для  $n = 3$ .

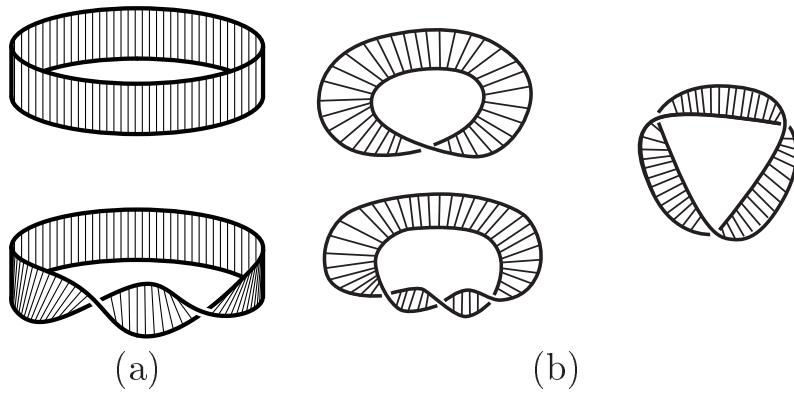


Рис. 2.2.2. Нестандартные (а) кольца; (б) ленты Мёбиуса

*Нестандартным кольцом* называется любая фигура, полученная из прямоугольника склейкой его двух противоположных сторон «с одинаковым направлением» (рис. 2.2.2 (а)). Это нестрогое

определение формализуется понятиями гомеоморфности и склейки (п. 2.7 и пример 5.1.1.с). Аналогично определяются нестандартные лента Мёбиуса (рис. 2.2.2 (b)), тор с дыркой, сфера с ручками и дыркой, бутылка Клейна с дыркой и т. д. Они используются только в этом пункте (из стандартных фигур вырезаются нестандартные); слово «нестандартные» опускается.

**2.2.2.** Разрежьте ленту Мёбиуса так, чтобы получилось

- (a) кольцо; (b) кольцо и лента Мёбиуса.

**2.2.3.** Разрежьте бутылку Клейна (рис. 2.1.6) так, чтобы получилось

- (a) две ленты Мёбиуса; (b) одна лента Мёбиуса.

**2.2.4.** Вырежьте из книжки с тремя листами (рис. 2.2.1)

- (a) ленту Мёбиуса; (b) тор с дыркой;
- (c) сферу с двумя ручками и дыркой;
- (d) бутылку Клейна с дыркой.

**2.2.5.** \* На краевой окружности тора с дыркой взяты точки  $A, B, C, D$  (именно в этом порядке вдоль окружности). К тору с дыркой приклеили прямоугольник  $A'B'D'C'$ , склеив  $AB$  с  $A'B'$  и  $CD$  с  $C'D'$ . Вырежьте из полученной фигуры (т. е. из тора с дыркой и лентой Мебиуса) три попарно непересекающиеся ленты Мебиуса.

## 2.3. Невырезаемость и разбивающие кривые

**2.3.1.** (a) Из плоскости невозможно вырезать тор с дыркой.

(b) Из сферы с меньшим числом ручек невозможно вырезать сферу с большим числом ручек и дыркой.

(c) Из ленты Мёбиуса невозможно вырезать две непересекающиеся ленты Мёбиуса.

(d) При каких  $g, m, g', m'$  из диска с  $g$  ручками и  $m$  лентами Мебиуса (см. определения перед рис. 2.1.5 и 2.8.1) можно вырезать  $g'$  торов с дыркой и  $m'$  лент Мебиуса, все  $g' + m'$  фигур попарно непересекающиеся?

*Доказательство п. (a).* П. (a) следует из леммы о пересечении 1.4.4 или из (фактически эквивалентной) непланарности графа  $K_5$  (утверждение 1.3.2 (a)), поскольку аналогичные результаты для тора несправедливы (ср. с утверждением 2.4.1 (a)).

Вот другое доказательство, которое обобщается на п. (b). Пусть, напротив, тор с дыркой вырезан из плоскости. Возьмем на нем замкнутую несамопересекающуюся кривую  $\gamma$ , не разбивающую его (утверждение 2.3.2.а). В следующем абзаце доказано, что  $\gamma$  не разбивает плоскость (детали необходимы because e.g. the boundary circle of the disk does not separate the disk, but does separate the plane containing the disk). Противоречие с теоремой Жордана 1.4.3 (b).

Возьмем любые две точки на плоскости, не лежащие на  $\gamma$ . Соединим их ломаной  $\alpha$  «в общем положении» относительно  $\gamma$ . Эта ломаная пересекает  $\gamma$  в конечном числе точек. Для каждой точки  $A$  из них возьмем маленький отрезок  $\alpha_A$  ломаной  $\alpha$ , содержащий  $A$  внутри себя. Концы этого отрезка лежат в торе с дыркой. Поэтому их можно соединить ломаной  $\alpha'_A$ , не пересекающей  $\gamma$ . Заменим каждый отрезок  $\alpha_A$  на  $\alpha'_A$ . Получим ломаную, соединяющую данные точки и не пересекающую  $\gamma$ .  $\square$

*Comments on the proof of (b,c,d).* Пункт (b) следует из теоремы 2.3.5 (c) и утверждения 2.3.3.с. Пункт (b) также следует из утверждения 2.4.4 (c), или из теоремы 2.3.5 (a) и утверждения 2.3.3.а (observe that both утверждение 2.4.4 (c) и Theorem 2.3.5 (a) используют неравенство Эйлера 2.5.3 (a)). Продумайте детали вывода из теорем 2.3.5 (c) или 2.3.5 (a), ср. с (a).

Аналогично, пункт (c) можно вывести из любого из утверждений 2.8.2 (a), 2.8.2 (c) or 2.8.3 (b).

Для решения пункта (d) полезно утверждение 2.8.5 (c), см. также утверждение 2.6.6 и задачу 6.7.7.  $\square$

**2.3.2.** (a) Нарисуйте на торе замкнутую кривую, при разрезании по которой тор не распадается на куски.

(b) То же для ленты Мёбиуса.

(c) Нарисуйте на торе две замкнутые кривые, при разрезании по объединению которых тор не распадается на куски.

(d) Нарисуйте на бутылке Клейна две замкнутые непересекающиеся кривые, при разрезании по объединению которых она не распадается на куски.

Кривые и графы на торе легко определяются при помощи представления тора как склейки прямоугольника. *Кривой (кусочно линейной) на торе* называется набор ломаных в прямоугольнике

с некоторыми условиями (сообразите какими!). Аналогично, другие поверхности получаются склейкой из плоских многоугольников (для сфер с ручками см. задачу 2.3.4). Это позволяет определить кривые и графы на других поверхностях. Другая формализация приведена в § 5, см. также § 4.

**2.3.3.** На сфере с  $g$  ручками  $S_g$  имеется

- (а)  $g$  замкнутых попарно непересекающихся кривых, объединение которых не разбивает ее.
- (б)  $2g$  замкнутых кривых, любые две из которых пересекаются в конечном числе точек, объединение которых не разбивает ее.
- (с) неразбивающий букет  $2g$  циклов.

**2.3.4.** Для каждого  $g > 0$  склейте  $S_g$  из  $4g$ -угольника. (See visualization in <https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw> and in <https://www.youtube.com/watch?v=U5N5mg3MePM>.)

Оказывается, при разрезании тора по объединению любых двух непересекающихся замкнутых кривых тор обязательно распадается на куски. Это частный случай следующих обобщений теоремы Жордана 1.4.3 (б).

**Теорема 2.3.5.** (а) (Риман) *Объединение любых  $g + 1$  попарно непересекающихся замкнутых кривых на  $S_g$  разбивает  $S_g$ .*

(б) (Бетти) *Пусть на  $S_g$  имеется  $2g + 1$  замкнутых кривых, любые две из которых пересекаются в конечном числе точек. Тогда их объединение разбивает  $S_g$ .*

(с) *Любой букет  $2g + 1$  циклов, изображенный без самопересечений на  $S_g$ , разбивает  $S_g$ .*

Эти результаты (строго говоря, для *кусочно линейного случая*) следуют из неравенства Эйлера 2.5.3.а. Для пункта (с) вывод ясен, для пунктов (а, б) см. § 2.5.

В теоремах Римана и Бетти кривые могут быть самопересекающимися; однако интересен случай несамопересекающихся кривых, а случай самопересекающихся к нему легко сводится.

## 2.4. Графы на поверхностях и раскраски карт

Определение и обсуждение изображения без самопересечений графа на поверхности аналогично случаю плоскости, см. п. 1.3.

Формализация намечена после задачи 2.3.2 и приведена в конце п. 5.2, но для первого знакомства она не обязательна.

Тор, лента Мёбиуса (и другие фигуры) предполагаются *прозрачными*, т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что в геометрии мы говорим о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

**2.4.1.** Нарисуйте на торе без самопересечений граф

- (a)  $K_5$ ; (b)  $K_{3,3}$ ; (c)  $K_6$ ; (d)  $K_7$ ; (e)\*  $K_{4,4}$ ; (f)\*  $K_{6,3}$ .

Определение **реализуемости** графа на торе или на сфере с ручками аналогично определению планарности.

**Утверждение 2.4.2.** *Любой граф реализуем на сфере с некоторым количеством ручек, зависящим от графа.*

**2.4.3.** (a) Граф  $K_8$ ; (b) графы  $K_{5,4}$  и  $K_{3,7}$ ; (c)\* граф  $K_5 \sqcup K_5$  не реализуем на торе.

Для доказательства утверждений 2.4.3 и 2.4.4 требуется неравенство Эйлера 2.5.3 (a).

Ввиду задач 2.4.1.ef и утверждения 2.4.3 (b) и среди полных двудольных графов на торе реализуемы только следующие графы и их полные двудольные подграфы:  $K_{2,n}$ ,  $K_{3,6}$  и  $K_{4,4}$ .

Вот аналог утверждения 2.4.3 для сфер с ручками.

**Утверждение 2.4.4.** (a) *Граф  $K_n$  не реализуем на сфере менее чем с  $(n - 3)(n - 4)/12$  ручками.*

(b) *Граф  $K_{m,n}$  не реализуем на сфере менее чем с  $(m - 2)(n - 2)/4$  ручками.*

(c)\* *Несвязное объединение  $g + 1$  копии графа  $K_5$  не реализуемо на сфере с  $g$  ручками  $S_g$ .*

Ввиду утверждений 2.4.4 (a,c) для любого  $g$  существует граф (например,  $K_{g+15}$  или несвязное объединение  $g + 1$  копии графа  $K_5$ ), не реализуемый на  $S_g$  (второй из этих графов реализуем на  $S_{g+1}$ ). Оценки в утверждении 2.4.4 неулучшаемы [Pr14, 13.1].

**Теорема 2.4.5.** *Для любого  $g$  существует алгоритм распознавания реализуемости графов на  $S_g$ .*

Для доказательства используйте теорему 2.6.8 (a).

**2.4.6.** *Картой на торе* называется разбиение тора на (криволинейные и изогнутые) многоугольники. Раскраска карты на торе называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Любую ли карту на торе можно правильно раскрасить в

- (a) 5 цветов; (b) 6 цветов?

Оказывается, любую карту на торе можно правильно раскрасить в 7 цветов. Это частный случай следующего результата. *Карта на  $S_g$  и правильность ее раскраски* определяются аналогично случаю тора.

**Теорема 2.4.7** (Хивуд). *Если  $0 < g < (n - 2)(n - 3)/12$ , то любую карту на  $S_g$  можно правильно раскрасить в  $n$  цветов.*

Аналог этой теоремы для  $g = 0$  верен: это гипотеза четырех красок. Ввиду результатов Рингеля о вложениях графа  $K_n$  [Pr14, 13.1]  $n - 1$  цветов не хватит при  $g \geq (n - 2)(n - 3)/12$ .

Теорема Хивуда 2.4.7 вытекает из следующего утверждения, для доказательства которого требуется неравенство Эйлера 2.5.3 (a).

**2.4.8.** (a) В любом графе, нарисованном без самопересечений на торе, есть вершина, из которой выходит не более 6 ребер.

(b) Если  $0 < g < (k - 1)(k - 2)/12$ , то в любом графе, нарисованном без самопересечений на  $S_g$ , есть вершина, из которой выходит не более  $k$  ребер.

## 2.5. Неравенство Эйлера для сфер с ручками

Пусть на поверхности нарисован без самопересечений граф. Назовем **гранью** каждый из связных кусков, на которые распадается поверхность при разрезании по всем ребрам графа.

На торе имеются две замкнутые кривые, для которых при разрезаниях по первой и по второй тор распадается на разное количество кусков (задача 2.3.2 (a)). Итак, количество граней зависит от способа изображения графа на данной поверхности. Однако аналог формулы Эйлера для поверхностей имеется. Это следующие неравенства 2.5.1 (d) и 2.5.3 (a).

**2.5.1.** (a, b, c, d) То же, что в утверждениях 1.4.2, с заменой плоскости на сферу с ручками, а плоского графа — на граф, нарисованный без самопересечений на сфере с ручками.

(d') В парламенте из  $n$  человек имеется несколько (попарно различных по составу) комиссий по три человека в каждой. Известно, что каждый человек находится в некоторой комиссии. Известно также, что если два человека находятся в некоторой комиссии, то множество из этих двух человек содержится ровно в двух комиссиях. Такие две комиссии называются *смежными*. Еще известно, что любые две комиссии соединяются цепочкой комиссий, в которой соседние комиссии смежны. Докажите, что число комиссий не меньше  $2n - 4$ .

*Указание.* There is an intuitive reduction to (d) (observe that rigorous proof of (d) requires some technicalities). For a realization of this idea in an algebraic way see [MNS, §2.2].

(e) Если график  $G$  является подграфом связного графа  $H$  на сфере с ручками, то  $V_G - E_G + F_G \geq V_H - E_H + F_H$ .

*Указание.* Пункт (e) следует из п. (c). Use the operations of deleting an edge, or deleting a hanging vertex.

*Предостережение.* Пункт (e) неверен для несвязного графа  $H$ , but is true for a disconnected graph  $H$  if every connected component contains a vertex of  $G$ .

**2.5.2.** Пусть на торе нарисован без самопересечений связный график с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами. Обозначим через  $F$  число граней.

(a) Если график (точнее, его изображение) содержит параллель и меридиан, то  $F = E - V$ .

*Указание.* Разрежьте тор по параллели и меридиану. Получится связный плоский график, лежащий в квадрате и содержащий границу квадрата. Примените к нему формулу Эйлера.

(b) Выполнено неравенство  $F \geq E - V$ .

*Пояснение.* Предполагается, что график пересекает объединение параллели и меридиана в конечном числе точек, причем после разрезания по этому объединению с последующей разверткой на плоскость из графа получается объединение ломаных (более учено: что данное вложение графа в тор является кусочно линейным общего положения относительно объединения параллели и меридиана).

*Указание.* Используйте п. (а) и утверждение 2.5.1 (е).

**2.5.3. (а) Неравенство Эйлера<sup>8</sup>.** Пусть на  $S_g$  нарисован без самопересечений связный граф с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами. Обозначим через  $F$  число граней. Тогда

$$V - E + F \geqslant 2 - 2g.$$

(б) Пусть на  $S_g$  нарисован без самопересечений граф с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $s$  компонентами связности. Обозначим через  $F$  число граней. Тогда  $V - E + F \geqslant s + 1 - 2g$ .

Неравенство Эйлера 2.5.3 (а) доказывается аналогично случаю тора 2.5.2 (б) при помощи утверждения 2.3.4.

*Набросок доказательства теоремы Римана 2.3.5 (а).* Разберем случай тора (общий случай доказывается аналогично). Пусть объединение двух непересекающихся замкнутых кривых не разбивает тор. Можно считать, что кривые несамопересекающиеся. Аналогично доказательству теоремы Жордана 1.4.3 (б), используя ориентируемость тора, получим, что тор не разбивается объединением некоторых непересекающихся несамопересекающихся «восьмерки» и окружности. Соединяя восьмерку и окружность отрезком на торе, получим граф, для которого  $V - E = -2$  и который не разбивает тор. Противоречие с неравенством Эйлера.  $\square$

*Набросок доказательства теоремы Бетти 2.3.5 (б)* (получен редактированием текста П. Караваева). Можно считать, что кривые несамопересекающиеся. Выберем на каждой кривой точки пересечения с остальными кривыми. Также добавим на кривые дополнительные точки, чтобы на каждой кривой оказалось более двух различных точек. Тогда каждая кривая является изображением простого цикла с более чем двумя вершинами. Поэтому объединение данных  $2g + 1$  кривых является изображением без самопересечений некоторого графа  $G$  с вершинами в выбранных точках.

Обозначим через  $V$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $s$  количества вершин, ребер, граней и компонент связности графа  $G$ , соответственно. Тогда в основном

---

<sup>8</sup>Обычно вместо неравенства Эйлера, достаточного для многих применений, приводится более сложная формула Эйлера 5.9.2 (ср. с утверждением 2.5.2 (а)), для формулировки которой нужно понятие *клеточного подграфа*.

лесу  $V - s$  ребер. В каждой из данных  $2g + 1$  кривых имеется ребро графа  $G$ , не лежащее в оставном лесу. Так как кривые попарно не пересекаются, то эти ребра попарно различны. Поэтому в  $G$  есть не менее  $2g + 1$  различных ребер, не лежащих в оставном лесу. Следовательно,  $V - s + 2g + 1 \leq E$ .

Ввиду этого и неравенства Эйлера 2.5.3 (b)

$$F \geq 1 - 2g + E - V + s \geq 1 - 2g + (2g + 1) = 2.$$

Поэтому граф  $G$ , а значит, и объединение данных  $2g + 1$  кривых, разбивает  $S_g$ .  $\square$

## 2.6. Реализуемость иероглифов и утолщений

Диск с неперекрученными ленточками определен в п. 1.5. Будем называть его иероглифом, ср. с п. 1.7. Иероглиф называется **реализуемым** на данной поверхности, если его можно вырезать из нее.

**2.6.1.** (a, b, c) Иероглифы, отвечающие словам  $(abab)$ ,  $(abcabc)$  и  $(abacbc)$  (рис. 1.5.2), реализуемы на торе.

Решения пп. (b, c) приведены на рис. 2.6.1.

**2.6.2.** Иероглифы, изображенные на рис. 1.5.3,  $(a', b', c', d')$  реализуемы на сфере с двумя ручками.  
 $(a, b, c, d)$  не реализуемы на торе.

Для доказательства п.  $(a', b', c', d')$  выберите две перекрещивающиеся ленточки и докажите, что диск с оставшимися ленточками реализуется на торе (доказательство с прибавлением ленточек по одной также работает, но более сложно). Утверждения 2.6.2 (a,b,c,d) доказываются аналогично решению задачи 2.3.1 (b) (вообще, никакой иероглиф с 4 ленточками, имеющий одну краевую окружность, не реализуем на торе).

Denote by  $h(M)$  the number of boundary circles of a hieroglyph or a thickening  $M$ .

**2.6.3.** (a) If a hieroglyph  $M$  is cut out of the sphere with  $g$  handles  $S_g$ , then the number of obtained connected components of  $S_g - M$  does not exceed  $h(M)$ .

(a') If a hieroglyph  $M$  with  $n$  ribbons is cut out of  $S_g$ , then  $h(M) \geq n + 1 - 2g$ .

(b) Для каждого  $g$  существует иероглиф, не реализуемый на  $S_g$ .

(c) Если иероглиф  $M$  не реализуем на  $S_g$ , а при удалении любой его ленточки получается иероглиф, реализуемый на  $S_g$ , то в  $M$  ровно  $2g + 2$  ленточки.

Here part (a') follows from part (a) and Euler's Inequality 2.5.3 (a).

Part (b) follows by part (a') (take e.g. hieroglyph  $(a_1 b_1 a_1 b_1 \dots a_{g+1} b_{g+1} a_{g+1} b_{g+1})$ )

**2.6.4.** (a) Любой иероглиф с 3 ленточками реализуем на торе.

(b) Существует ли иероглиф с 4 ленточками, имеющий две краевые окружности?

(c) Любой иероглиф с 4 ленточками, имеющий три краевые окружности, реализуем на торе.

(d) Любой иероглиф с  $n$  ленточками, имеющий не менее  $n - 1$  краевых окружностей, реализуем на торе.

Доказательство аналогично утверждениям 2.6.2(a', b', c', d'), см. также леммы 1.5.3 (a, b).

**Теорема 2.6.5.** (a) Для каждого  $g$  существует алгоритм распознавания реализуемости иероглифов на  $S_g$ .

(b) Каждое из следующих условий на иероглиф  $M$  с  $n$  ленточками равносильно его реализуемости на  $S_g$ .

(E) Справедливо неравенство  $2g \geq n + 1 - h(M)$ .

(I) Среди любых  $2g + 1$  строк матрицы перекрещиваний (см. определение ниже) найдутся несколько (не менее одной) строк, сумма которых по модулю 2 нулевая. (Иными словами, ранг над  $\mathbb{Z}_2$  матрицы перекрещиваний не превосходит  $2g$ .)

Матрицей перекрещиваний иероглифа с  $n$  ленточками называется  $n \times n$ -матрица, у которой в клетке  $a \times b$  стоит единица, если  $a \neq b$  и буквы  $a$  и  $b$  перекрещиваются, и стоит ноль в противном случае. Ср. с п. 6.7.

Здесь п. (a) следует из п. (b). Необходимость условия (E) для реализуемости следует из утверждения 2.6.3.a'. Достаточность условия (E) доказывается аналогично утверждению 2.6.4, ср. утверждение 2.7.7 (b). Критерий (I) доказывается аналогично утверждению 2.7.7 (c).

*Рангом*  $\text{rk } M$  иероглифа  $M$  называется ранг над  $\mathbb{Z}_2$  его матрицы перекрещиваний. Ранг измеряет «сложность пересечений» на иероглифе.

**2.6.6.** Иероглиф  $M$  можно вырезать из иероглифа  $M'$  тогда и только тогда, когда  $\text{rk } M \leq \text{rk } M'$ .

Ориентируемые утолщения определены в п. 1.6 и 1.7. Утолщение называется **реализуемым** на данной поверхности, если его можно вырезать из нее.

**2.6.7.** Существует ли не реализуемое на торе ориентируемое утолщение

- (а) графа  $K_4$ ; (б) графа  $K_5$ ?

**Теорема 2.6.8.** (а) Для любого  $g$  существует алгоритм расположения реализуемости утолщений на  $S_g$ .

(б) Каждое из следующих условий на ориентируемое утолщение  $M$  связного графа равносильно его реализуемости на  $S_g$ .

(Е) Справедливо неравенство  $2g \geq 2 - V + E - h(M)$ , где  $V$  и  $E$  — количества вершин и ребер графа.

(I) = 2.6.5.b(I).

Пусть даны ориентируемое утолщение связного графа  $G$  и максимальное дерево. Построим иероглиф, соответствующими ребрам, не лежащим в дереве (рис. 1.6.4). *Матрицей перекрещиваний* ориентируемого утолщения, отвечающую дереву, называется матрица перекрещиваний построенного иероглифа. *Рангом* ориентируемого утолщения называется ранг над  $\mathbb{Z}_2$  его матрицы перекрещиваний (отвечающей любому дереву).

Теорема 2.6.8 сводится к теореме 2.6.5 при помощи стягивания ребра или выделения максимального дерева.

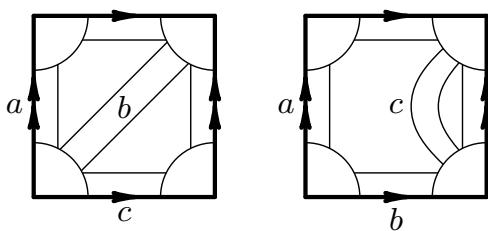


Рис. 2.6.1. Диски с ленточками, отвечающие словам  $(abcabc)$  и  $(abacbc)$ , на торе

## 2.7. Топологическая эквивалентность (гомеоморфность)

**2.7.1.** Можно ли нарисовать без самопересечений граф  $K_5$

(а) на сфере; (б) на боковой поверхности цилиндра (рис. 2.1.2)?

В этом параграфе понятие *гомеоморфности* (топологической эквивалентности) не определяется строго, см. строгое определение в п. 5.1. Для «доказательства» гомеоморфности в этом параграфе нужно нарисовать цепочку картинок, аналогичную рис. 2.7.1.

При этом разрешается временно *разрезать* фигуру, а потом *склеить* «берега» разреза. Например,

- сфера без точки гомеоморфна плоскости, а боковая поверхность цилиндра — кольцу на плоскости (здесь цепочку картинок можно получить из решения задачи 2.7.1);
- сфера с одной ручкой (рис. 2.1.5) гомеоморфна тору (рис. 2.1.2);
- диск с двумя ленточками (рис. 2.7.1 справа) гомеоморфен тору с дыркой (рис. 2.7.1 слева);

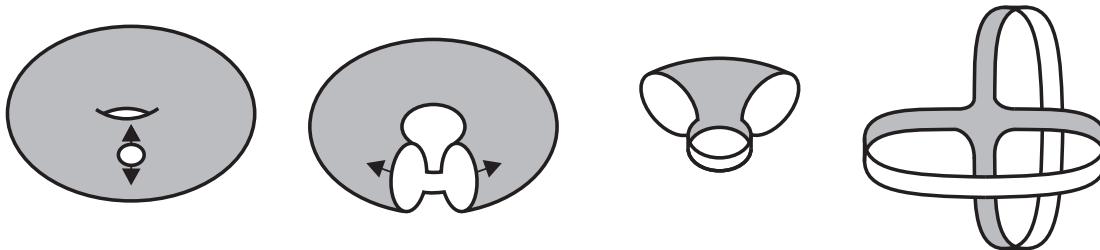


Рис. 2.7.1. Тор с дыркой гомеоморфен диску с двумя ленточками

- три ленточки на рис. 2.2.2 (б) гомеоморфны (здесь уже не обойтись без разрезания);
- две ленточки на рис. 2.2.2 (а) гомеоморфны (и здесь не обойтись без разрезания).

Ленточки на рис. 2.2.2 (а) и на рис. 2.2.2 (б) не гомеоморфны. Мы займемся *негомеоморфностью* в § 5, когда появится строгое определение и другие понятия. С их помощью приводимые в этом параграфе нестрогие рассуждения превращаются в строгие доказательства.

Понятие гомеоморфности следует отличать от *изотопности*, см. задачу 6.6.1 (б) и п. 15.5.

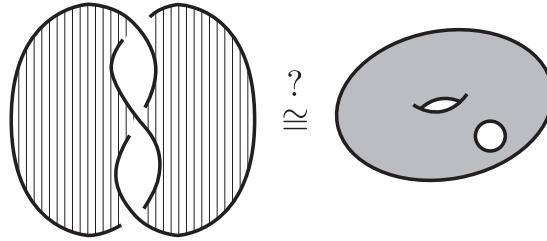


Рис. 2.7.2. Гомеоморфны ли эти фигуры?

**2.7.2.** (а, б) Фигуры на рис. 1.5.2 в центре и справа гомеоморфны тору с двумя дырками.

(с) Фигура на рис. 2.7.2 слева гомеоморфна тору с дыркой.

(д) Гомеоморфна ли фигура на рис. 1.6.2 справа сфере с ручками и дырками? Если да, то чему равно их число?

**2.7.3.** (а, б, с, д) Фигуры на рис. 1.5.3 гомеоморфны сфере с двумя ручками и одной дыркой.

**2.7.4.** При разрезании тора

(а) по любому неразбивающему циклу получается фигура, гомеоморфная кольцу;

(б) по любой неразбивающей «восьмерке» получается фигура, гомеоморфная диску (т. е. выпуклому многоугольнику).

**2.7.5.** Регулярные окрестности разных изображений без самопресечений графа на плоскости (т. е. изоморфных плоских графов, см. рис. 1.3.1) гомеоморфны.

Об иероглифах и ориентируемых утолщениях см. пп. 2.6 и 1.5–1.7.

**2.7.6.** (а) Любой иероглиф с двумя ленточками гомеоморфен либо диску с двумя дырками, либо тору с дыркой.

(б) (Загадка) Чему может быть гомеоморфно ориентируемое утолщение графа  $K_4$ ?

**Утверждение 2.7.7.** (б') Обозначим через  $M$  диск с  $n$  ленточками (не предполагаемых неперекрученными). Тогда  $h(M) \leq n + 1$ . Кроме того, следующие условия равносильны:

- $h(M) = n + 1$ ;
- $M$  гомеоморфен сфере с  $h(M)$  дырками;
- $M$  планарен;

- каждая ленточка неперекрученная, и никакие две ленточки не перекрещиваются.

(а) Два иероглифа с одинаковым числом ленточек гомеоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковое количество краевых окружностей.

(б) Формула Эйлера. Пусть дан иероглиф  $M$  с  $n$  ленточками. Тогда  $h(M) - n$  нечетно,  $h(M) \leq n + 1$  и  $M$  гомеоморфен сфере с  $(n + 1 - h(M))/2$  ручками и  $h(M)$  дырками.

(с)\* Формула Мохара. Пусть дан иероглиф ранга  $r$  с  $n$  ленточками. Тогда  $r$  четно и иероглиф гомеоморфен сфере с  $r/2$  ручками и  $n + 1 - r$  дырками.

Названия «формула Эйлера» и «формула Мохара» применительно к утверждениям 2.7.7, 2.7.9 и 2.8.8 (см. ниже) не общеприняты. Ср. с задачами 5.9.2 и 6.7.5 (f, g).

Part (b') is proved using Lemmas 1.5.3.a,a',b.

**Утверждение 2.7.8.** (a) *Any thickening of a tree is homeomorphic to the disk  $D^2$ .*

(b) *Let  $M$  be a thickening of a connected graph with  $V$  vertices and  $E$  edges. Then  $V - E + h(M) \leq 2$ . If  $V - E + h(M) = 2$ , then  $M$  is homeomorphic to the sphere with  $h(M)$  holes.*

Part (b) is reduced to Proposition 2.7.7.b' using part (a).

**Утверждение 2.7.9.** (а) *Два ориентируемых утолщения связного графа гомеоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковое количество краевых окружностей.*

(б) Формула Эйлера. Пусть дано ориентируемое утолщение  $M$  связного графа с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами. Тогда  $V - E + h(M)$  четно,  $V - E + h(M) \leq 2$  и  $M$  гомеоморфно сфере с  $(2 - V + E - h(M))/2$  ручками и  $h(M)$  дырками.

(с)\* Формула Мохара. Пусть дано ориентируемое утолщение ранга  $r$  связного графа с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами. Тогда  $r$  четно,  $V - E + r \leq 1$  и утолщение гомеоморфно сфере с  $r/2$  ручками и  $2 - V + E - r$  дырками.

## 2.8. Неориентируемые поверхности\*

### Графы и раскраски карт на диске с лентами Мёбиуса

**2.8.1.** Нарисуйте на ленте Мёбиуса без самопересечений граф

- (a)  $K_{3,3}$ ; (b)  $K_{3,4}$ ; (c)  $K_5$ ; (d)  $K_6$ .

**2.8.2.** (a) *Неравенство Эйлера.* Пусть на ленте Мёбиуса нарисован без самопересечений связный граф с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами, не пересекающий краевой окружности. Обозначим через  $F$  число граней. Тогда  $V - E + F \geq 1$ .

- (b) Граф  $K_7$  не реализуем на ленте Мёбиуса.  
 (c) Граф  $K_5 \sqcup K_5$  не реализуем на ленте Мёбиуса.  
 (d) Любую карту на ленте Мёбиуса можно правильно раскрасить в 6 цветов.

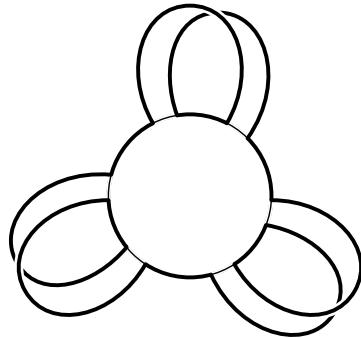


Рис. 2.8.1. Диск с лентами Мёбиуса

**Диском с  $m$  лентами Мёбиуса** (рис. 2.8.1) называется объединение круга и  $m$  ленточек, при котором

- каждая ленточка приклеивается своими двумя противоположными сторонами к граничной окружности  $S$  круга и направления на этих сторонах, задаваемые произвольным направлением на  $S$ , «сонаправлены вдоль ленточки»;
- ленточки «отделенные», т. е. имеется  $m$  попарно непересекающихся отрезков на  $S$  such that the ends of the  $i$ -th ribbon are glued to two disjoint arcs contained in the  $i$ -th arc for each  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**2.8.3.** (a) Нарисуйте на диске с  $m$  лентами Мёбиуса  $m$  замкнутых несамопересекающихся попарно непересекающихся кривых, объединение которых не разбивает его.

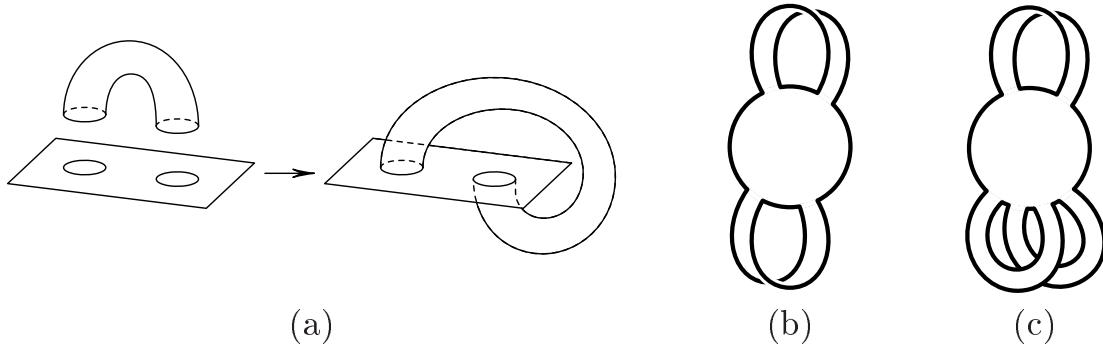


Рис. 2.8.2. (a) Приkleивание вывернутой ручки (ср. рис. 2.1.5). (b) Диск с двумя «перекрученными» «отделенными» ленточками. (c) Диск с ленточками, отвечающий слову  $(aabcbc)$  с соответствием  $w(a) = 1$  и  $w(b) = w(c) = 0$ .

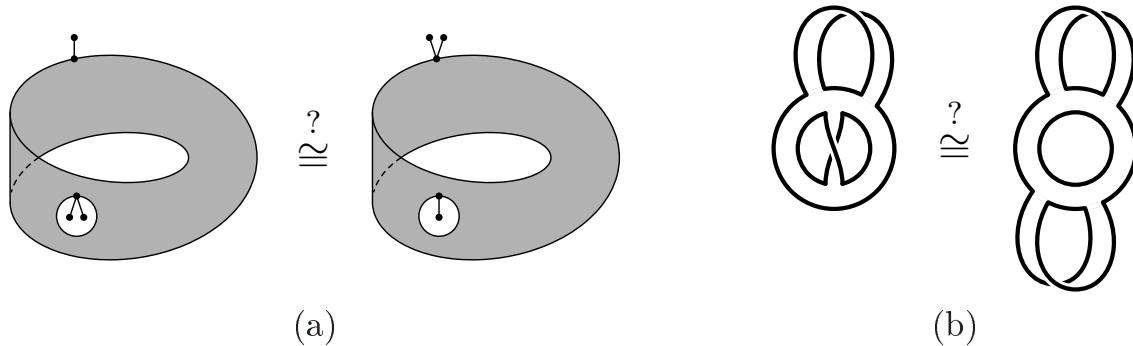


Рис. 2.8.3. (а) Равноправны ли краевые окружности ленты Мёбиуса с дыркой? (б) Гомеоморфны ли кольца с двумя лентами Мёбиуса?

#### Диски с перекрученными ленточками

Для диска с ленточками и его ленточки  $k$  обозначим  $w(k) = 1$ , если ленточка перекручена, и  $w(k) = 0$  иначе.

На рис. 2.8.2 (б, с) и 1.5.1 справа, 2.8.1 изображены соответственно

- диск с ленточками, отвечающий слову  $(aab)$ , для которого  $w(a) = w(b) = 1$ ;
  - диск с ленточками, отвечающий слову  $(aabcbc)$ , для которого  $w(a) = 1$  и  $w(b) = w(c) = 0$ ;
  - диск с  $n$  лентами Мёбиуса, т. е. диск с ленточками, отвечающий слову  $(1122\dots nn)$ , для которого  $w(1) = w(2) = \dots = w(n) = 1$ .

## 2.9. Реализуемость утолщений\*

Интересны описания утолщений, реализуемых на сфере с  $g$  ручками (или на диске с  $t$  пленками Мёбиуса), отличные от приведенных в утверждениях 2.6.5 (b) и 2.6.8 (b). Например, аналогично теореме Куратовского и задаче 1.6.3 (b,S). См. [Cu81].

### Реализуемость иероглифов

Будем сокращать «иероглиф (т. е. диск с неперекрученными ленточками), соответствующий слову  $x$ » до «иероглиф  $x$ ». См. определение в п. 1.5.

Заметим, что оценка количества реализуемых иероглифов связана с знаменитой задачей о количестве многоугольников, склейкой которых получается сфера с  $g$  ручками.

*Графом петель* иероглифа называется граф, вершинами которого являются петли иероглифа; две вершины соединены ребром, если соответствующие две петли образуют иероглиф  $(abab)$  (т. е. «перекрещиваются»).

Ввиду утверждения 1.5.1 планарность иероглифа эквивалентна отсутствию ребер в его графе петель.

*Редукцией* иероглифа называется композиция некоторого числа следующих преобразований.

(D) Удаление некоторой изолированной петли (т. е. такой петли, которая в циклическом порядке задается двумя подряд идущими буквами  $(aa\dots)$ ).

(R) Замена двух «параллельных» петель  $a$  и  $a'$  (т. е. петель, соответствующие которым буквы в циклическом порядке находятся на соседних местах и не чередуются:  $(aa'\dots a'a\dots)$ ) на одну.

Ввиду утверждения 1.5.1 планарность иероглифа эквивалентна тому, что он редуцируется до иероглифа  $()$  (так обозначается иероглиф без петель).

**2.9.1.** (a) Редукция иероглифов сохраняет реализуемость на сфере с  $g$  ручками (для данного  $g$ ).

(b) [Cu81, KPS, Be22] Следующие условия на иероглиф эквивалентны.

(1) Иероглиф реализуем на торе.

- (2) Иероглиф не содержит ни одного иероглифа с рис. 1.5.3.
- (3) Граф петель иероглифа является объединением изолированных вершин и полного дву- или трехдольного графа.
- (4) Иероглиф редуцируется до одного из иероглифов  $()$ ,  $(abab)$ ,  $(abcabc)$ .

Назовем иероглиф *слабо реализуемым* на поверхности, если из нее можно вырезать некоторый диск с ленточками, соответствующий данному иероглифу.

**2.9.2.** (a) Иероглифы  $(abab)$  и  $(abcabc)$  (рис. 1.5.2) слабо реализуемы на ленте Мёбиуса.

(b) Редукция иероглифов не обязательно сохраняет слабую реализуемость на ленте Мёбиуса.

(c)\* [Bi20] Следующие условия на иероглиф равносильны:

- слабо реализуем на ленте Мёбиуса.
- не содержит ни одного из иероглифов  $(ababcdcd)$  (рис. 1.5.3 слева) и  $(abacbc)$  (рис. 1.5.2).
- его буквы можно покрасить в красный и синий цвета так, что любые две красные буквы перекрещиваются, а любая синяя буква не перекрещивается ни с какой буквой.

**2.9.3\*.** (Нерешенная задача) Опишите иероглифы, слабо реализуемые на бутылке Клейна, в терминах запрещенных подиероглифов и редукций.

Об алгоритмах распознавания слабой реализуемости см. [Ко21].

### Реализуемость ориентируемых утолщений на торе

**2.9.4\*. Гипотеза** (А. Ошемков, А. Грабежной, Г. Погудин) *Пусть из каждой вершины связного графа выходят 3 ребра. Ориентируемое утолщение этого графа реализуемо на торе тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного из подутолщений, изображенных на рис. 2.9.1. (Подсказка — в задаче 2.9.5.)*

**2.9.5.** Пусть  $N$  — ориентируемое утолщение связного графа  $G$  степени 3 (т. е. из каждой вершины которого выходит 3 ребра), не реализуемое на торе, любое связное подутолщение которого реализуемо на торе.

- (a) В  $G$  нет петель. (b) В  $N$  одна краевая окружность.

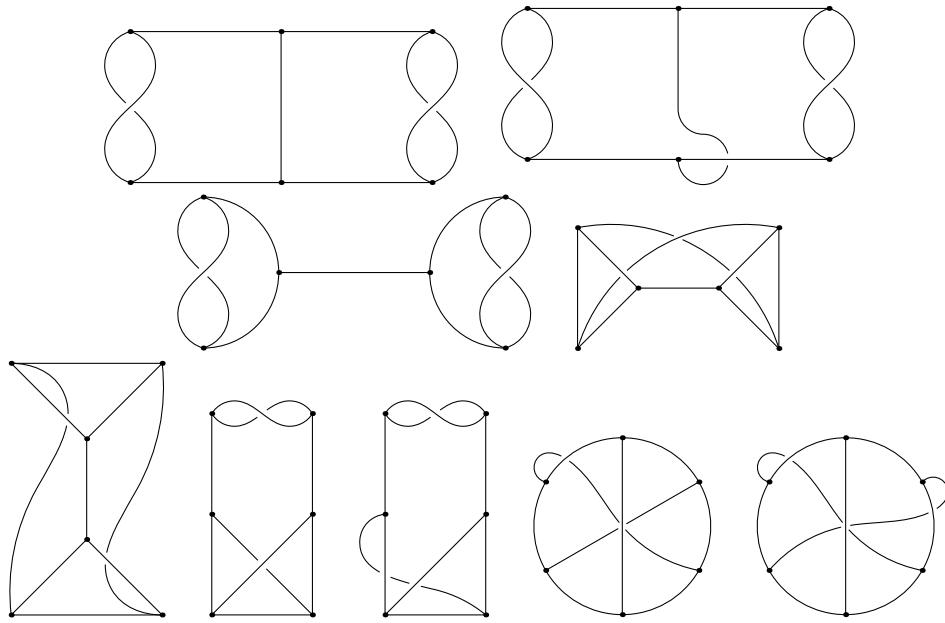


Рис. 2.9.1. Ориентируемые утолщения, не реализуемые на торе

(c) В  $G$  6 вершин и 9 ребер.

(d)\* Любой связный граф степени 3 с условиями (а) и (с) изоморден одному из графов на рис. 2.9.1 (даже одному из 1-го, 3-го, 4-го, 6-го и 8-го) или на рис. 2.9.2.

Рис. 2.9.2. Шестой график (нарисовать!)

**2.9.6.** Пусть  $N$  — ориентируемое утолщение связного графа  $G$  степени 4, не реализуемое на торе, любое подутолщение которого реализуемо на торе.

(a) В  $G$  нет петель. (b) В  $N$  одна краевая окружность.(c) Сколько в  $G$  вершин и ребер?

(d)\* (Нерешенная задача) Опишите ориентируемые утолщения графов степени 4, реализуемые на торе, в терминах запрещенных подутолщений.

### Реализуемость иероглифов с расстановками

Диск с ленточками можно задавать как иероглиф вместе с некоторой расстановкой нулей и единиц на его петлях (рис. 2.9.3, 2.9.4).

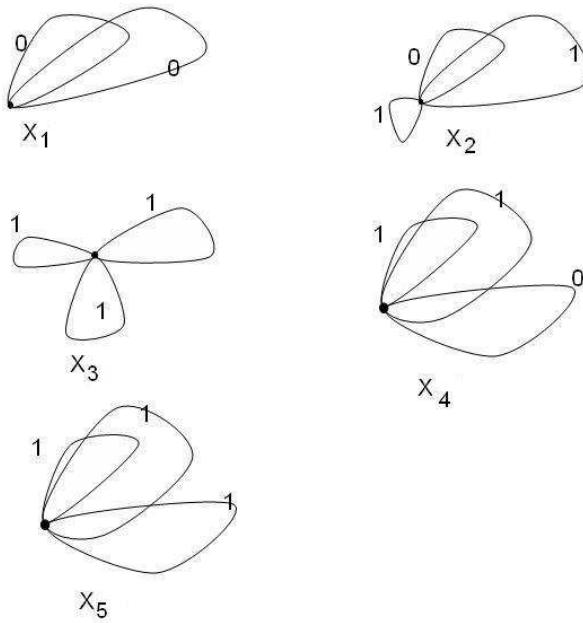


Рис. 2.9.3. Запрещенные иероглифы с расстановками для бутылки Клейна

Диск с ленточками можно вырезать из данной поверхности тогда и только тогда, когда соответствующий иероглиф с расстановкой можно изобразить без самопересечений на поверхности (вне края, если он имеется) так, чтобы

- при обходе по поверхности вокруг вершины выходящие из нее отрезки проходились бы в соответствии с указанным циклическим порядком, и
- вдоль петель, на которых стоит единица, менялась бы ориентация поверхности, а вдоль петель, на которых стоит ноль, не менялась бы.

*Редукцией* иероглифа с расстановкой называется композиция некоторого числа преобразований (D) и (R) для петель с нулем, а также следующего преобразования.

(R') Замена двух «параллельных» петель  $a$  и  $a'$  с единицей (т. е. для которых в циклическом порядке буквы, соответствующие этим петлям, находятся на соседних местах и чередуются:  $(aa' \dots aa' \dots)$ ) на одну.

**2.9.7\*. Гипотезы** (ср. [Cu81]). (a) Следующие условия на иероглиф с расстановкой равносильны:

- реализуем на ленте Мёбиуса.

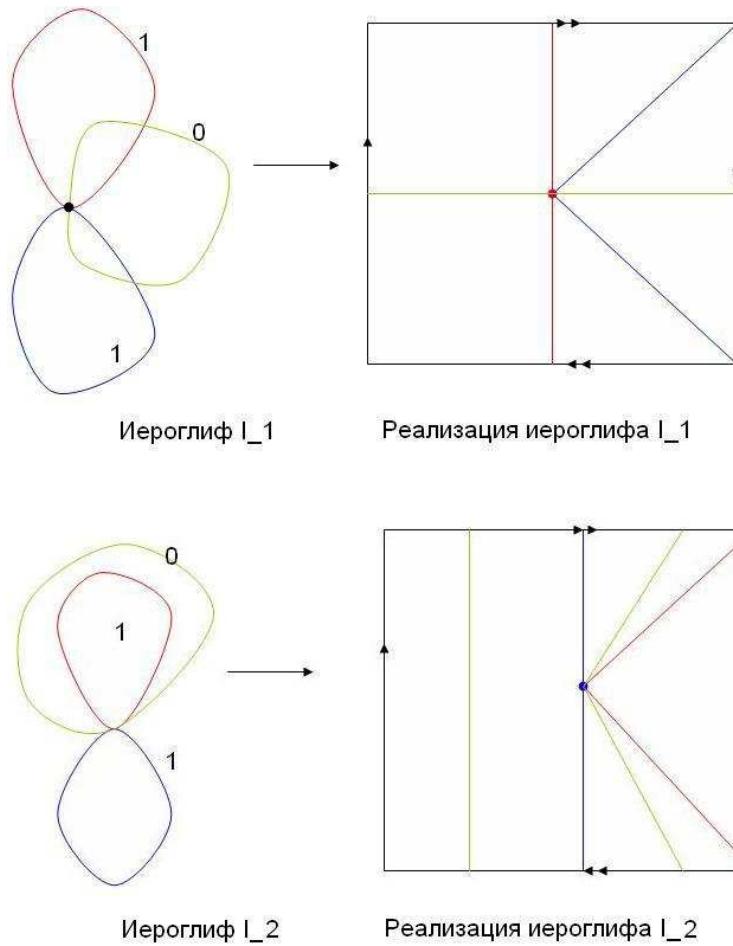


Рис. 2.9.4. Универсальные иероглифы с расстановками для бутылки Клейна

- не содержит ни одного иероглифа с расстановкой из

$$(abab), \quad (aBaB), \quad (ABAAB), \quad (ABCABC)$$

(большими буквами изображаются петли с единицей, а маленькими — с нулем; ср. с рис. 2.9.3).

- редуцируется к иероглифу с расстановкой (A).

(b)\* (А. Телишев) Следующие условия на иероглиф с расстановкой равносильны:

- реализуем на бутылке Клейна;
- не содержит ни одного иероглифа с расстановкой из изображенных на рис. 2.9.3;
- редуцируется к одному из двух иероглифов с расстановкой из изображенных на рис. 2.9.4.

## Реализуемость утолщений

Определение утолщения графа приведено в начале п. 1.6. Утолщение можно задавать графом **с вращениями**, т.е. вместе с расстановкой нулей и единиц на его ребрах и, для каждой вершины графа, ориентированным циклическим порядком выходящих из нее полуребер. При построении утолщения стрелки на окружностях должны быть противоположны, если на ребре стоит ноль, и сонаправлены, если на ребре стоит единица. (При этом каждый из двух способов на рис. 1.6.1 может отвечать как ленточке с нулем, так и ленточке с единицей.)

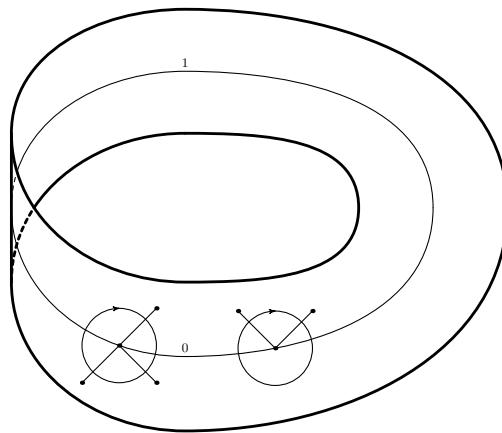


Рис. 2.9.5. Расстановка чисел на ребрах

Утолщение можно вырезать из данной поверхности тогда и только тогда, когда соответствующий граф с вращениями можно изобразить без самопересечений на поверхности (вне края, если он имеется) и окружить каждую вершину маленькой ориентированной окружностью так, чтобы

- для каждой вершины обход выходящих из нее полуребер вдоль ориентированной окружности давал бы заданный ориентированный циклический порядок.
- на ребре стоит 0 тогда и только когда, когда ориентации окружностей, построенных вокруг концов этого ребра, *согласованы вдоль этого ребра* (рис. 2.9.5).

**Инвертированием в вершине** для графа с вращениями называется изменение ориентации цикла полуребер, выходящих из этой

вершины, одновременно с заменой нулей единицами, а единиц нулями на всех ребрах, выходящих из этой вершины (при этом числа на петлях не меняются). Два графа вращениями называются **эквивалентными**, если от одного можно перейти к другому несколькими инвертированиями (возможно, в разных вершинах). **Подутолщением** утолщения, построенного по графу с вращениями называется утолщение, эквивалентное построенному по подграфу с вращениями.

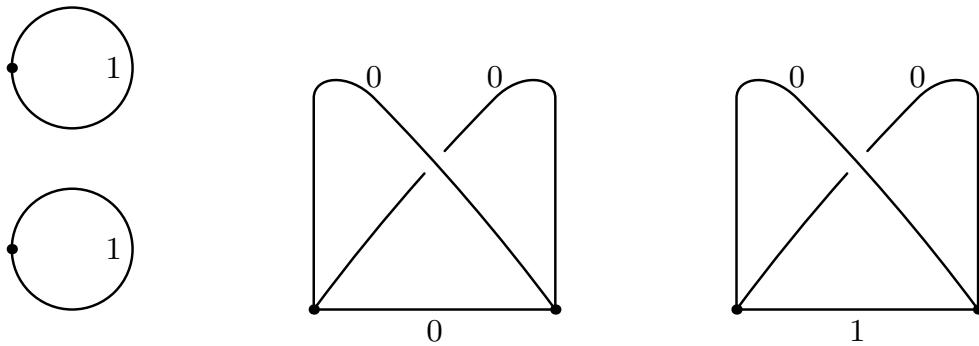


Рис. 2.9.6. Утолщения, не реализуемые на ленте Мёбиуса

**2.9.8\*.** (а) **Гипотеза** (Д. Пермяков) Утолщение реализуемо на ленте Мёбиуса тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного из подутолщений, изображенных на с рис. 2.8.4, 2.9.6.

(б) (Нерешенная задача) Найдите утолщения  $E_1, \dots, E_s$ , для которых утолщение графа степени 3 реализуемо на бутылке Клейна тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного из подутолщений  $E_1, \dots, E_s$ .

**2.9.9\*.** См. определение X-графа и его реализуемости в [Sk10].

(а) Опишите X-графы, реализуемые на сфере.

(б) (Нерешенные задачи) То же для ленты Мёбиуса и тора.

*Графом с неориентированными вращениями* называется граф, для каждой вершины которого указан неориентированный циклический порядок выходящих из нее полуребер. Граф степени 4 с неориентированными вращениями — то же, что X-граф. Было бы интересно сформулировать и доказать аналоги вышеизложенных результатов для графов с неориентированными вращениями.

## § 3. Векторные поля на плоскости

### 3.1. Введение и основные результаты

Исследование векторных полей начал Анри Пуанкаре в качественной теории дифференциальных уравнений. Эта теория имеет приложения во многих областях естествознания. Сам Пуанкаре применял ее, в частности, к проблеме трех тел и небесной механике. С тех пор векторные поля являются одним из важнейших объектов топологии и ее приложений. Подробные мотивировки см. в «пхвальном слове векторным полям» [An03].

Fixed point theorems are important for applications of topology. Such theorems are used to prove the existence of equilibria, or of solutions of various types of equations, e.g. Nash equilibrium or differential equations.

В этом параграфе доказаны красивые теоремы, сформулированные в п. 3.1, а также более сложно формулируемая основная теорема топологии 3.10.2.

**Теорема 3.1.1** (основная теорема алгебры). *Любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Эту теорему вы сможете доказать после решения задачи 3.9.3. Подробности см. в [Pr15, § 6], [An03, § 6], [BE82, § 24].

**3.1.2.** Does the following system have a solution in real numbers  $x, y$ ?

$$(a) \begin{cases} x + \sin^2 \left( \frac{xy^2}{17} + 0.1 \right) = 0 \\ y - \frac{\sin x^2}{3} \sqrt{|\cos^3 |x||} = 0 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x + \sin^2 \left( \frac{xy^2}{17} + 0.1 \right) = 0 \\ y - \frac{\sin y^2}{3} \sqrt{|\cos^3 |x||} = 0 \end{cases}.$$

Векторные поля удобно изучать на эквивалентном языке непрерывных отображений. Применения *соображений непрерывности* (т.е. теоремы о промежуточном значении непрерывной функции, которая является «нульмерной версией» основной теоремы топологии 3.10.2) приведены в задачах 3.1.2.а и 3.5.1.

Пусть  $N \subset \mathbb{R}^m$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$ . Отображение  $f: N \rightarrow Y$  называется **непрерывным**, если для любых  $x \in N$  и  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любых  $y \in N$ , удовлетворяющих условию  $|x - y| < \delta$ , выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

*Невозможно непрерывно извлекать корни из комплексных чисел.* Приведем строгую формулировку.

**Утверждение 3.1.3.** *Не существует непрерывного отображения  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , такого что  $z = f(z)^2$  для любого  $z \in \mathbb{C}$ .*

Аналогичный результат справедлив и для корней любой степени, логарифмов и т.д.

*Далее все отображения считаются непрерывными и прилагательное «непрерывное», как правило, опускается.*

Отождествим  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{C}$ . Обозначим круг (диск) и окружность как

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{и}$$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

**Теорема 3.1.4** (теорема Брауэра о неподвижной точке). *Любое отображение  $f: D^2 \rightarrow D^2$  имеет неподвижную точку, т. е. такую точку  $x \in D^2$ , что  $f(x) = x$ .*

Эта теорема следует из своей «дискретной версии» — леммы Шпернера 3.6.1 (Sp). О применении последней к существованию равновесий в математической экономике (теории игр) и о ее простом доказательстве см., например, [Sp]. Теорема Брауэра следует также из задачи 3.6.1 и теорем 3.3.1 (c), 3.4.5 (b) (которые вытекают из утверждений 3.9.3 (a), 3.9.2 (d)).

Note that the open disk and the sphere do not have the analogous fixed point property.

**Теорема 3.1.5** (Борсук—Улам). *Для любого отображения  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  существует  $x \in S^2$ , для которого  $f(x) = f(-x)$ .*

Это означает, что в любой момент на Земле найдутся диаметрально противоположные точки, в которых температура и давление совпадают. Эта теорема следует из задачи 3.6.2 и утверждений 3.8.1 (c) и 3.9.3 (a) (из которых вытекает утверждение 3.6.2 (b)). У нее имеются эквивалентные формулировки, см. утверждение 3.6.2 и [Ma03], [ABM+, теорема 1.4]. Эта теорема и ее версии

знамениты благодаря их приложениям к комбинаторике [Ma03] и к существованию равновесий в математической экономике (теории игр) [AGL, Ya99, SS03]. Следующий знаменитый результат дает представление о приложениях, ср. с задачами 3.5.1 (a, b, c, d).

**3.1.6.** (a)\* В пространстве дано  $2n$  красных,  $2n$  желтых и  $2n$  синих точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Тогда существует плоскость, по каждую сторону от которой находится по  $n$  красных, по  $n$  желтых и по  $n$  синих точек.

(b) (Ham sandwich theorem) В бочку с медом вбросили ложку дегтя. (Мед и деготь распределились по бочке, не обязательно равномерно.) Докажите, что существует плоскость, делящая объем бочки пополам, вес меда пополам и вес дегтя пополам.

Научная формулировка: для любых трех выпуклых многогранников в трехмерном пространстве существует плоскость, делящая каждый из них на две части равных объемов.<sup>9</sup>

Два подмножества евклидова пространства называются **гомеоморфными**, если существуют взаимно обратные непрерывные отображения между ними.

**3.1.7.** Are the following spaces homeomorphic?

- (a) the line and the circle without a point;
- (b) the line and the circle;
- (c) the circle and the union of two disjoint circles;
- (d)\* the arc  $[0, 1]$  and the union of the arc  $0 \times [-1, 1]$  with the graph of the function  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $f(x) := \sin(1/x)$ .
- (e) отрезок и квадрат;
- (f)\* плоскость и плоскость без точки.

**Теорема 3.1.8.** Квадрат не гомеоморден кубу.

Для утверждения 3.1.7.f и теоремы 3.1.8 необходимы теорема Брауэра 3.1.4 и следующие понятия. Два отображения называются *гомотопными*, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией. См. строгое определение в п. 3.7. Подмножество  $N \subset \mathbb{R}^m$  называется **односвязным**, если любое отображение

---

<sup>9</sup>Обычно этот результат формулируется так: в трехмерном пространстве сэндвич — кусок ветчины и два куска хлеба (т.е. любые три меры) может быть разрезан на равноценные куски одним разрезом плоскостью. Мы приводим элементарную формулировку, не использующую мер.

$S^1 \rightarrow N$  гомотопно отображению в точку. Для теоремы 3.1.8 нужна еще и следующая теорема 3.1.9 (а).

**Теорема 3.1.9.** *Любое отображение*

- (а)  $S^1 \rightarrow S^2$ ; (б)  $S^2 \rightarrow S^1$

*гомотопно отображению в точку.*

Part (a) follows from Assertions 3.11.4.ae, and part (b) — from an equivalent reformulation 3.9.5 (a,b), не использующего понятия гомотопности.

Многомерные обобщения сформулированных здесь результатов приведены в § 8. Другое изложение приводится в [Sh89], [Pr15, § 6], [An03, § 4—6], [BE82, § 20, 21].

### 3.2. Гомотопность замкнутых ломаных

#### 3.3. Векторные поля

**Векторным полем** на подмножестве плоскости называется семейство векторов  $v(x)$  на плоскости в его точках  $x$ , непрерывно зависящих от точки  $x$ . Последнее означает, что для любых  $x \in N$  и  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любом  $y \in N$ , удовлетворяющем условию  $|x - y| < \delta$ , выполнено неравенство  $|v(x) - v(y)| < \varepsilon$ .

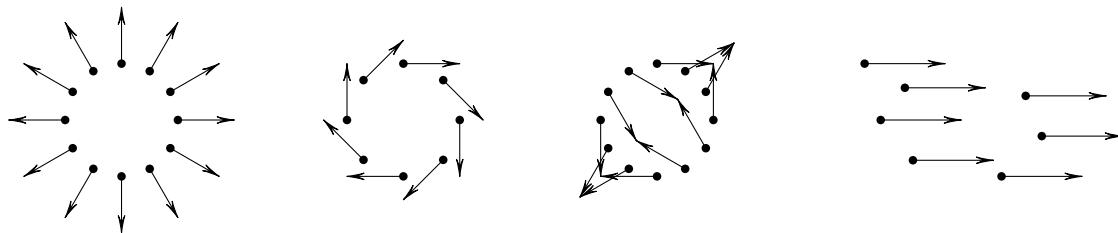


Рис. 3.3.1. Векторные поля на подмножествах плоскости

Примеры векторных полей на плоскости (см. рис. 3.3.1):  $a(x, y) := (x, y)$  (радиальное),  $b(x, y) := (y, -x)$  (центральное),  $c(x, y) := (y, x)$  (следовое),  $u(x, y) := (1, 0)$  (постоянное).

Векторное поле называется *ненулевым*, если его вектор в любой точке ненулевой.

**3.3.1.** (а) Существует ненулевое векторное поле на кольце  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ , совпадающее с радиальным на  $S^1$ .

(b) Любое ненулевое векторное поле на  $S^1$  продолжается до ненулевого векторного поля на  $A$ .

(c) **Теорема.** *Радиальное векторное поле  $a(x, y) = (x, y)$  на гра-ничной окружности  $S^1$  круга  $D^2$  не продолжается до ненулевого векторного поля на круге.*

Эта теорема вытекает из утверждения 3.9.3 (a). См. также равносильные формулировки в теореме 3.1.4 и задачах 3.4.5 (b) и 3.6.1.

Если начало каждого вектора на плоскости перенести в начало координат на плоскости, то получится отождествление (свободных) векторов и точек плоскости. Поэтому векторное поле на подмножестве плоскости — то же, что отображение из этого подмножества в плоскость. А единичное векторное поле на подмножестве плоскости — то же, что отображение из этого подмножества в окружность.

### 3.4. Гомотопность векторных полей

Пусть на подмножестве  $N \subset \mathbb{R}^2$  задано семейство  $v_t$  векторных полей, зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ . Определим отображение  $V: N \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  формулой  $V(x, t) := v_t(x)$ . Зависимость от параметра называется *непрерывной*, если отображение  $V$  непрерывно (см. п. 3.5). Например, семейство  $v_t(x) := tx$  непрерывно зависит от параметра  $t$ , а  $v_t(x) := \{t\}x$  — нет.

Доказывать непрерывность удобно, используя теоремы о сумме, произведении и композиции непрерывных функций.

**3.4.1.** Для любых двух векторных полей на плоскости существует непрерывная деформация одного в другое, т. е. семейство  $v_t$  векторных полей, непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $v_0$  есть первое поле и  $v_1$  есть второе поле. (В отличие от дальнейшего, векторное поле  $v_t$  не предполагается ненулевым.)

Два ненулевых векторных поля называются **гомотопными**, если одно можно получить из другого непрерывной деформацией, в процессе которой поле остается ненулевым. Такой деформацией, которая называется **гомотопией**, является семейство  $v_t$  ненулевых векторных полей, непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $v_0$  есть первое поле и  $v_1$  есть второе поле.

**3.4.2.** (a) Любое ненулевое векторное поле  $v$  на плоскости гомотопно полю  $-v$ .

(b) Радиальное векторное поле на окружности гомотопно центральному.

Из задач 3.4.1 и 3.4.2 (b) видно, что при непрерывной деформации векторного поля его *траектории* могут меняться разрывно.

**3.4.3.** Для любых ненулевых векторных полей  $u, v, w$  на любой части плоскости

- (a)  $v$  гомотопно  $v$  (*рефлексивность*);
- (b) если  $u$  гомотопно  $v$ , то  $v$  гомотопно  $u$  (*симметричность*);
- (c) если  $u$  гомотопно  $v$  и  $v$  гомотопно  $w$ , то  $u$  гомотопно  $w$  (*транзитивность*).

**3.4.4.** Любые два ненулевых векторных поля на  $N$  гомотопны, если

- (a)  $N = 0 \times [0, 1]$ ;
- (b)  $N = D^2$ ;
- (c)  $N = 0 \times \mathbb{R}$ ;
- (d)  $N = \mathbb{R}^2$ ;
- (e)  $N$  — любое дерево на плоскости (см. определение в п. 1.2).

**3.4.5.** (a) Ненулевое векторное поле на окружности  $S^1$  гомотопно постоянному тогда и только тогда, когда оно продолжается на круг  $D^2$  (до ненулевого векторного поля).

(b) **Теорема.** Радиальное векторное поле на окружности  $S^1$  не гомотопно постоянному.

(c) Гомотопные ненулевые векторные поля на окружности  $S^1$  одновременно продолжаются на круг  $D^2$  или нет.

**3.4.6.** (a) Ненулевые векторные поля  $v(z) := 9z^3 - 2z^2 + z - 1$  и  $w(z) := z^3$  на окружности  $S^1$  гомотопны.

(b) Если два векторных поля на  $S^1$  не являются противонаправленными ни в одной точке, то они гомотопны.

Существует ли подмножество плоскости и негомотопные единичные векторные поля на нем? Ответ «да» вытекает из теоремы 3.4.5 (b). Ввиду утверждения 3.4.5 (a) теоремы 3.3.1 (c) и 3.4.5 (b) равносильны. Их доказательство непросто. Для них, как и для доказательства теорем из п. 3.1, необходимо понятие числа оборотов вектора из п. 3.8. Теорема 3.4.5 (b) вытекает из утверждения 3.9.2 (d).

Векторное поле называется *единичным*, если его вектор в любой точке единичный.

**3.4.7.** (a) Любое ненулевое векторное поле гомотопно некоторому единичному.

(b) Два единичных векторных поля гомотопны тогда и только тогда, когда существует семейство  $v_t$  единичных векторных полей, непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $v_0$  есть первое поле и  $v_1$  есть второе поле.

### 3.5. Непрерывные отображения

**3.5.1.** (a)\* На плоскости дано  $2n$  красных и  $2n$  синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тогда существует прямая, по каждую сторону от которой находится по  $n$  красных и синих точек.

(b) На плоскости дан выпуклый многоугольник и точка  $z$  вне него. Тогда существует прямая, содержащая  $z$  и делящая многоугольник на две части равной площади.

(c) Для любого выпуклого многоугольника на плоскости существует прямая, делящая его на две части с равными площадями и периметрами. Занимательная переформулировка: любой бутерброд с маслом можно разрезать прямолинейным разрезом на две равноценные части.

(d) (Загадка) Верно ли аналогичное утверждение для бутерброда с маслом и сыром?

(e) Любой выпуклый многоугольник на плоскости можно разрезать на четыре части равной площади двумя перпендикулярными разрезами.

(f) Вокруг любого выпуклого многоугольника на плоскости можно описать квадрат.

(g)\* Любую плоскую выпуклую фигуру диаметра 1 можно поместить в правильном шестиугольнике, расстояние между противоположными сторонами которого равно 1.

Если  $N$  замкнуто и ограничено, то условие непрерывности отображения  $f: N \rightarrow Y$  равносильно следующему условию *равномерной непрерывности*: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что при любых  $x, y \in N$ , удовлетворяющих условию  $|x - y| < \delta$ , выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**3.5.2.** Какие из следующих отображений  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны:

- (a) отображение в точку; (b) проекция на вторую координату;
- (c) сумма номеров всех ближайших вершин квадрата  $[0, 1]^2$ ;
- (d) расстояние до множества вершин квадрата;
- (e) расстояние до объединения сторон квадрата?

**3.5.3.** Существует ли непрерывное отображение  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , образом которого является (a) окружность; (b) прямая;

- (c)\* квадрат  $[0, 1]^2 \times 0$ ; (d) плоскость; (e)\* куб  $[0, 1]^3$ ?

Ответ в п. (c) — существует, см. [ВЕ82], [BCM, § 5]; о приложениях в компьютерной науке см. [Ви68].

**3.5.4.** Существует ли непрерывное отображение  $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , образом которого является (a) отрезок; (b) прямая; (c) кольцо; (d) выпуклая оболочка вершин выпуклого пятиугольника; (e)\* куб  $[0, 1]^3$ ?

П. (d) подводит к понятиям из п. 3.11.

**3.5.5.** (a) Любое непрерывное отображение из объединения ребер треугольника в прямую продолжается на треугольник.

(b) То же с заменой прямой на плоскость.

(c) То же с заменой треугольника на тетраэдр и ребер на грани.

(d) То же с заменой треугольника на тетраэдр.

## 3.6. К теоремам Брауэра и Борсука—Улама

**3.6.1.** Докажите эквивалентность теоремы Брауэра 3.1.4 каждому из следующих утверждений, а также теоремам 3.3.1 (c) и 3.4.5 (b).

(Re) **Несминаемость барабана на его обод.** *Не существует отображения круга в его граничную окружность, тождественного на этой окружности, т. е. отображения  $f: D^2 \rightarrow S^1$ , для которого  $f(x) = x$  при любом  $x \in S^1$ .*

(Sp) **Лемма Шпернера.** *Дана триангуляция треугольника, вершины которого помечены числами 0, 1 и 2. Вершины триангуляции пометили числами 0, 1 и 2 так, что любая вершина триангуляции на стороне исходного треугольника помечена одной из*

пометок вершин этой стороны. Тогда существует треугольник триангуляции, помеченный числами 0, 1, 2.

*Подсказки.* (Sp)  $\Rightarrow$  (Re) При наличии ретракции  $r : \Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$  поставьте в соответствие вершине  $x$  триангуляции одну из вершин треугольника  $\Delta_2$ , ближайших к  $r(x)$ .

A simple proof of (Re) is presented in §3.11.

**3.6.2.** Отображение  $f : S^n \rightarrow S^1$  называется **нечетным**, если  $f(-x) = -f(x)$  для любого  $x \in S^n$ . Докажите эквивалентность теоремы Борсука—Улама 3.1.5 каждому из следующих утверждений.

(a) **Лемма Такера.** *Дана триангуляция правильного шестиугольника. Для любой вершины триангуляции, лежащей на его контуре, точка, симметричная ей относительно центра шестиугольника, также является вершиной триангуляции. В каждой вершине триангуляции стоит одно из чисел  $\pm 1, \pm 2$ . В любых двух центрально-симметричных вершинах контура шестиугольника стоят противоположные числа. Тогда имеется ребро триангуляции, в концах которого стоят противоположные числа.*

(b) Никакое нечетное отображение  $S^1 \rightarrow S^1$  не продолжается на круг  $D^2$ .

(c) Не существует нечетного отображения  $S^2 \rightarrow S^1$ .

(d) Если сфера является объединением трех замкнутых множеств, то одно из них содержит диаметрально противоположные точки.

### 3.7. Гомотопность непрерывных отображений

Гомотопность отображений определяется аналогично гомотопности векторных полей. Два отображения  $f, g : N \rightarrow Y$  между подмножествами  $N \subset \mathbb{R}^m$  и  $Y \subset \mathbb{R}^n$  называются **гомотопными**, если существует семейство  $h_t : N \rightarrow Y$  отображений, непрерывно зависящее от параметра  $t \in [0, 1]$ , для которого  $h_0 = f$  и  $h_1 = g$ . Непрерывная зависимость означает непрерывность соответствующего отображения  $H : N \times [0, 1] \rightarrow Y$ . Такое семейство и такое отображение называются **гомотопией**.

Для гомотопности отображений справедливы свойства, аналогичные свойствам гомотопности векторных полей. Например, гомотопность отображений — отношение эквивалентности.

**3.7.1.** Любые два отображения

- (a)
- $\mathbb{R} \rightarrow S^1$
- ; (b)
- $D^2 \rightarrow S^1$
- ; (c)
- $S^1 \rightarrow \mathbb{R}$
- ; (d)
- $S^1 \rightarrow D^2$

гомотопны.

**3.7.2.** (a) Существуют отображение  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  и гомотопия отображения  $f|_{(0,1]}$ , не продолжаемая до гомотопии отображения  $f$ .

(b) Для любого отображения  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  любая гомотопия отображения  $f|_{\{0,1\}}$  продолжается до некоторой гомотопии отображения  $f$ .

- (c) То же с заменой
- $([0, 1], \{0, 1\})$
- на
- $(D^2, S^1)$
- .

(d) **Теорема Борсука о продолжении гомотопии.** Для любых подграфа  $G$  графа  $N$  и отображения  $f: N \rightarrow S^1$  любая гомотопия отображения  $f|_G$  продолжается до некоторой гомотопии отображения  $f$ .

(e) Для любых двух отображений  $A \rightarrow S^1$  кольца  $A$  любая гомотопия между их сужениями на одну из краевых окружностей кольца продолжается до гомотопии между исходными отображениями.

### 3.8. Число оборотов вектора

Неформально говоря, степенью ненулевого векторного поля  $v$  на окружности  $S^1$  называется число оборотов (против часовой стрелки) вектора  $v(x)$  при однократном обходе точкой  $x$  окружности  $S^1$  (против часовой стрелки).

Приведем строгое определение этого понятия, аналогичное п. 3.2. Отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , соответствующее единичному векторному полю  $v$ , равномерно непрерывно. Поэтому существует целое  $m > 0$ , для которого  $|v(x) - v(y)| < 2$  при любых разбиениях окружности на  $m$  равных дуг и точек  $x, y$  одной дуги. Обозначим  $A_k := v(e^{2\pi i k/m})$  и  $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Определим **степень**  $\deg v$  формулой

$$2\pi \deg v := \angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{m-1} O A_m + \angle A_m O A_1$$

(см. определение ориентированного угла в п. 3.2). Аналогично определяется степень ненулевого векторного поля на окружности или отображения окружности в себя.

*Замечание.* Имеем

$$\deg v = \int_0^{2\pi} dv(u) := \lim_{\max(u_{k+1}-u_k) \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=1}^m \Delta_k : 0 = u_0 < u_1 < \dots < u_m = 2\pi \right\},$$

где  $\Delta_k \in (-1/2, 1/2)$  при  $u_k - u_{k-1} < 1/m$  однозначно определяется из условия  $v(e^{iu_k}) = v(e^{iu_{k-1}})e^{2\pi i \Delta_k}$ .

Нужно доказать осмысленность и корректность определения степени, т. е. то, что  $\deg v$  действительно целое число, не зависящее от выбора числа  $m$ . Корректность можно доказать аналогично доказательству независимости определенного интеграла от выбора последовательности разбиений из его определения. Более удобный способ — задачи 3.9.1 (c, d). Следующие утверждения 3.8.1 (a, b, c) докажите в предположении корректности.

**3.8.1.** (a) Найдите степень *стандартной  $n$ -намотки*  $w_n$ , т. е. отображения  $S^1 \rightarrow S^1$  (или, что то же самое, векторного поля на  $S^1$ ), заданного формулой

$$w_n(z) = z^n.$$

(b) Если  $u$  и  $v$  — ненулевые векторные поля на окружности  $S^1$  и для любой точки  $z \in S^1$  векторы  $u(z)$  и  $v(z)$  симметричны относительно касательной к окружности в точке  $z$ , то  $\deg u + \deg v = 2$ .

(c) Степень любого нечетного отображения  $S^1 \rightarrow S^1$  нечетна.

### 3.9. Поднятия и их применения

Нам понадобится непрерывная зависимость степени от векторного поля (точнее, независимость от его гомотопии). Ее удобно доказать при помощи следующего обобщения понятия степени.

**Поднятием** (или угловой функцией) отображения  $s: N \rightarrow S^1$  называется отображение  $\tilde{s}: N \rightarrow \mathbb{R}$ , для которого  $e^{i\tilde{s}} = s$ . См. рис. 3.9.1.

**3.9.1.** (a) Найдите все поднятия пути (т. е. отображения отрезка)  $s: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ ,  $s(t) = e^{it}$ .

(b) Найдите все поднятия композиции пути  $s$  из п. (a) и стандартной  $n$ -намотки  $w_n$ .

(c) По единичному векторному полю  $v$  на окружности определим путь  $s_v: [0, 1] \rightarrow S^1$  формулой  $s_v(t) = v(e^{2\pi it})$ . Если  $\tilde{s}_v$  — поднятие пути  $s_v$ , то  $\deg v = \frac{\tilde{s}_v(1) - \tilde{s}_v(0)}{2\pi}$ .

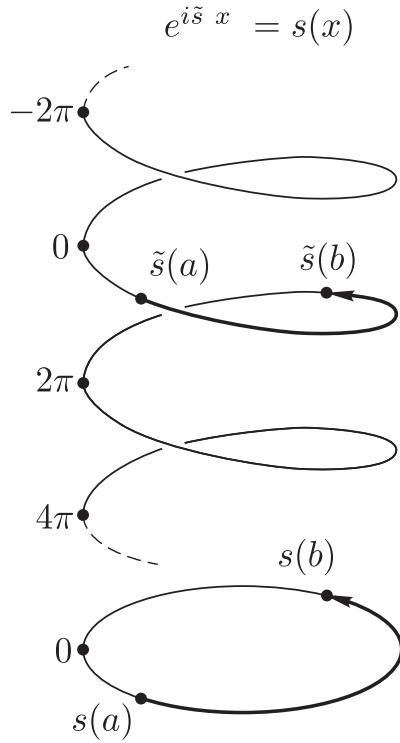


Рис. 3.9.1. Поднятие

(d) Поднятие единствено, т. е. если  $\tilde{s}, \tilde{s}' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — два поднятия одного и того же пути  $[0, 1] \rightarrow S^1$ , причем  $\tilde{s}(0) = \tilde{s}'(0)$ , то  $\tilde{s} = \tilde{s}'$ .

**3.9.2.** (a) **Лемма о поднятии пути.** Любой путь  $s : [0, 1] \rightarrow S^1$  имеет поднятие  $\tilde{s} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

(a') Если  $s : [0, 1] \rightarrow S^1$  — путь, образ которого не содержит точки  $z_0 \in S^1$ ,  $\tilde{x} \in \mathbb{R}$  и  $e^{i\tilde{x}} = s(0)$ , то существует поднятие  $\tilde{s} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  пути  $s$ , для которого  $\tilde{s}(0) = \tilde{x}$ .

(a'') То же без условия на образ пути.

(b) **Лемма о поднятии гомотопии.** Любое отображение  $H : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$  имеет поднятие. (Название связано с тем, что в применениях отображение  $H$  рассматривается в качестве гомотопии.)

(b') Если  $H : [0, 1]^2 \rightarrow S^1$  — отображение и  $\tilde{s} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  — поднятие отображения  $H|_{0 \times [0, 1]}$ , то существует поднятие  $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  отображения  $H$ , для которого  $\tilde{H}(0, t) = \tilde{s}(t)$  при любом  $t \in [0, 1]$ .

(c) Степени гомотопных единичных векторных полей на окружности равны.

(d) Стандартная  $n$ -намотка  $w_n$  не гомотопна  $w_m$  при  $m \neq n$ .

(e) Существует отображение  $S^1 \rightarrow S^1$ , не имеющее поднятия.

Лемма о поднятии гомотопии называется также *леммой о накрывающей гомотопии*. Она справедлива с заменой области определения  $[0, 1]$  на любое тело гиперграфа; доказательство аналогично; применение обобщения см. например, в задаче 8.10.7.

**3.9.3.** (a) Ненулевое векторное поле на окружности не продолжается на круг, если число оборотов вектора при обходе этой окружности (точнее, степень) не равно нулю.

(b) Если  $u$  и  $v$  — ненулевые векторные поля на окружности  $S^1$ , причем  $|u(x)| > |v(x)|$  для любой точки  $x \in S^1$ , то  $\deg u = \deg(u + v)$ .

(c) Найдите степень векторного поля  $v(z) := 9z^3 - 2z^2 + z - 1$ .

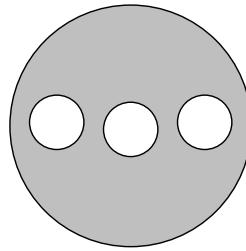


Рис. 3.9.2. Круг (диск) с дырками

**3.9.4.** (a) Для любого ненулевого векторного поля на кольце степени его сужений на две граничные окружности кольца равны.

(Напомним, что при определении степени используются ориентации окружностей против часовой стрелки.)

(b) Для любого ненулевого векторного поля на круге с дырками (рис. 3.9.2) степень его сужения на внешнюю граничную окружность равна сумме степеней его сужений на внутренние граничные окружности.

**3.9.5.** (a) Любые два единичных векторных поля на диске  $D^2$ , совпадающие на его границе, гомотопны неподвижно на границе, т. е. гомотопны так, что  $v_t(x) = v_0(x)$  для любых  $x \in S^1$  и  $t \in [0, 1]$ .

(b) Любое отображение  $S^2 \rightarrow S^1$  продолжается на шар.

**Hint to 3.9.5.** (a) Достаточно доказать утверждение с заменой полей на отображения в  $S^1$ . По лемме о поднятии гомотопии существуют поднятия данных отображений. Эти поднятия можно взять совпадающими в одной точке границы  $\partial D^2$ . Тогда они совпадают на всей границе. Тогда они гомотопны неподвижно на границе.

(b) Аналогично п. (а). Представьте отображение  $S^2 \rightarrow S^1$  в виде композиции  $D^2 \rightarrow S^2 \rightarrow S^1$ . Выведите отсюда, что у любого отображения  $f: S^2 \rightarrow S^1$  существует поднятие, т. е. отображение  $\tilde{f}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , для которого  $f(x) = e^{i\tilde{f}(x)}$  при любом  $x \in S^2$ .

### 3.10. Гомотопическая классификация векторных полей

**3.10.1.** (a) Любое единичное векторное поле степени  $n$  на окружности гомотопно  $w_n$ .

(b) Любые два ненулевых векторных поля на окружности равных степеней гомотопны.

(c) **Теорема продолжаемости.** *Ненулевое векторное поле продолжается с граничной окружности круга на круг тогда и только тогда, когда число оборотов вектора при обходе этой окружности (точнее, степень) равно нулю.*

Обозначим через  $V_N(\mathbb{R}^2)$  множество единичных векторных полей на подмножестве  $N$  плоскости с точностью до гомотопности в классе единичных векторных полей (т. е. с точностью до непрерывной деформации, в процессе которой векторное поле остается единичным). «Нормировка» определяет биекцию (т. е. взаимно однозначное соответствие) между  $V_N(\mathbb{R}^2)$  и множеством *ненулевых* векторных полей на  $N$  с точностью до гомотопности (задача 3.4.7). Множество  $V_N(\mathbb{R}^2)$  также биективно соответствует множеству отображений  $N \rightarrow S^1$  с точностью до гомотопности.

**Теорема 3.10.2** (Основная теорема топологии). *Любое единичное векторное поле  $v$  на окружности гомотопно стандартной  $\deg v$ -намотке, и единичные векторные поля разных степеней на окружности не гомотопны.*

*Любое отображение  $f: S^1 \rightarrow S^1$  гомотопно стандартной  $\deg f$ -намотке, и отображения  $S^1 \rightarrow S^1$  разных степеней не гомотопны.*

*Иными словами, степень  $\deg: V_{S^1}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}$  является биекцией, переводящей класс  $d$ -кратной намотки в число  $d$ .*

Этот результат назван основной теоремой топологии по аналогии с основной теоремой алгебры (из него основная теорема алгебры и вытекает). Суть дела, конечно, лучше отражали бы названия «основная теорема алгебры полиномов» и «основная теорема одно-

мерной топологии», но эти названия не используются. Обобщения см. в § 8.

**3.10.3.** (а) Пусть  $N$  — несвязное объединение или букет  $k$  замкнутых ломаных (рис. 1.2.1). Фиксируем произвольно направление на каждой из этих ломаных. Для векторного поля  $v$  на  $N$  поставим на каждой из этих ломаных степень сужения поля  $v$  на нее. Полученную расстановку  $k$  целых чисел обозначим  $\deg v$ . Тогда  $\deg$  определяет биекцию  $V_N(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^k$ .

(б) Для плоского графа  $N$  постройте биекцию  $V_N(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{Z}^{E-V+C} = \mathbb{Z}^{F-1}$ . Здесь и в п. (с) используются определения из п. 1.2, 1.3; через  $E$ ,  $V$ ,  $C$  и  $F$  обозначаются количества ребер, вершин, компонент связности и граней графа.

(с) Для графа  $N$  (не обязательно плоского) постройте биекцию между множеством отображений  $N \rightarrow S^1$  с точностью до гомотопности и  $\mathbb{Z}^{E-V+C}$ .

**3.10.4.** Опишите  $V_N(\mathbb{R}^2)$  для круга  $N$  с  $n$  дырками.

Здесь «описать» означает построить «естественную» биекцию между  $V_N(\mathbb{R}^2)$  и некоторым «известным» множеством. «Известность» множества означает как минимум описание количества его элементов, а как максимум — наличие «естественных» операций на множестве и на  $V_N(\mathbb{R}^2)$ , сохраняемых соответствием.

*Полем направлений* на подмножестве  $N$  плоскости называется семейство прямых  $l(x)$  в точках  $x \in N$ , непрерывно зависящих от точки  $x$ . Поля направлений связаны с *лоренцевыми метриками*, возникающими в физике [Ко01]. Аналогично предыдущему определяется *гомотопность* полей направлений и классифицируются поля направлений с точностью до гомотопности на окружности в плоскости.

### 3.11. Кусочно линейные отображения и аппроксимации

Понятия и результаты этого пункта полезны для теорем 3.1.4, 3.1.8, 3.1.9, 3.6.1 (и для многое другого).

Обозначим через  $\Delta_2$  выпуклую оболочку трех точек на плоскости, не лежащих на прямой. Отображение  $f: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется

**линейным**, если

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

для любых  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \Delta_2$ . **Триангуляцией** подмножества  $X$  плоскости называется конечный набор треугольников и отрезков, объединение которых равно  $X$ , и любые два из которых пересекаются либо по пустому множеству, либо по общей вершине, либо по общему ребру. Для подмножества  $X$  плоскости, имеющего триангуляцию, отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$  называется **кусочно линейным**, если линейно сужение  $f$  на каждый треугольничек и на каждый отрезочек некоторой триангуляции подмножества  $X$ .

Эти определения очевидно обобщаются на тетраэдр  $\Delta_3$ , на произвольный  $n$ -мерный симплекс  $\Delta_n$  (см. определение в п. 5.1) и на подмножество  $X$  пространства  $\mathbb{R}^d$ .

**3.11.1.** (a) Если отображения  $f, g: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  линейны и совпадают на множестве вершин, то они равны.

(b) Любое кусочно линейное отображение  $\Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  непрерывно.

(c, d) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений (a), (b) для отображений  $\Delta_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

**3.11.2.** Какие из следующих отображений  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  являются кусочно линейными:

(a) постоянное; (b) отображение, заданное формулой  $x \mapsto x^2$ ;

(c) композиция включения в ось  $Ox$  и центральной проекции из точки  $(2, -1)$  на ось  $Oy$ ?

**3.11.3.** Проведем средние линии в треугольнике  $\Delta_2$ . Обозначим через  $X$  объединение трех меньших треугольников, примыкающих к вершинам.

(a) Постройте кусочно линейное отображение  $X \rightarrow \partial\Delta_2$ , тождественное на  $\partial\Delta_2$ .

(b) Любое отображение  $\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$  приближается кусочно линейным отображением  $\Delta_2 \rightarrow X$ , т. е. для любых  $\varepsilon > 0$  и отображения  $f: \Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$  существует такое кусочно линейное отображение  $g: \Delta_2 \rightarrow X$ , что  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  для любой точки  $x \in \Delta_2$ .

(c) В п. (b) если  $f$  тождественно на  $\partial\Delta_2$ , то и  $g$  можно взять тождественным на  $\partial\Delta_2$ .

(d) Любое отображение  $\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$  приближается кусочно линейным отображением  $\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$ .

(e) Любое отображение  $\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$ , тождественное на  $\partial\Delta_2$ , приближается кусочно линейным отображением  $\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$ , тождественным на  $\partial\Delta_2$ .

*Sketch of a proof of 3.6.1.(Re).* (This is a PL version, presumably known before 1963, of the Hirsch 1963 proof [Wa68], which used smooth approximation.) Assume to the contrary that  $r : \Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_2$  is a retraction. By Assertion 3.11.3.e we may assume that  $r$  is a PL map. Take a triangulation of  $\Delta_2$  such that  $r$  is linear on every simplex of the triangulation. Take any point  $y \in \partial\Delta_2$  that is not  $r$ -image of a vertex of the triangulation (a ‘regular value’ of  $r$ ). Then  $r^{-1}(y)$  is a union of finitely many pairwise disjoint (closed and non-closed) polygonal lines whose only end point is  $y$  (prove!). A contradiction.  $\square$

Ясно, что любое отображение  $S^1 \rightarrow S^2$ , образ которого не совпадает с  $S^2$ , гомотопно отображению в точку (ср. с теоремой 3.1.9 (а)). Однако существуют отображения  $S^1 \rightarrow S^2$ , образ которых совпадает с  $S^2$  (см. задачу 3.5.3 (c)).

**3.11.4.** (a) Никакое кусочно линейное отображение  $\partial\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_3$  не сюръективно.

(b) Возьмем  $n$ -симплекс  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^n$ , содержащий внутри началькоординат  $O$ . Обозначим через  $p_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \partial\Delta_n$  центральную проекцию с центром в  $O$ , т. е. отображение, ставящее в соответствие точке  $x \in S^{n-1}$  точку пересечения с  $\partial\Delta_n$  луча с началом в  $O$ , проходящего через точку  $x$ . Докажите, что отображения  $f, g : S^1 \rightarrow S^2$  гомотопны тогда и только тогда, когда отображения  $p_2 f p_1^{-1}, p_2 g p_1^{-1} : \partial\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_3$  гомотопны.

(c) Любое отображение  $\partial\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_3$  приближается кусочно линейным.

(d) Любые два достаточно близких отображения  $\partial\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_3$  гомотопны.

(e) Любое отображение  $\partial\Delta_2 \rightarrow \partial\Delta_3$  гомотопно кусочно линейному.

**3.11.5.** (a) (Поймай рыбку в сеть!) Если  $f : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — кусочно линейное отображение, и число оборотов ломаной  $f|_{\partial\Delta_2}$  вокруг точки  $O \notin f(\partial\Delta_2)$  ненулевое, то  $O \in f(\Delta_2)$ .

## § 4. Векторные поля на двумерных поверхностях

### 4.1. Введение и основные результаты

Проблемы существования и классификации векторных полей и их наборов (вместе с близкой проблемой о гомотопической классификации отображений) определяют лицо теории препятствий. Ее методы можно применять ко многим другим задачам (см., например, другие параграфы этой книги и [Sk]).

В этом параграфе намечены доказательства красивых теорем, сформулированных в п. 4.1, и более сложных теорем  $\overrightarrow{4.6.2}$ ,  $\overrightarrow{4.10.3}$  (а).

*Расстоянием* между касательными векторами  $\overrightarrow{AA_1}$  и  $\overrightarrow{BB_1}$  к сфере  $S^2$  в точках  $A, B \in S^2$  называется  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{A_1B_1}|$ . С использованием этого понятия расстояния *непрерывность* отображения из  $S^2$  в множество всех касательных векторов к  $S^2$  определяется аналогично п. 3.1. **Касательным векторным полем** на подмножестве сферы  $S^2$  называется семейство касательных к ней векторов  $v(x)$  в его точках  $x$ , непрерывно зависящих от точки  $x$ .

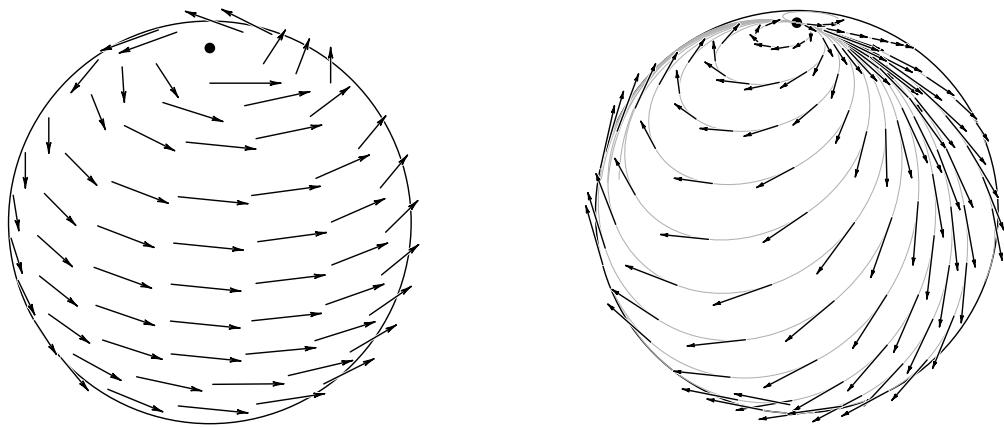


Рис. 4.1.1. Касательные векторные поля на сфере

В каждой точке рассматриваемых ниже поверхностей имеется касательная плоскость. Поэтому понятие *касательного векторного поля* на них вводится дословно аналогично случаю сферы.

**Теорема 4.1.1.** (а) (О еже) *На стандартной сфере не существует ненулевого касательного векторного поля.*

(б) *Среди сфер с ручками только тор имеет ненулевое касательное векторное поле.*

Part (a) is illustrated by examples and proved in §4.2. Пункт (b) — частный случай теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.6.2. Он следует из нее и утверждения 5.5.3 (i).

*Гомотопность* единичных (или ненулевых) касательных векторных полей на рассматриваемых ниже поверхностях определяется дословно так же, как и на плоскости (п. 3.4). Для приложений важно уметь описывать множество  $V(N)$  единичных касательных векторных полей с точностью до гомотопности на поверхности  $N$ . Встречаются и более сложные проблемы, для решения которых полезно сначала научиться описывать множество  $V(N)$ . По поводу слова «описывать» см. замечание после задачи 3.10.4.

**Теорема 4.1.2** (о классификации векторных полей). (а) *Отображение  $D_p \times D_m : V(T^2) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , определенное в п. 4.3, является взаимно однозначным соотвествием.*

(б) *Существует ровно два класса гомотопности единичных касательных векторных полей на ленте Мёбиуса.*

Идеи доказательств приведены в п. 4.3 и 4.4. Для п. (а) к решению задачи 4.3.2 (а) нужно добавить использование теорем о продолжении гомотопии и о гомотопности (задачи 3.7.2 (с) и 3.9.5 (а)).

## 4.2. Векторные поля и гомотопии для сферы

**4.2.1.** Постройте касательное векторное поле на сфере  $S^2$ , у которого вектор нулевой только

- (а) в двух точках;    (б) в одной точке.

*Начало доказательства теоремы о еже 4.1.1 (а).* По векторному полю на верхней полусфере  $D_+^2$  построим векторное поле  $u_+$  на диске  $D^2$  при помощи центральной проекции  $D_+^2 \rightarrow D^2$  из точки  $(-1, 0, 0)$ . Аналогично по векторному полю на нижней полусфере  $D_-^2$  построим векторное поле  $u_-$  на диске  $D^2$  при помощи центральной проекции  $D_-^2 \rightarrow D^2$  из точки  $(1, 0, 0)$ .

**4.2.2.** Для любой точки  $z \in S^1$  векторы  $u_+(z)$  и  $u_-(z)$  симметричны относительно касательной к окружности  $S^1$  в точке  $z$ . (Рис. 4.2.1; этот рисунок — иллюстрация, но не обоснование. Подумайте, почему вместо симметричности относительно касательной далее достаточно несимметричности относительно нормали.)

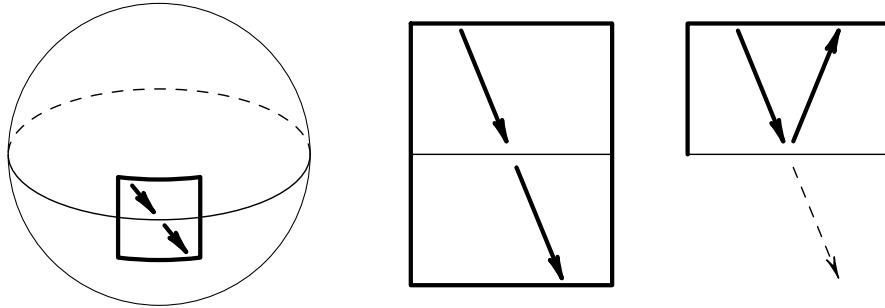


Рис. 4.2.1. Векторное поле на экваторе с точек зрения Белого Медведя и Пингвина

*Окончание доказательства теоремы о ежe 4.1.1 (а).* По утверждению 3.8.1.b  $\deg u_+ + \deg u_- = 2$ . Поэтому либо  $\deg u_+ \neq 0$ , либо  $\deg u_- \neq 0$ . Противоречие с утверждением 3.9.3.а. QED

Идея другого доказательства теоремы о еже 4.1.1 (а) приведена в [Pr15, § 7].

**4.2.3.** Любые два ненулевых касательных векторных поля на верхней полусфере  $D_+^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$  гомотопны.

**4.2.4.** Опишите  $V(N)$  для

- (а) сферического слоя  $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}\right\}$ ;
- (б) боковой поверхности цилиндра.

*Единичным нормальным векторным полем* на окружности  $S^1$  в трехмерном пространстве называется семейство нормальных к ней (т. е. к касательной прямой к  $S^1$ ) единичных векторов  $v(x)$  в точках  $x$  окружности, непрерывно зависящих от точки  $x \in S^1$ .

Понятие *гомотопности* единичных нормальных векторных полей вводится дословно так же, как и для единичных касательных векторных полей.

Будем называть единичное нормальное векторное поле просто *нормальным полем*.

**4.2.5.** (а) Постройте нормальное поле на окружности  $S^1$ .

(б) Постройте нормальное поле на окружности  $S^1$ , не гомотопное уже построенному.

(с) Опишите нормальные поля на окружности  $S^1$  с точностью до гомотопности.

Далее в этом параграфе можно либо считать, что  $m = 4$  (да же для этого случая приводимые факты интересны), либо пропускать тот материал, в котором упоминается пространство  $\mathbb{R}^m$  (либо воспринимать задачи буквально, если вы не боитесь работать с пространством  $\mathbb{R}^m$ ). Так как  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2} \supset \mathbb{R}^2 \times 0$ , можно рассматривать  $S^1$  как подмножество в  $\mathbb{R}^m$  при  $m \geq 2$ . Нормальные поля на  $S^1 \subset \mathbb{R}^m$  определяются аналогично.

**4.2.6.** Постройте биекцию между классами гомотопности нормальных векторных полей на  $S^1 \subset \mathbb{R}^4$  и классами гомотопности отображений  $S^1 \rightarrow S^2$ . (Ср. с теоремой 3.1.9 (а).)

*Единичным нормальным векторным полем* на сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  называется семейство единичных нормальных к ней (т. е. к касательной плоскости к  $S^2$ ) векторов  $v(x)$  в точках  $x \in S^2$ , непрерывно зависящих от точки  $x \in S^2$ . Пример:  $v(x) := x$ . Нормальные поля на сфере  $S^2 \subset \mathbb{R}^m$  определяются аналогично.

**4.2.7.** Постройте биекцию между классами гомотопности нормальных векторных полей на  $S^2 \subset \mathbb{R}^4$  и классами гомотопности отображений  $S^2 \rightarrow S^1$ . (Ср. с теоремой 3.1.9 (б).)

*Доказательство утверждения 4.2.2* (предложено Т. Гараевым). Обозначим через  $\omega$  ориентированную большую окружность на сфере, проходящую через точку  $z$  и касающуюся в  $z$  данного векторного поля на сфере. Обозначим через  $\omega_+$  и  $\omega_-$  ее ориентированные образы при центральных проекциях из точек  $(-1, 0, 0)$  и  $(1, 0, 0)$ , соответственно. Тогда  $\omega_+$  и  $\omega_-$  проходят через  $z$ , причем касательные векторы к ним совпадают с  $u_+(z)$  и с  $u_-(z)$  и находятся по одну сторону от нормали. При симметрии относительно прямой, проходящей через  $z$  и  $-z$ , образы  $\omega_+$  и  $\omega_-$  переходят друг в друга с обращением ориентации. Отсюда вытекает утверждение 4.2.2.

*Указание к задаче 4.2.3.* При помощи центральной проекции  $D_+^2 \rightarrow D^2$  из точки  $(0, 0, -1)$  постройте биекцию  $V(D_+^2) \rightarrow V(D^2)$ .

*Answer to 4.2.4 (a,b), 4.2.5 (c), 4.5.7.* В каждом из этих случаев множество искомых векторных полей (с точностью до гомотопии) находится в биективном соответствии с множеством  $\mathbb{Z}$ .

### 4.3. Классификация векторных полей на торе

*Будем называть единичное касательное векторное поле просто полем* (кроме п. 4.8).

Примеры полей на торе — «параллельное» и «меридиональное» (рис. 4.3.1).

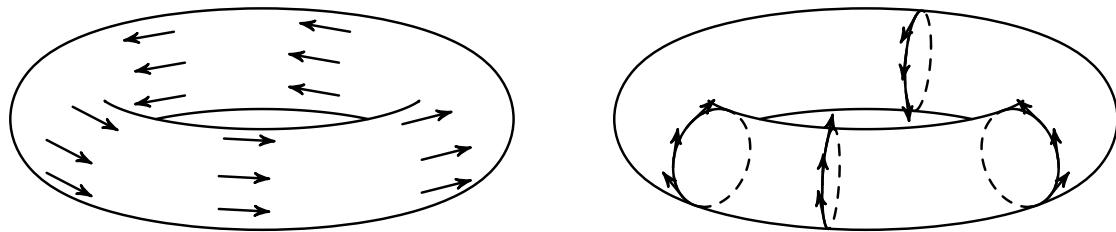


Рис. 4.3.1. «Параллельное» и «меридиональное» касательные векторные поля на торе

- 4.3.1. (a) Напишите параметрическое уравнение тора.
- (b) Приведите построение «параллельного» поля на торе (по определению поля).
- (c) «Параллельное» поле на торе гомотопно «меридиональному».
- (d) Любое поле  $v$  на торе гомотопно полю  $-v$ .
- (e,f) Сформулируйте и докажите аналог задачи 3.4.7 для тора.
- (g) Приведите пример двух негомотопных полей на торе.

Доказать негомотопность полей на торе хочется при помощи числа  $D_p(v)$  оборотов вектора поля  $v$  при обходе по параллели тора (т. е. по окружности  $z^2 + x^2 = 9$ ,  $y = 0$ ). Но количество оборотов вектора поля при обходе по замкнутой кривой в пространстве не определено. Поэтому для определения числа  $D_p(v)$  нужно непрерывно отождествить касательные плоскости в разных точках тора (подумайте, что это значит и как это сделать). Вместо этого пред-

ставим поле на торе в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуемся без доказательства наличием биекции между  $V(T^2)$  и множеством полей на квадрате  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , для которых  $v(x, 0) = v(x, 1)$  и  $v(0, x) = v(1, x)$  при любом  $x$ , с точностью до гомотопии в классе таких полей. Для такого поля на квадрате определим  $D_p(v)$  как *число оборотов вектора поля  $v$  при обходе по отрезку  $[0, 1] \times 0$*  (см. п. 3.8).

Наличием такого соответствия (и аналогичного соответствия для других поверхностей) можно и далее пользоваться без доказательства. (Заметим, что в [Pr15, § 7] оно используется даже без явной формулировки.) Ср. с доказательствами утверждений 4.1.1 (а), 4.2.3 и 4.2.4.

Аналогично определяется *число  $D_m(v)$  оборотов вектора поля при обходе по меридиану тора* (меридиан — окружность  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ , ср. с рис. 4.3.1). Аналогичное число можно получить, взяв другую замкнутую кривую на торе.

**4.3.2.** (а) Обозначим через  $T_0^2$  тор с дыркой, т. е. пересечение тора  $T^2$  с полупространством  $x \leq 5/2$ . Отображение  $D_p \times D_m : V(T_0^2) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , определенное формулой  $D_p \times D_m(v) := (D_p(v), D_m(v))$ , является взаимно однозначным соотвествием.

(б) Если на торе с дыркой заданы два поля, то их сужения на краевую окружность этой дырки гомотопны.

**4.3.3.** (а) Опишите множество нормальных полей на торе  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  с точностью до гомотопности.

(б) Опишите множество отображений  $T^2 \rightarrow S^1$  с точностью до гомотопности.

*Полем направлений* на поверхности называется семейство касательных к ней прямых  $l(x)$  в точках  $x$ , непрерывно зависящих от точки  $x$ . (Определите непрерывность сами.) По поводу связи с лоренцевыми метриками см., например, [Ко01]. *Гомотопность* полей направлений определяется аналогично гомотопности полей.

**4.3.4.** Классифицируйте поля направлений на торе с точностью до гомотопности.

*Указание к задаче 4.3.1. (b, c, d, e)* Аналогично задачам 3.4.2 (а, б) и 3.4.7.

(e) «Параллельное» поле и поле, соответствующее полю  $v(x, y) = e^{2\pi ix} = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$  на квадрате.

*Указание к задаче 4.3.2.* (a) Для доказательства сюръективности рассмотрите поле  $v(x, y) := e^{2\pi i(mx+ny)}$ . Для доказательства инъективности используйте основную теорему топологии и лемму о продолжении гомотопии, аналогичную утверждению 3.7.2 (e).

(b) Каждое из полей гомотопно полю степени  $a + b - a - b = 0$ .

*Ответы к задачам 4.3.3 (a,b), 4.3.4, 4.4.1(b), 4.4.3(b), 4.4.4(b).* Эти множества находятся в биективном соответствии с множествами  $\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^{2g}, \mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  соответственно.

## 4.4. Векторные поля на других поверхностях

**4.4.1.** (a) На  $S_{g,0}$  (см. п. 2.1) существует поле.

(b) Опишите  $V(S_{g,0})$ .

(c) Сужения любых двух полей на  $S_{g,0}$  на краевую окружность дырки гомотопны.

Для решения этой задачи полезно «изображение» сферы с ручками  $S_{g,0}$  в виде диска с неперекрученными ленточками (см. п. 1.5, аналогично рис. 1.5.2, 1.5.3). Или можно представить поле на  $S_{g,0}$  в виде склейки поля на плоском  $8g$ -угольнике.

**4.4.2.** (a) Напишите параметрическое уравнение ленты Мёбиуса.

(b) Постройте поле на ленте Мёбиуса.

(c) Гомотопно ли построенное вами поле  $v$  полю  $-v$ ?

(d) Верно ли, что сужения на краевую окружность ленты Мёбиуса  $M$  любых двух полей на  $M$  гомотопны?

Для решения этой задачи представьте поле на ленте Мёбиуса в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуйтесь без доказательства наличием биекции между  $V(M)$  и множеством полей на квадрате  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , для которых при любом  $y$  вектор  $v(0, y)$  получен из вектора  $v(1, 1 - y)$  симметрией относительно оси  $Ox$ , с точностью до гомотопии в классе таких полей.

**4.4.3.** (a) Постройте нормальное поле на стандартной ленте Мёбиуса  $M$ , рассматриваемой как подмножество в  $\mathbb{R}^4$ .

(b) Опишите множество нормальных полей на  $M \subset \mathbb{R}^4$  с точностью до гомотопности.

**4.4.4.** (a) Напишите параметрическое уравнение бутылки Клейна.

(b) Постройте поле на бутылке Клейна.

(c) Опишите  $V(K)$  для бутылки Клейна  $K$ .

(d, e\*) То же, что в задаче 4.4.3, для стандартной бутылки Клейна в  $\mathbb{R}^4$ .

Для решения пунктов (a, b) этой задачи представьте поле на бутылке Клейна в виде склейки единичного векторного поля на квадрате, лежащем в плоскости. Точнее, воспользуйтесь без доказательства наличием биекции между  $V(K)$  и множеством единичных векторных полей на квадрате  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ , для которых при любом  $x$  выполняется равенство  $v(x, 0) = v(x, 1)$  и вектор  $v(0, x)$  получен из  $v(1, 1 - x)$  симметрией относительно оси  $Ox$ , с точностью до гомотопии в классе таких полей.

**4.4.5.** (a) Если на поверхности существует поле, то существует и поле направлений.

(b) Обратное тоже верно (даже для многомерных подмногообразий, определяемых аналогично п. 4.5).

*Указание к задаче 4.4.1.* (c) Каждое из полей гомотопно полю степени  $a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g = 0$ .

## 4.5. Двумерные подмногообразия

В этом пункте мы приведем формализацию понятия поверхности из п. 2.1. Другая формализация приведена в п. 5.6.

**4.5.1.** (a) Дайте определение производной отображения  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , а также  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(b) Существует ли дифференцируемое отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , образом которого является прямой угол?

(c) То же для бесконечно дифференцируемого отображения.

(d) То же для дифференцируемого отображения, производная которого в каждой точке ненулевая.

Обозначим  $I := [0, 1]$ . Гладкой регулярной параметризованной двумерной поверхностью называется бесконечно дифференцируе-

мое отображение  $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  (т. е. упорядоченный набор  $m$  отображений  $x_1, x_2, \dots, x_m: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ), для которого векторные частные производные  $\partial r / \partial u$ ,  $\partial r / \partial v$  линейно независимы в каждой точке; в точках границы одна или обе частные производные берутся односторонними. (Или, более учено, *производная* которого невырождена в любой точке.)

*Двумерным гладким подмногообразием в  $\mathbb{R}^m$*  называется подмножество  $N \subset \mathbb{R}^m$ , для любой точки  $x \in N$  которого существует ее замкнутая окрестность  $Ox$  в  $\mathbb{R}^m$ , для которой  $N \cap Ox$  является образом  $r(I^2)$  некоторой инъективной гладкой регулярной параметризованной двумерной поверхности  $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Двумерные гладкие подмногообразия мы будем коротко называть *2-многообразиями*.

**4.5.2.** Следующие подмножества в  $\mathbb{R}^3$  (определения и рисунки см. в п. 2.1) являются 2-многообразиями в  $\mathbb{R}^3$ :

- (a)  $D^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ; (b) боковая поверхность цилиндра;
- (c) сфера; (d) тор; (e) лента Мёбиуса;
- (f) поверхность вращения графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $x$ ;
- (g) прообраз нуля при бесконечно дифференцируемой функции  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , производная которой ненулевая в каждой точке.

*Указание:* в (a-f) начните с написания параметрического уравнения, т.е. с задания отображения  $r$ .

**4.5.3.** (a) Любое 2-многообразие в  $\mathbb{R}^3$  становится 2-многообразием в  $\mathbb{R}^4$ , если рассмотреть  $\mathbb{R}^3$  как подмножество в  $\mathbb{R}^4$ .

- (b) Бутылка Клейна является 2-многообразием в  $\mathbb{R}^4$ .
- (c) Образ отображения  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ , заданного формулой

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx),$$

является 2-многообразием в  $\mathbb{R}^6$ .

**Пример 4.5.4.** Неформально говоря, *проективная плоскость  $\mathbb{R}P^2$*  получена

- из сферы  $S^2$  «склейкой» диаметрально противоположных точек, или
- из круга «склейкой» диаметрально противоположных точек на его граничной окружности, или

- из прямоугольника  $ABCD$  такой «склейкой» пар противоположных сторон, при которой каждая пара  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{DA}$  склеивается «с противоположным направлением» (рис. 2.1.1).

Проективная плоскость в качестве 2-многообразия определяется как образ отображения из утверждения 4.5.3 (с). Он лежит в четырехмерной сфере в  $\mathbb{R}^6$ , определенной уравнениями  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ,  $a_1^2 + \dots + a_6^2 = 1$ .

#### 4.5.5. Не являются 2-многообразиями в $\mathbb{R}^3$

- объединение двух координатных плоскостей;
- конус  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ .

*Касательной плоскостью*  $T_P N = T_P$  к 2-многообразию  $N$  в точке  $P$  называется плоскость, содержащая векторы  $\frac{\partial r}{\partial a}(u, v)$ ,  $\frac{\partial r}{\partial b}(u, v)$  для некоторого отображения  $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  из определения 2-многообразия, для которого  $r(u, v) = P$  (или, более учено, образ плоскости  $\mathbb{R}^2$  при производной в точке  $(u, v)$  отображения  $r$ ; производная — отображение, у него есть образ).

**4.5.6.** Это определение корректно, т. е. не зависит от выбора отображения  $r$ .

Теперь касательные и нормальные векторные поля на 2-многообразиях, обычные и единичные, определяются аналогично п. 4.2.

Подмногообразие в  $\mathbb{R}^m$  называется *связным*, если любые две его точки можно соединить лежащим в нем путем. (Это свойство называют *линейной связностью*, но для подмногообразий оно равносильно связности.)

**4.5.7.** Опишите единичные нормальные поля с точностью до гомотопии для заузленной гладкой замкнутой кривой в  $\mathbb{R}^3$  (т. е. на связном замкнутом 1-подмногообразии в  $\mathbb{R}^3$ ; определение аналогично вышеприведенному; см. замечание после задачи 3.10.4).

Множество всех тех точек  $x$  2-многообразия  $N$ , для которых существуют  $Ox \subset \mathbb{R}^m$  и  $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  из определения 2-многообразия, для которых  $x \in r((0, 1)^2)$ , называется *внутренностью*  $\text{Int } N$  2-многообразия  $N$ . Если  $N$  компактно (т. е. замкнуто в общетопологическом смысле и ограничено [Pr14, § 4]) и  $\text{Int } N = N$ , то  $N$  называется *замкнутым* (в смысле многообразий). *Краем* 2-многообразия  $N$  называется  $\partial N := N - \text{Int } N$ .

*Примеры* замкнутых 2-многообразий: сфера, тор и сфера с  $g$  ручками в  $\mathbb{R}^3$ , а также бутылка Клейна в  $\mathbb{R}^4$ .

*Примеры* 2-многообразий с непустым краем: кольцо, лента Мёбиуса, тор с дыркой.

*Примеры* некомпактных 2-многообразий без края: плоскость, внутренность 2-многообразия с непустым краем.

Биекция  $f: N \rightarrow M$  между замкнутыми 2-многообразиями  $N \subset \mathbb{R}^n$  и  $M \subset \mathbb{R}^m$  называется *диффеоморфизмом*, если для любой точки  $x \in N$  найдутся окрестности  $Ox \subset \mathbb{R}^n$  точки  $x$  и  $Of(x) \subset \mathbb{R}^m$  точки  $f(x)$ , а также отображения  $r: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $q: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$  из определения замкнутого 2-многообразия, для которых  $fr = q$ . Замкнутые 2-многообразия  $N \subset \mathbb{R}^n$  и  $M \subset \mathbb{R}^m$  называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм  $f: N \rightarrow M$ .

Далее, если не оговорено противное, все многообразия считаются компактными.

Указание к 4.5.1.d и 4.5.5. Примените теорему о неявной функции. Или используйте следующее понятие. Назовем *геометрической производной* множества  $N \subset \mathbb{R}^m$  в точке  $x \in N$  множество

$$D_x N := \bigcap_{\delta > 0} \text{Cl} \left\{ \frac{x - y}{|x - y|} \in S^{m-1} : y \in N, 0 < |y - x| < \delta \right\}.$$

(О других применениях этого понятия см. [Sk10].)

## 4.6. Теорема Эйлера—Пуанкаре

**4.6.1.** На любом связном 2-многообразии с непустым краем существует ненулевое касательное векторное поле.

**Теорема 4.6.2** (Эйлер—Пуанкаре). *На замкнутом связном 2-многообразии имеется ненулевое касательное векторное поле тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика этого 2-многообразия нулевая.*

Определим эйлерову характеристику 2-многообразия.

Для треугольника  $\Delta$  гладкая регулярная параметризованная двумерная поверхность  $r: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  определяется аналогично определению, приведенному в начале п. 4.5, с заменой  $I^2$  на  $\Delta$  и — в точках границы  $\partial\Delta$  — частных производных на производные по

двум неколлинеарным направлениям. Если  $r$  инъективно, то образ  $r(\Delta)$  называется *криволинейным треугольником* или *гранью*. Образы вершин и сторон треугольника  $\Delta$  называются *вершинами* и *ребрами* грани.

*Триангуляцией* плоского многоугольника называется его разбиение на конечное число треугольников, для которого любые два из этих треугольников пересекаются либо по пустому множеству, либо по вершине, либо по ребру. **Триангуляция** поверхности или 2-многообразия определяется аналогично с заменой треугольников на криволинейные треугольники. Ср. с пп. 5.3, 5.6.

#### 4.6.3. Существует триангуляция

- (a) сферы; (b) кольца; (c) тора; (d) ленты Мёбиуса;
- (e) сферы с  $g$  ручками; (f) сферы с  $g$  ручками и  $h$  дырками;
- (g) бутылки Клейна; (h) проективной плоскости (см. пример 4.5.4).

**Теорема 4.6.4** (о триангулируемости; [MS74, теорема 10.6 из дополнения; Pr14, 17.2]). Для любого 2-многообразия и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует триангуляция 2-многообразия, для которой расстояние между любыми двумя точками любого треугольника меньше  $\varepsilon$ .

**Эйлеровой характеристикой** триангуляции 2-многообразия называется число  $V - E + F$ , где  $V, E, F$  — количества вершин, ребер и граней. Эйлеровой характеристикой  $\chi(N)$  2-многообразия  $N$  называется эйлерова характеристика произвольного его разбиения на многоугольники. Это определение корректно ввиду теоремы 5.2.4.b и утверждения 5.4.1 (b). Важно, что существуют простые способы вычислять эйлерову характеристику (см. п. 5.5).

Теорема Эйлера—Пуанкаре доказана в следующих двух пунктах. Мы приводим два независимых (но по сути эквивалентных) доказательства. Первое более простое, но использует общее положение (те, кто не владеют этой техникой, могут считать это доказательство эвристическим рассуждением). Второе доказательство элементарно, но более громоздко (поскольку фактически повторяет технические доказательства свойств общего положения).

**Замечание** (не используемое в дальнейшем). Соответствие между классами диффеоморфности 2-многообразий и классами ку-

сочно линейной гомеоморфности кусочно линейных 2-многообразий (см. п. 5.6), определяемое триангулируемостью, корректно определено и взаимно однозначно. Поэтому и по гладкой версии теоремы 5.6.1 о классификации поверхностей эйлерова характеристика замкнутого 2-многообразия нулевая тогда и только тогда, когда это 2-многообразие диффеоморфно тору или бутылке Клейна. Впрочем, проверять эту диффеоморфность проще всего именно при помощи подсчета эйлеровой характеристики. Теорема Эйлера—Пуанкаре для *ориентируемых* 2-многообразий (см. п. 4.10) вытекает из их классификации, *увлекаемости* векторных полей диффеоморфизмами и частного случая 4.1.1 (b) этой теоремы для стандартных сфер с ручками. Красивая идея доказательства этого частного случая приведена в [Pr15, § 7]. Я не знаю полной реализации этой идеи, которая была бы проще общего доказательства.

*Указание к задачам 4.6.1, 4.10.2.* Сначала постройте поле на вершинах, затем продолжите его на ребра и потом продолжите его на грани. Ср. п. 4.7 или 4.8.

## 4.7. Касательные векторные поля общего положения

Не существует одной теоремы или одного определения, формализующего идею *общего положения*. Для каждого конкретного доказательства формальное определение общего положения выбирается по-своему — так, чтобы доказательство получилось. Подробнее см. [Ru73, 1.6.D], [RS72]. (Впрочем, в тех книгах в основном рассматривается кусочно линейное общее положение, а в этой — гладкое.)

В этом пункте  $v$  — касательное векторное поле на замкнутом 2-многообразии  $N$ .

Окрестность произвольной точки  $x \in N$  в  $N$  назовем *малой*, если ортогональная проекция на касательную плоскость  $T_x$  переводит ненулевые касательные векторы в ненулевые. Эта проекция переводит поле  $v$  на окрестности в касательное векторное поле  $v_x$  на части  $\tau_x$  касательной плоскости  $T_x$ . Ясно, что любая точка  $x \in N$  имеет малую окрестность.

Поле  $v$  называется *гладким*, если для любой точки  $x \in N$  существует ее малая окрестность, для которой поле  $v_x$ , т. е. отображение  $\tau_x \rightarrow T_x$ , бесконечно дифференцируемо.

Напомним, что производная отображения  $\tau_x \rightarrow T_x$  в точке  $y \in \tau_x$  является линейным оператором  $T_x \rightarrow T_x$ ; она представляется  $2 \times 2$ -матрицей в базисе в  $T_x$ .

Гладкое касательное векторное поле  $v$  называется *полем общего положения*, если для любой такой точки  $x$ , что  $v(x) = 0$ , и ее малой окрестности производная отображения  $\tau_x \rightarrow T_x$  невырождена в любой точке  $y \in \tau_x$ .

Ясно, что ненулевое постоянное векторное поле на плоскости является полем общего положения на плоскости, а нулевое постоянное — не является. Другие нарисованные примеры касательных векторных полей (рис. 2.1.3 справа и др.) являются полями общего положения. Полем общего положения является ненулевое касательное векторное поле (если оно существует).

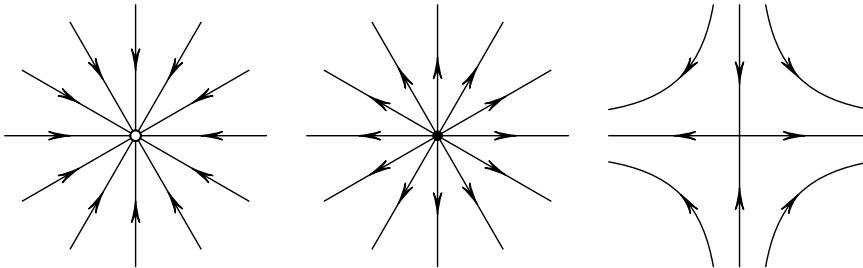


Рис. 4.7.1. Траектории радиальных и седлового векторных полей на плоскости

**4.7.1.** Какие из следующих векторных полей на плоскости являются полями общего положения:

(а—е) векторные поля на рис. 3.3.1, 4.1.1 (задайте сами такие векторные поля формулами; ответ может зависеть от этого выбора);

(f) векторное поле на комплексной плоскости, заданное формулой  $v(z) = z^2$ ?

*Определение числа Эйлера  $e(N)$ .* Возьмем на  $N$  поле общего положения. Существование такого поля доказано (на более сложном языке) в [DNF79, Ч. II, § 13], [Pr14, V]. Из общности положения вытекает конечность числа нулей поля. Числом Эйлера  $e(N)$  на-

зывается сумма знаков определителей производной в нулях поля. (Для определения знака нужна ориентация в  $T_x$ , но при обращении ориентации получается такой же знак.)

*Набросок доказательства корректности определения числа Эйлера, т. е. независимости от выбора поля общего положения.* Обоснование утверждений, приведенных в этом наброске без доказательства, можно найти, например, в [DNF79, Ч. II, § 13], [Pr14, 18.1]. Существует гладкая гомотопия общего положения между двумя полями  $v$  и  $v'$  общего положения на  $N$ . Ее можно представлять себе как касательное векторное поле общего положения на  $N \times I \subset \mathbb{R}^m \times I$ , векторы которого параллельны гиперплоскости  $\mathbb{R}^3 \times 0$ . Гладкость определяется аналогично предыдущему. Производная в точке является линейным оператором  $\tau_x \times \mathbb{R} \rightarrow T_x$ ; он представляется  $3 \times 2$ -матрицей. Общность положения означает, что в любой точке, в которой вектор нулевой, производная поля имеет ранг 2. Из общности положения (и подразумеваемой всюду компактности) вытекает, что множество нулей является несвязным объединением замкнутых и незамкнутых гладких кривых. На них можно ввести ориентацию (подумайте как). Если одна из этих незамкнутых кривых соединяет разные основания  $N \times 0$  и  $N \times 1$ , то в соответствующих нулях полей  $v$  и  $v'$  определители производных имеют одинаковый знак, а если одинаковые, то разный. Поэтому  $e(v) = e(v')$ .

**4.7.2.** Для любого замкнутого 2-многообразия  $N$  выполнено равенство  $e(N) = \chi(N)$ .

Кроме того, из рис. 2.1.3 (b) видно, что  $e(S_g) = 2 - 2g$ .

Отсюда следует необходимость в теореме Эйлера—Пуанкаре 4.6.2. Для доказательства достаточности нужно при  $e(N) = 0$  и связном  $N$  получить ненулевое касательное векторное поле из касательного векторного поля общего положения «сокращением» точек разных знаков. Это делается аналогично [Pr14, § 18.3].

*Указание к задаче 4.7.2.* См. рис. 4.7.2. Знаки определителей производной в нулях касательных векторных полей на рис. 4.7.1 равны +1, +1 и −1 соответственно. Рассмотрите новую достаточно мелкую триангуляцию, для которой особые точки изображенно-

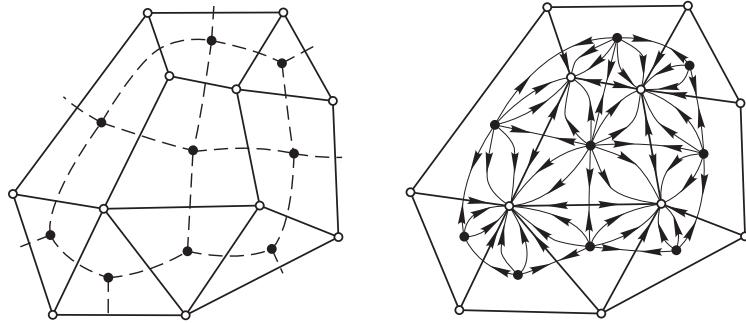


Рис. 4.7.2. Построение поля общего положения по разбиению на многоугольники. Векторное поле в окрестностях вершин, особых точек внутри граней и на ребрах устроено, как на рис. 4.7.1.

го на рис. 4.7.2 векторного поля лежат внутри ее граней. Строгое обоснование требует написания формул и потому не так просто.

#### 4.8. Построение векторных полей по триангуляции

Приведем определение числа Эйлера через триангуляции и соответствующее доказательство теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.6.2. Оно похоже на [ВЕ82, § 14], ср. [Pr14, § 18]. Его идея в том, чтобы сначала построить ненулевое касательное векторное поле на вершинах некоторой триангуляции, затем продолжить его на ребра и потом продолжить его на грани<sup>10</sup>. Аналогичная идея работает для нормальных векторных полей на 2-многообразиях (п. 4.10) и многомерных многообразий (п. 8.6). При развитии этой идеи *числовой* инвариант обобщается до *групповых*, см. п. 4.11, 6.8, 6.1—6.4 (рассматриваемая в этих пунктах проблема в чем-то даже проще проблем о векторных полях), 7.3, 8.6, 8.12, 9.7, 9.8.

**Замечание.** Роль теории препятствий состоит в *сведении* топологических задач на *произвольном* многообразии к похожим задачам для *простейших, модельных* многообразий. Важно, что для применения теории препятствий можно воспользоваться *результатом* решения этих простейших задач, не вникая в его доказатель-

<sup>10</sup>Эта идея реализуется с использованием определенного ниже *двойственного* разбиения на многоугольники. Можно было бы реализовать ее и для исходного разбиения, но тогда возникающие объекты будут менее естественны — см. определение границы в этом пункте и правило Кирхгофа 4.11.2.

ство. Указанные простейшие задачи могут решаться, в частности, средствами теории препятствий. Мы будем использовать понятие количества оборотов (п. 3.8) и теорему продолжаемости 3.10.1 (с).

*В этом пункте слово «поле» означает «ненулевое касательное векторное поле».*

**4.8.1.** Пусть даны любые 2-многообразие (возможно, с непустым краем) и его триангуляция, настолько мелкая, что касательные плоскости в любых двух точках любой грани не ортогональны.

(а) Пусть даны поле на 2-многообразии и гомотопия его сужения на некоторый набор вершин триангуляции. Тогда эта гомотопия продолжается до гомотопии всего исходного поля.

(б) Любое поле, заданное на вершинах триангуляции, можно продолжить на объединение ее ребер.

(с) Продолжение из п. (б) неоднозначно даже с точностью до гомотопии в классе полей на объединении ребер.

*Указания.* (а) Это аналог для векторных полей теоремы Борсука о продолжении гомотопии 3.7.2 (д).

(б) Возьмем произвольное ребро  $a$  триангуляции. Ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этого ребра на касательную плоскость  $T_A$  в некоторой фиксированной точке  $A$  этого ребра переводит ненулевые векторы в ненулевые. Значит, касательные плоскости в разных точках этого ребра можно отождествить с одной плоскостью  $T_A$ . Если на плоскости лежит отрезок и в его концах заданы ненулевые векторы (лежащие в плоскости), то это поле из двух векторов можно продолжить до поля на всем отрезке.

**Разбиением 2-многообразия на многоугольники** называется набор граней, для которого объединение граней есть данное 2-многообразие и любые две грани пересекаются либо по пустому множеству, либо по вершине, либо по ребру.

Возьмем разбиение  $U$  некоторого 2-многообразия на многоугольники (например, триангуляцию). Выберем внутри каждой грани разбиения  $U$  точку. Обозначим полученное множество точек через  $U_0^*$ . Для каждого ребра  $a$  разбиения  $U$  соединим кривой  $a^*$  точки множества  $U_0^*$ , соответствующие соседним вдоль ребра  $a$  граням. Сделаем это так, чтобы разные кривые пересекались (если

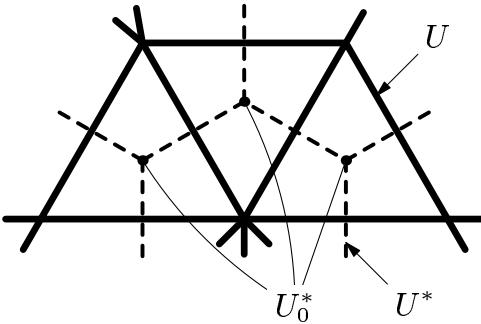


Рис. 4.8.1. Двойственное разбиение на многоугольники

вообще пересекались) только по общим концам. Кривая  $a^*$  называется *двойственным ребром* к  $a$ . Объединение кривых  $a^*$  разбивает 2-многообразие на многоугольники (рис. 4.8.1). Полученное разбиение на многоугольники называется **двойственным** к  $U$  и обозначается  $U^*$ .

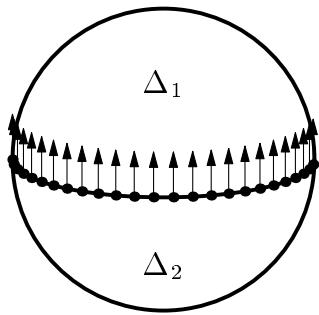


Рис. 4.8.2. Векторное поле на объединении ребер разбиения на многоугольники

*Доказательство теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.6.2.* (Для сферы эти рассуждения иллюстрируются рисунком 4.8.2.) Возьмем некоторую триангуляцию  $U$  2-многообразия  $N$ . Обозначим через  $U^*$  двойственное разбиение. Выберем  $U$  настолько мелкой, чтобы касательные плоскости в любых двух точках любой грани разбиения  $U^*$  не были ортогональны.

Очевидно, что можно построить поле на  $U_0^*$ . Ясно, что это поле единственно (с точностью до гомотопии в классе полей на  $U_0^*$ ). Поэтому и ввиду утверждения 4.8.1 (а) *существование поля на  $N$  равносильно продолжаемости построенного поля с  $U_0^*$  на  $N$ .* (Точ-

нее, здесь нужен аналог утверждения 4.8.1 (b) для разбиений. Аналогичные замечания далее пропускаются.)

Обозначим через  $v$  поле на  $U_1^*$ , полученное применением утверждения 4.8.1 (b) к построенному полю на  $U_0^*$ , см. рис. 4.8.2. Попробуем продолжить поле  $v$  с  $U_1^*$  на все  $N$ . Возьмем произвольную грань  $\Delta$  разбиения  $U^*$ . Ввиду мелкости разбиения  $U$  ортогональная проекция касательной плоскости в произвольной точке этой грани на касательную плоскость  $T_\Delta$  в некоторой фиксированной точке этой грани переводит ненулевые векторы в ненулевые.

Возьмем ориентацию грани  $\Delta$ , т. е. направление на замкнутой кривой  $\partial\Delta$ . Оно дает ориентацию на  $T_\Delta$ . При обходе этой замкнутой кривой  $\partial\Delta$  вдоль взятого направления ортогональная проекция вектора поля  $v$  на  $T_\Delta$  повернется на некоторое целое число оборотов (п. 3.8). При изменении ориентации грани  $\Delta$  меняются и направление на замкнутой кривой  $\partial\Delta$ , и ориентацию на  $T_\Delta$ . Поэтому полученное число оборотов не зависит от ориентации грани  $\Delta$ . Поставим это число в вершину  $\Delta^*$  исходного разбиения  $U$ , лежащую в грани  $\Delta$ . (Например, для случая на рис. 4.8.2 в обоих вершинах будут стоять единицы. Придумайте, как придать смысл этому утверждению, несмотря на то что для этого разбиения не выполнено условие неортогональности касательных плоскостей из начала доказательства.) Полученная расстановка целых чисел в вершинах разбиения  $U$  называется *препятствующей* и обозначается  $\varepsilon(v)$ . По теореме о продолжаемости 3.10.1 (c)

*продолжение поля  $v$  с  $U_1^*$  на  $N$  возможно тогда и только тогда, когда  $\varepsilon(v) = 0$ .*

Если  $\varepsilon(v) \neq 0$ , то поле  $v$  не продолжается на  $N$ , но не потерянно: можно попытаться так изменить поле  $v$  на  $U_1^*$ , чтобы препятствующая расстановка стала нулевой. Теорема Эйлера—Пуанкаре вытекает из утверждений 4.8.2. (Вместо применения п. (b) можно применить п. (c) и гладкую версию теоремы классификации 5.6.1.)  $\square$

**4.8.2.** Пусть  $N$  — замкнутое 2-многообразие,  $U$  — его триангуляция, настолько мелкая, что касательные плоскости в любых двух точках любой грани разбиения  $U^*$  не ортогональны, и  $v$  — поле, заданное на объединении ребер разбиения  $U^*$ .

- (a) Сумма  $e(v)$  чисел препятствующей расстановки  $\varepsilon(v)$  не зависит от  $v$ . (Поэтому эта сумма обозначается  $e(N)$ .)
- (b) Если  $N$  связно и  $e(N) = 0$ , то на  $N$  существует поле.
- (c) Справедливо равенство  $e(N) = \chi(N)$ . (Ср. с утверждением 4.7.2.)

**4.8.3.** (a) Препятствующая расстановка  $\varepsilon(v)$  не меняется при гомотопии поля  $v$ .

(b) Для любых двух полей  $v$  и  $u$  на  $U_1^*$  существует поле  $v'$ , гомотопное  $v$  и совпадающее с  $u$  на  $U_0^*$ .

*Доказательство утверждения 4.8.2 (a).* Ввиду утверждений 4.8.3 достаточно доказать, что  $e(u) = e(v)$  для любых двух полей  $u, v$ , совпадающих на  $U_0^*$ . А это достаточно доказать для любых двух полей  $u, v$ , совпадающих вне внутренности одного ребра. Обозначим через  $\alpha$  и  $\beta$  две грани, примыкающие к этому ребру. Обозначим через  $s$  количество оборотов — при обходе по границе объединения  $\alpha \cup \beta$  — вектора каждого из двух полей  $u$  и  $v$ , совпадающих на этом объединении. Тогда

$$\varepsilon(v)(\alpha) + \varepsilon(v)(\beta) = s = \varepsilon(u)(\alpha) + \varepsilon(u)(\beta).$$

Значит,  $e(u) = e(v)$ . □

## 4.9. Другое построение векторных полей\*

Приведем другое завершение доказательства теоремы Эйлера—Пуанкаре 4.6.2. Оно более длинно, но иллюстрирует общий подход теории препятствий.

*Другое доказательство утверждения 4.8.2 (a).* Выясним, как  $\varepsilon(v)$  зависит от  $v$ . Ввиду утверждений 4.8.3 можно считать, что поле  $v$  не меняется на  $U_0^*$ . Различие между полями  $v$  и  $u$  на  $U_1^*$ , совпадающими на  $U_0^*$ , можно измерять (и задавать) так. Возьмем направленное ребро  $a$  разбиения  $U$ . Выберем также ориентацию на объединении двух граней разбиения  $U$ , в которых лежит  $a$ . Возьмем направленное ребро  $a^*$  разбиения  $U^*$ , пересекающее ребро  $a$  ровно в одной точке, для которого «базис  $(a, a^*)$ » положительный в точке  $a \cap a^*$ . Пусть точка  $x$  движется по ребру  $a^*$  вдоль направления, а потом обратно. При движении «туда» будем рассматривать

вектор  $u(x)$ , а при движении «обратно» — вектор  $v(x)$ . Поставим на направленном ребре  $a$  разбиения  $U$  число оборотов ортогональной проекции рассматриваемого вектора на  $T_{a \cap a^*}$  при этом движении. (Например, для поля  $u$  на рис. 4.9.1 и поля  $v$ , направленного вертикально вверх, на ребре, направленном вправо, стоит  $-1$ .) Полученную расстановку целых чисел на направленных ребрах разбиения  $U$  назовем *различающей* и обозначим  $d(v, u)$ .

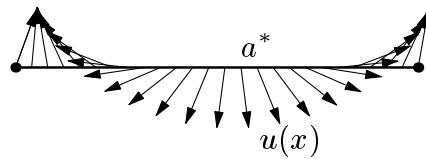


Рис. 4.9.1. Подкручивание векторного поля, направленного вверх, на один оборот

При изменении ориентации на объединении двух граней разбиения  $U$ , в которых лежит  $a$ , меняются и направление ребра  $a^*$ , и положительное направление отсчитываемых оборотов. Поэтому число на ребре  $a$  не зависит от выбора ориентации. А вот при замене направления на ребре  $a^*$  это число меняет знак.

При изменении поля на ребре  $a^*$  «на +1 оборот» (рис. 4.9.1) к  $\varepsilon(v)$  прибавляется расстановка  $+1$  в начале ребра  $a$  и  $-1$  в его конце (и  $0$  на всех остальных вершинах). Эта расстановка называется *границей ребра*  $a$  и обозначается  $\partial a$ . Нетрудно проверить, что если

$$d(v, v') = n_1 a_1 + \dots + n_s a_s,$$

то

$$\varepsilon(v) - \varepsilon(v') = n_1 \partial a_1 + \dots + n_s \partial a_s.$$

Из этого вытекает утверждение 4.8.2 (а).  $\square$

Возьмем триангуляцию  $U$  2-многообразия. Назовем *границей* сумму с целыми коэффициентами  $n_1 \partial a_1 + \dots + n_s \partial a_s$  границ центральных ребер триангуляции  $U$ . Назовем расстановки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  целых чисел в вершинах *гомологичными*, если  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$  есть граница.

**4.9.1.** (а) При изменении поля  $v$  на  $U_1^*$  препятствующая расстановка  $\varepsilon(v)$  заменяется на гомологичную расстановку.

## § 5. Двумерные многообразия

### 5.1. Гиперграфы и их тела

Дадим комбинаторное определение двумерных поверхностей (и даже более общих объектов). Оно удобно как для теории, так и для хранения в памяти компьютера. Ср. с п. 1.2.

Main results stated in this section (but not used later) are Theorems 5.2.4, 5.3.1, 5.3.3, and 5.6.1.

*Двумерным гиперграфом*  $(V, F)$  называется<sup>11</sup> семейство  $F$  трехэлементных подмножеств конечного множества  $V$ . Вместо «двумерный гиперграф» в этом и следующем параграфах мы (как правило) пишем «гиперграф», а далее — «2-гиперграф». Элементы множеств  $V$  и  $F$  называются **вершинами** и **гранями** (или *гиперребрами*) гиперграфа. **Ребром** гиперграфа называется неупорядоченная пара вершин, содержащаяся в некоторой грани.

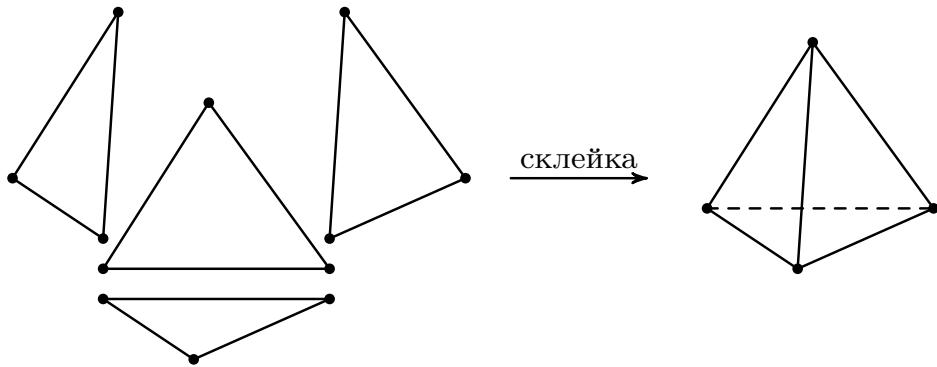


Рис. 5.1.1. Построение (тела) полного 2-гиперграфа с 4 вершинами

**Пример 5.1.1.** (а) *Полным гиперграфом с  $n$  вершинами* (или *двумерным остовом*  $(n - 1)$ -мерного симплекса) называется семейство всех трехэлементных подмножеств  $n$ -элементного множества. См. рис. 5.1.1 для  $n = 4$  и рис. 5.1.2 для  $n = 5$ . В этом параграфе полный гиперграф с 4 вершинами называется **сферой**  $S^2$ .

<sup>11</sup>Двумерный гиперграф называют также 3-однородным гиперграфом или *размерно однородным* двумерным симплициальным комплексом, см. [Sk, § 6].

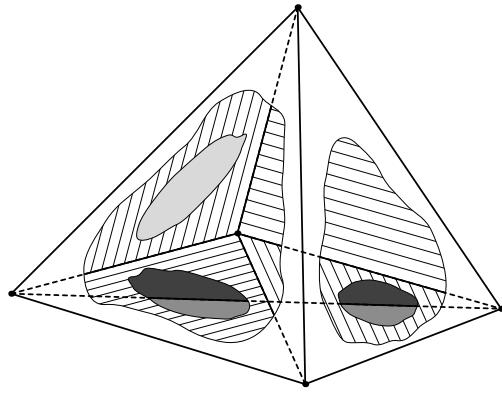


Рис. 5.1.2. Полный 2-гиперграф с 5 вершинами

(b) *Книжкой с  $n$  листами* называется гиперграф с вершинами  $a, b, 1, 2, \dots, n$  и гранями  $\{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \dots, \{a, b, n\}$ . Для  $n = 3$  см. рис. 2.2.1.

(c) Пусть заданы гиперграф и такая склейка его ребер, при которой никакие вершины двух пересекающихся граней не склеиваются. Такая склейка ребер задает новый гиперграф. Например, на рис. 2.1.1 изображены гиперграфы, полученные склейкой сторон квадрата (там не нарисованы необходимые триангуляции квадрата), и даны их названия. See the remark after Assertion 5.2.3.

(d) По триангуляции 2-многообразия (см. п. 4.6) естественно строится гиперграф, который также называется триангуляцией.

Определение изоморфности гиперграфов аналогично случаю графов. Гиперграфы  $(V, F)$  и  $(V', F')$  называются **изоморфными**, если существует биекция  $f: V \rightarrow V'$ , удовлетворяющая следующему условию: *вершины  $A, B, C \in V$  лежат в одной грани в том и только в том случае, если их образы лежат в одной грани*.

Для  $1 \leq i \leq n$  обозначим через  $e_{n,i} \in \mathbb{R}^n$  точку, у которой  $i$ -я координата равна 1, а остальные — 0. Выпуклая оболочка  $\Delta_n$  точек  $e_{n+1,1}, \dots, e_{n+1,n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  называется<sup>12</sup>  *$n$ -мерным симплексом*. Это выпуклый многогранник с  $n + 1$  вершиной; объединение его ребер «образует» полный граф  $K_{n+1}$ . **Телом** гиперграфа  $(V, F)$  называется объединение двумерных граней, отвечающих граням из  $F$ , симплекса с множеством вершин  $V$ .

<sup>12</sup>Можно определять  $n$ -мерный симплекс как выпуклую оболочку точек  $(0, \dots, 0), e_{n,1}, \dots, e_{n,n} \in \mathbb{R}^n$ . Это более наглядно, но менее удобно.

**Замечание 5.1.2** (о теле гиперграфа). Как и по графу, по гиперграфу строится геометрическая фигура, называемая его *телом* (см. строгое определение выше). Неформально говоря, эта фигура получена склейкой треугольников, соответствующих граням гиперграфа. Склейка осуществляется не обязательно в трехмерном пространстве: либо в многомерном пространстве, либо даже абстрактно, независимо от объемлющего пространства.

Например, на рис. 5.1.1 изображено построение тела полного гиперграфа с 4 вершинами. Тело гиперграфа, построенного по триангуляции поверхности, гомеоморфно этой поверхности. Более общим образом, гиперграфы, как и графы, можно задавать *фигурами*, в том числе «гладкими» и самопересекающимися. См. третью и четвертую строки на рис. 2.1.1. Одна фигура задает много гиперграфов.

Обычно все такие гиперграфы гомеоморфны (см. теорему 5.2.4 и пример перед задачей 10.3.3). Тогда гиперграф может называться так же, как и фигура; в этом случае не изоморфные, но гомеоморфные гиперграфы называются одинаково.

Несмотря на наличие тела, гиперграф — комбинаторный объект. Невозможно, например, взять точку на его грани. Однако «взятие точки на грани тела гиперграфа» формализуется «взятием новой вершины нового гиперграфа, образовавшегося при подразделении этой грани», см. рис. 5.2.2 справа. Мы не будем доводить рассуждения до такого формализма.

## 5.2. Гомеоморфность гиперграфов

**Замечание 5.2.1** (гомеоморфность графов). (а) Операция *подразделения ребра* графа показана на рис. 5.2.1. Два графа называются *гомеоморфными*, если один можно получить из другого (точнее, из графа, изоморфного другому) операциями подразделения ребра и обратными к ним. Или, что эквивалентно, если существует граф, который можно получить из каждого из данных графов подразделениями ребер.

(б) Определение гомеоморфности подмножеств евклидова пространства приведено в п. 3.1. Оказывается, *графы  $G_1$  и  $G_2$  гомеоморфны тогда и только тогда, когда тела  $|G_1|$  и  $|G_2|$  гомеоморфны*.

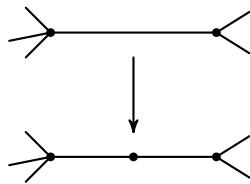


Рис. 5.2.1. Подразделение ребра

ны. Этот критерий является *мотивировкой* для определения гомеоморфности графов, которое позволяет перевести изучение некоторых фигур на комбинаторный язык.

(с) *Одномерным полиэдром* называется класс гомеоморфности графов. Топологу интересны именно полиэдры (часто тополог называет их графами), а графы и тела — удобные средства изучения полиэдров и хранения их в компьютере. Комбинаторщику и дискретному геометру интересны графы и тела, а полиэдры скорее оказываются удобными средствами.

Определение гомеоморфности (комбинаторно-топологической эквивалентности) гиперграфов аналогично определению гомеоморфности графов.

Операция **подразделения ребра** двумерного гиперграфа изображена на рис. 5.2.2 слева.

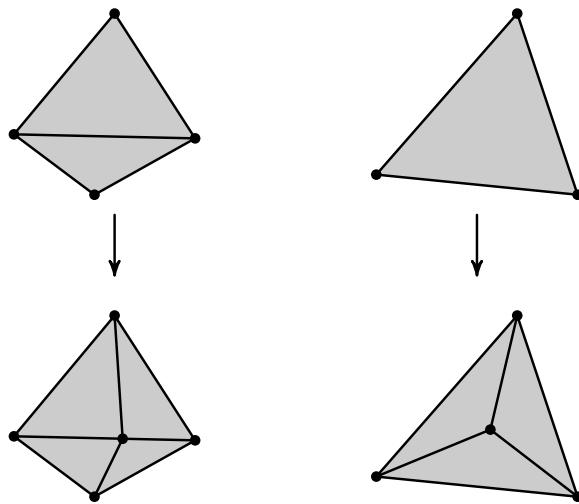


Рис. 5.2.2. Подразделения ребра и грани

**5.2.2.** Операция *подразделения грани* на рис. 5.2.2 справа выражается через операцию подразделения ребра и обратную к ней.

Два гиперграфа называются **гомеоморфными**, если один можно получить из другого (точнее, из гиперграфа, изоморфного другому) операциями подразделения ребра и обратными к ним.

- 5.2.3.** (a) Гиперграф с вершинами  $0, 1, \dots, n$  и гранями  $\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\}, \dots, \{0, n-1, n\}$  гомеоморфен полному гиперграфу с тремя вершинами.  
 (b) То же для набора граней  $\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 3\}, \dots, \{0, n-1, n\}, \{0, n, 1\}$ .  
 (c) Гиперграфы в каждой одной колонке на рис. 2.1.1 гомеоморфны между собой (для некоторых триангуляций квадратов), а из разных колонок — нет.

*Указание:* негомеоморфность можно доказывать по мере чтения следующих пунктов.

- (d) Любые две триангуляции треугольника гомеоморфны.  
 (e) The spheres  $S^2$  defined in Example 5.1.1.a,c are homeomorphic.  
 (f) Give an example of hypergraphs  $A, B, C, A', B', C'$  such that  $A \cap B = C$ ,  $A' \cap B' = C'$ , hypergraphs  $A$  and  $A'$ ,  $B$  and  $B'$ ,  $C$  and  $C'$ , are homeomorphic, but hypergraphs  $A \cup B$  and  $A' \cup B'$  are not homeomorphic.

Both (d,e) are non-trivial. Part (d) can be proved in a direct geometric way (check that your proof does not work for the Möbius band), or follows from Theorem 5.4.3. Part (e) follows from Theorem 5.3.3 (or from a more complicated Theorem 5.2.4.a).

**Теорема 5.2.4.** (a) Двумерные гиперграфы гомеоморфны тогда и только тогда, когда их тела гомеоморфны.

(b) Гиперграфы, соответствующие двум триангуляциям одного 2-многообразия в  $\mathbb{R}^m$  (см. п. 4.5), гомеоморфны.

Это важное утверждение («Hauptvermutung»). Оно иллюстрирует связь между «комбинаторной» гомеоморфностью гиперграфов и «топологической» гомеоморфностью их тел.

Теорема 5.2.4 не доказывается и не используется в данной книге. Она нетривиальна, даже если один из гиперграфов является треугольником (утверждение 5.2.3 (d)) или сферой с ручками (п. 2.1).<sup>13</sup>

---

<sup>13</sup> Осторожно: красивые наглядные пояснения этого или аналогичных результатов могут не являться доказательствами! Например, в [Pr14, доказательство теоремы 11.5] не определены «ребра поверхности», «кусочно линейный граф на

*Двумерным полиэдром* называется класс гомеоморфности двумерного гиперграфа. Аналог замечания 5.2.1.c справедлив для гиперграфов.

Граф называется **вложимым** в гиперграф (или *реализуемым* в гиперграфе), если некоторый гиперграф, гомеоморфный данному, содержит некоторый граф, гомеоморфный данному.

### 5.3. Recognition of 2-hypergraphs being homeomorphic

**Теорема 5.3.1.** *Существует алгоритм распознавания гомеоморфности*

- (a) *двумерного гиперграфа сфере  $S^2$ ;*
- (b) *двумерных гиперграфов.*

Теорема 5.3.1.b не доказывается и не используется в данной книге. Теорема 5.3.1 (a) вытекает из теоремы 5.3.3 о распознавании сферы. Последнюю и теорему 5.6.1 о классификации поверхностей можно рассматривать как важные частные случаи теоремы 5.3.1 (b), которые показывают, как доказывать и общий случай (см. задачу 5.4.4 (b) и понятие приклеивающего слова перед задачей 10.5.10). Определим понятия, необходимые для формулировки этих частных случаев.

Гиперграф называется **связным**, если от любой вершины можно добраться до любой другой по ребрам.

Двумерный гиперграф называется **локально евклидовым**, если для любой его вершины  $v$  все грани, ее содержащие, образуют цепочку

$$\begin{aligned} & \{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\}, \dots, \{v, a_{n-1}, a_n\} \quad \text{или} \\ & \{v, a_1, a_2\}, \{v, a_2, a_3\}, \dots, \{v, a_{n-1}, a_n\}, \{v, a_n, a_1\} \end{aligned}$$

для некоторых попарно различных вершин  $a_1, \dots, a_n$  (ср. с утверждениями 5.2.3.a,b).

---

поверхности» и «трансверсальное пересечение ребер». Чтобы преодолеть эту трудность, нужна версия теоремы 4.6.4 о триангулируемости. Можно поступить проще, доказывая совпадение эйлеровых характеристик не для произвольных замкнутых двумерных поверхностей, а для рассматриваемых примеров, и взять в качестве  $G_2$  конкретную построенную триангуляцию (этого достаточно для теоремы 11.5). Даже после этого фраза «Граф  $G_1$  можно изменить так...» не очевидна; по-видимому, этот факт столь же сложен, как и теорема 5.2.4.b.

Например, гиперграфы, являющиеся триангуляциями поверхностей на рис. 2.1.1, см. утверждение 4.6.3 (или диска с ленточками, п. 1.5), локально евклидовы.

- 5.3.2.** (а) Для каких  $n$  полный гиперграф с  $n$  вершинами локально евклидов?
- (б) Существует не локально евклидов гиперграф, к каждому ребру которого примыкают две грани.
- (с) Гиперграф, гомеоморфный локально евклидову, локально евклидов.

**Эйлеровой характеристикой** двумерного гиперграфа  $K$  с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $F$  гранями называется число

$$\chi(K) := V - E + F.$$

Методы вычисления эйлеровой характеристики приведены в п. 5.5.

**Теорема 5.3.3** (о распознавании сферы). *Двумерный гиперграф гомеоморден сфере  $S^2$  тогда и только тогда, когда он связан, локально евклидов и его эйлерова характеристика равна 2.*

Набросок доказательства этой теоремы приведен в п. 5.4. О многомерных аналогах см. п. 10.1.

#### 5.4. Доказательство теоремы 5.3.3 о распознавании сферы

- 5.4.1.** (а) The Euler characteristic of the sphere  $S^2$  equals 2.  
 (б) Эйлеровы характеристики гомеоморфных гиперграфов равны.

Часть «только тогда» теоремы 5.3.3 следует из утверждений 5.3.2 (с) и 5.4.1 (а, б). (Замкнутость и ориентируемость, см. пп. 5.6, 5.7, также необходимы для гомеоморфности, но они вытекают из остальных необходимых условий теоремы 5.3.3.)

**Краем** (или границей)  $\partial N$  локально евклидова гиперграфа  $N$  называется объединение всех тех его ребер, которые содержатся только в одной грани.

- 5.4.2.** (а) Край является несвязным объединением циклов, т. е. графов, гомеоморфных треугольнику.  
 (б) Количество краевых окружностей одинаково для гомеоморфных локально евклидовых гиперграфов.

(c) Гиперграфы, «представляющие» кольцо и ленту Мёбиуса, не гомеоморфны.

(d) Let  $K$  and  $L$  be homeomorphic locally Euclidean hypergraphs. Denote by  $K_+$  and  $L_+$  the hypergraphs obtained from them by attaching disks to all the boundary components (i.e. attaching cones over all the boundary components). Then  $K_+$  and  $L_+$  are homeomorphic.

*Доказательство части «тогда» теоремы 5.3.3.* This part is reduced to its version for thickenings (Proposition 2.7.8.b). Обозначим через

- $K$  данный локально евклидов гиперграф;
- $V, E, F, h(K)$  количества его вершин, ребер, граней и краевых окружностей;
- $M$  объединение *шапочек* и *ленточек*, соответствующих его вершинам и ребрам (см. рис. 1.6.3 слева and a rigorous definition below in this subsection).

Ввиду утверждений 5.2.3.a,b any patch, any ribbon, and any cap is homeomorphic to  $D^2$ . Hence  $M$  is a thickening of the union of edges. Ясно, что  $M$  имеет  $F + h(K)$  краевых окружностей. Так как  $V - E + F = 2$ , то ввиду связности и утверждения 2.7.8.b получаем, что  $h(K) = 0$  и  $M$  гомеоморфно сфере с  $F$  дырками. The thickening  $M$  is  $K$  with  $F$  holes. Значит, по утверждению 5.4.2.d  $K$  гомеоморфно сфере.  $\square$

*Барицентрическим подразделением*  $G'$  *графа*  $G$  назовем результат подразделения всех его ребер. *Барицентрическим подразделением грани гиперграфа* назовем замену ее на шесть новых граней, полученных проведением «медиан» в треугольнике, представляющим эту грань (рис. 5.4.1). **Барицентрическим подразделением**  $K'$  *гиперграфа*  $K$  назовем результат барицентрического подразделения всех его граней.

Так как барицентрическое подразделение можно осуществить с помощью подразделений ребер, то  $K'$  гомеоморфно  $K$ .

Обозначим через  $K''$  гиперграф, полученный из гиперграфа  $K$  двукратным применением операции барицентрического подразделения. Назовем (см. рис. 1.6.3 слева, на котором изображена триангуляция  $K$  2-многообразия)

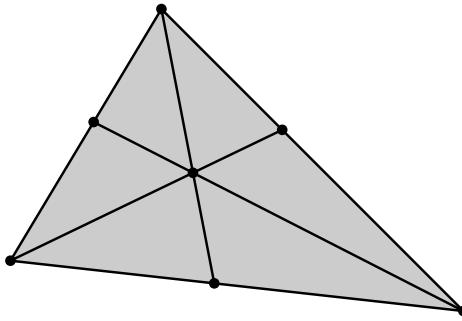


Рис. 5.4.1. Барицентрическое подразделение

- **шапочкой** объединение всех граней триангуляции  $K''$ , содержащих некоторую вершину триангуляции  $K$ ;
- **ленточкой** объединение всех граней триангуляции  $K''$ , пересекающих некоторое ребро триангуляции  $K$ , но не содержащих никакой вершины триангуляции  $K$ ;
- **заплаткой** компоненту связности объединения оставшихся граней триангуляции  $K''$ , i.e., the union of all faces of  $K''$  belonging neither to caps nor to ribbons.

**Теорема 5.4.3.** *Двумерный гиперграф гомеоморфен диску  $D^2$  тогда и только тогда, когда он связан, локально евклидов, имеет одну компоненту края и его эйлерова характеристика равна 1.*

**5.4.4.** (a) Существует алгоритм, который по гиперграфу, гомеоморфному сфере  $S^2$ , строит последовательность подразделений ребер и обратных операций, приводящий данный гиперграф к  $S^2$ .

(b) Существует алгоритм распознавания гомеоморфности гиперграфа книжке с 3 страницами.

## 5.5. Эйлерова характеристика гиперграфа

**5.5.1.** Придумайте связный локально евклидов 2-гиперграф, имеющий

- эйлерову характеристику  $-99$ .
- пустой край и эйлерову характеристику  $-10$ .
- пустой край и эйлерову характеристику  $1$ .

For a solution the following transformations are useful. Из локально евклидова гиперграфа можно получить новые локально евклидовые гиперграфы

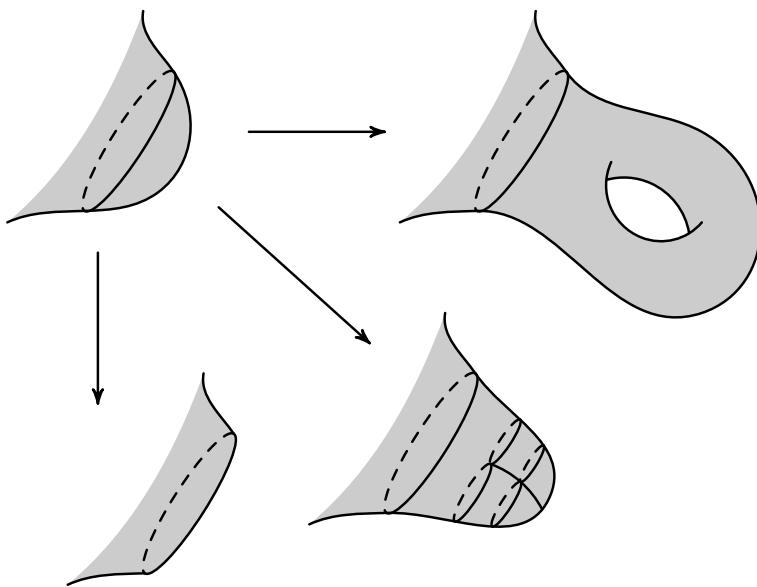


Рис. 5.5.1. Приклеивание ручки и пленки Мёбиуса; вырезание дырки

- *вырезанием дырки*, т.е. удалением грани, ни одна из вершин которой не лежит в крае,
- *приклеванием ручки*, т.е. вырезанием дырки and attaching to its boundary some torus with hole, см. замечание 5.1.1.с, и
- *приклеванием пленки Мёбиуса* т.е. вырезанием дырки and attaching to its boundary some Möbius band).

См. рис. 5.5.1. Before we prove in §5.8 that these operations are well-defined (с точностью до гомеоморфности), we do not assume that.

Эти операции позволяют дать следующие строгие определения. *Сферой с g ручками* называется любой гиперграф, полученный из сферы  $g$  операциями приклевивания ручки. *Сферой с t пленками Мёбиуса* называется любой гиперграф, полученный из сферы  $t$  операциями приклевивания пленки Мёбиуса.

**5.5.2.** (a) Определим *careless приклевание ручки* как вырезание двух дырок и приклевивание к их краям некоторого кольца (цилиндра, диска с дыркой). Prove that this operation is not-well defined (даже с точностью до гомеоморфности).

*Hint:* see Figure 2.8.2 (a) and use §5.7.

(b) Определите *careful приклеивание ручки*, следуя рис. 2.1.5. Prove that this is the same as приклеивание ручки (с точностью до гомеоморфности).

(c) Проективная плоскость (см. пример 4.5.4) с дыркой гомеоморфна ленте Мёбиуса.

Неформальное обоснование этого факта (который и не сформулирован четко) позволяет дать следующее строгое определение. *Проективной плоскостью* называется любой гиперграф, полученный из сферы приклеиванием пленки Мёбиуса.

(d) Сфера с  $t$  пленками Мёбиуса и дыркой гомеоморфна диску с  $t$  лентами Мёбиуса (см. рисунок 2.8.1 и определение после него).

(e) Бутылка Клейна гомеоморфна сфере с двумя пленками Мёбиуса.

(f) Тор с пленкой Мёбиуса гомеоморфен бутылке Клейна с пленкой Мёбиуса.

(g) Результат приклеивания пленки Мёбиуса гомеоморфен результату вырезания дырки и склейки диаметрально противоположных точек на ее краевой окружности.

(h) Результат приклеивания ручки гомеоморфен результату вырезания квадратика  $ABCD$  и склейки направленных отрезков  $AB$  и  $DC$ ,  $AD$  и  $BC$ .

### 5.5.3. Найдите эйлеровы характеристики

(a) сферы; (b) кольца; (c) тора; (d) ленты Мёбиуса;

(e) сферы с  $g$  ручками; (f) сферы с  $g$  ручками и  $h$  дырками;

(g) бутылки Клейна; (h) проективной плоскости.

We recommend to compute эйлерову характеристику (например, в задаче 5.5.3) не по определению, а с использованием ее свойств. Они приведены в утверждениях 5.4.1.b и 5.5.4.

**5.5.4.** (a) (Загадка) Сформулируйте и докажите формулу для эйлеровой характеристики объединения.

(b) Вырезание дырки уменьшает эйлерову характеристику на 1.

(c) (Загадка) How Euler characteristic is changed under attaching a handle or a Möbius film?

**5.5.5.** Сфера с разными количествами ручек не гомеоморфны. (Это неочевидно ввиду гомеоморфности фигур, кажущихся совсем непохожими, см. п. 2.7 и особенно п. 2.8. Четкая формулировка:

никакая сфера с одним количеством ручек не гомеоморфна никакой сфере с другим количеством ручек.)

#### 5.5.6. Найдите эйлерову характеристику

- (а) диска с  $t$  лентами Мёбиуса (рис. 2.8.1 и определение после него);
- (б) бутылки Клейна с  $g$  ручками;
- (с) проективной плоскости с  $g$  ручками;
- (д) сферы с  $t$  пленками Мёбиуса;
- (е) сферы с  $t$  пленками Мёбиуса и  $h$  дырками.

#### 5.5.7. Какие гиперграфы из задачи 5.5.6 гомеоморфны?

#### 5.5.8. Обозначим через $K$ триангуляцию 2-многообразия.

- (а) *Теорема Римана.* Пусть в  $K$  даны  $g + t$  попарно непересекающихся циклов, причем при разрезании по каждому из  $g$  первых образуется две краевые окружности, а при разрезании по каждому из  $t$  последних — одна. Если  $2g + t > 2 - \chi(K)$ , то объединение этих циклов разбивает триангуляцию.

(Это обобщает теорему Римана 2.3.5 (а) и вытекает из утверждения 5.5.9, см. с [Pr14, § 11.4].)

- (б) *Неравенство Эйлера.* Связный подграф  $G$  в  $K$ , имеющий  $V$  вершин и  $E$  ребер, разбивает триангуляцию не менее чем на  $E - V + \chi(K)$  частей.

Иными словами,  $\chi(G) \geq \chi(K)$ .

- (с)\* На какое наименьшее количество частей может разбивать  $K$  ее подграф с  $V$  вершинами,  $E$  ребрами и  $s$  компонентами связности?

**5.5.9.** Разрежем триангуляцию 2-многообразия по неразбивающей кривой, составленной из некоторых ребер. Полученная триангуляция 2-многообразия имеет ту же эйлерову характеристику, что исходная.

## 5.6. Классификация поверхностей

**Теорема 5.6.1** (о классификации поверхностей). *Любой связный локально евклидов двумерный гиперграф гомеоморден либо сфере с ручками и дырками, либо сфере с пленками Мёбиуса и дырками.*

*Такие гиперграфы не гомеоморфны для различных троек  $(\varepsilon, g, h)$ , равных  $(0, g, h)$  для сферы с  $g$  ручками и  $h$  дырками и равных  $(1, g, h)$  для сферы с  $g$  пленками Мёбиуса и  $h$  дырками.*

Набросок доказательства этой теоремы приведен в п. 5.7. Он дает алгоритм распознавания гомеоморфности гиперграфа каждому из указанных в ней классов  $(\varepsilon, g, h)$  гомеоморфности гиперграфов, а также алгоритм распознавания гомеоморфности локально евклидовых гиперграфов. Ср. с теоремой 6.7.6.

*Кусочно линейным двумерным многообразием* называется класс гомеоморфности локально евклидова двумерного гиперграфа. Если не будет путаницы с понятием 2-многообразия из п. 4.5, то мы будем называть кусочно линейное двумерное многообразие просто **2-многообразием**.

Далее вместо термина «локально евклидов гиперграф» мы используем обычный термин **«триангуляция 2-многообразия»**. Ранее это было неудобно для начинающего, поскольку при изучении 2-многообразий с кусочно линейной точки зрения изначальным объектом является гиперграф, а не 2-многообразие.

Локально евклидов гиперграф называется **замкнутым**, если каждое его ребро лежит в двух гранях (а не в одной; т. е. если для каждой вершины имеет место второй случай из определения локальной евклидовости). Например, замкнуты только последние четыре «гиперграфа» на рис. 2.1.1. «Заклеив» каждую краевую окружность диска с ленточками диском, получим замкнутый локально евклидов гиперграф.

## 5.7. Ориентируемые триангуляции 2-многообразий

*Ориентация* треугольника — упорядочение его вершин с точностью до четной перестановки. Ориентацию удобно задавать замкнутой кривой со стрелкой, лежащей в треугольнике (или упорядоченной парой неколлинеарных векторов).

*Ориентацией* триангуляции 2-многообразия называется набор ориентаций ее граней, *согласованных* вдоль каждого ребра, лежащего в двух гранях, т. е. задающих с двух сторон этого ребра *противоположные* направления (рис. 5.7.1).

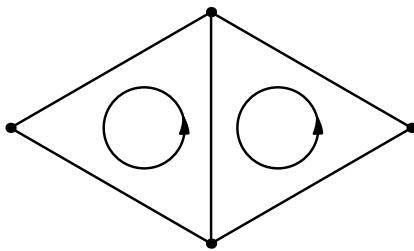


Рис. 5.7.1. Согласованные ориентации

Триангуляция 2-многообразия называется *ориентируемой*, если у нее существует ориентация<sup>14</sup>.

Нетрудно сообразить, что *гладкое 2-многообразие является ориентируемым в смысле п. 4.10 тогда и только тогда, когда оно имеет ориентируемую триангуляцию*.

**5.7.1.** (а) Гомеоморфные триангуляции 2-многообразий ориентируемые или нет одновременно.

(б) Сфера, тор и сфера с ручками ориентируемы.

(с) Лента Мёбиуса, бутылка Клейна и проективная плоскость (рис. 2.1.1) неориентируемы.

(д) Тор не гомеоморфен бутылке Клейна.

**5.7.2.** (а) Ориентируемость сохраняется при вырезании дырки.

(б) Диск с ленточками (см. п. 1.5) ориентируем тогда и только тогда, когда нет перекрученных ленточек.

(с) Эйлерова характеристика замкнутой ориентируемой триангуляции 2-многообразия четна. (Это следует из теоремы 5.6.1 или из утверждения 6.7.3 (б).)

**5.7.3.** (а) Триангуляция 2-многообразия ориентируема тогда и только тогда, когда никакая гомеоморфная ей триангуляция не содержит триангуляции ленты Мёбиуса.

(б)\* Существует ли неориентируемая триангуляция 2-многообразия, не содержащая триангуляции ленты Мёбиуса?

(с) Замкнутая триангуляция 2-многообразия ориентируема тогда и только тогда, когда существует набор граней ее барицентри-

<sup>14</sup>Понятие ориентируемости «невозможно» ввести для произвольных гиперграфов (подумайте почему), но можно ввести для гиперграфов, каждое ребро которых содержится не более чем в двух гранях.

ческого подразбиения, для которого к каждому ребру барицентрического подразбиения примыкает ровно одна грань набора.

Критерий из п. (а) не дает *алгоритма* распознавания ориентируемости. Такой алгоритм получается из усиления этого критерия, полученного заменой слов «никакая гомеоморфная ей триангуляция» на «ее второе барицентрическое подразбиение». Впрочем, соответствующий алгоритм медленно работает (имеет «экспоненциальную сложность»). Полиномиальный алгоритм приведен в п. 6.1 (или получается из п. (с)).

*Набросок доказательства теоремы 5.6.1 о классификации поверхностей.* Негомеоморфность (т. е. второе предложение) доказывается с использованием ориентируемости, количества связных компонент края и эйлеровой характеристики. Т. е. она следует из утверждений 5.7.1 (а), 5.4.2 (б), 5.4.1 (б) и результатов задач 5.5.6 (е), 5.5.3 (г).

Доказательство гомеоморфности (т. е. первого предложения) аналогично доказательству теоремы 5.3.3. Т. е. она следует из формул Эйлера 2.7.9 (б), 2.8.11 (б) и утверждений 5.7.2 (а, б).  $\square$

В теореме 5.6.1 число  $g$  ручек называется *ориентируемым родом* триангуляции 2-многообразия и находится из равенства  $2 - 2g - h = \chi$ . Число  $m$  пленок Мёбиуса называется *неориентируемым родом* и находится из равенства  $2 - m - h = \chi$ . См. задачи 5.5.3 (г) и 5.5.6 (а).

## 5.8. Attaching a handle or a Möbius band is well-defined

Гиперграфы, полученные из данного локально евклидова гиперграфа вырезанием дырки, приклеванием ручки и приклеванием пленки Мёбиуса соответственно, единственны с точностью до гомеоморфности. Для вырезания дырки это следует из леммы 5.8.1 об однородности.

**Лемма 5.8.1** (homogeneity). *Let  $p$  and  $q$  be any two faces of a locally Euclidean 2-hypergraph  $K$ . If both  $p$  and  $q$  are disjoint from  $\partial K$ , then  $K - p$  and  $K - q$  are homeomorphic.*

Независимость приклевания ручки от выбора дисков, к которым приклеивается ручка, также следует из леммы 5.8.1 об одно-

родности. А вот независимость от способа приклейки не очевидна (хотя обычно не обсуждается в учебниках). Ведь результат склейки двух прямоугольников  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  по отрезкам  $AB$  и  $A'B'$ ,  $CD$  и  $C'D'$ , зависит от способа склейки (т. е. от выбора направлений на отрезках, в соответствии с которыми они склеиваются). Кроме того, в следующем абзаце мы определяем аналогичную операцию «приклеивания штучки», которая не определена корректно с точностью до гомеоморфности.

A *candle* is the union of quadrilateral  $ABCD$  and segments  $CC_1$ ,  $DD_1$ ,  $DD_2$ . Given a surface  $M$  and an arc  $XY$  in its boundary, *attaching a candle* is taking the union of  $M$  and the candle along identification of arcs  $AB$  and  $XY$ . This can be done in two ways: identify  $A$  with  $X$  and  $B$  with  $Y$ , or vice versa. The two obtained shapes are homeomorphic when  $M$  is a disk, but any homeomorphism between them reverses orientation on the disk. The two thus obtained shapes are not homeomorphic when  $M$  is a disk with candle.

Для многомерных многообразий результат приклеивания аналога ручки может зависеть от способа приклейки (пояснение для знатоков:  $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$  и  $\mathbb{C}P^2 \# (-\mathbb{C}P^2)$  не гомеоморфны).

Для независимости от способа приклейки нужна «симметричность» приклеиваемого объекта. Для приклеивания ручки независимость следует из утверждения 5.8.2 (b) (или 5.8.2 (c) или 5.5.2.h), а для приклеивания пленки Мёбиуса — из утверждения 5.8.3 или 5.5.2.g.

**5.8.2.** (a) Прямоугольник, на противоположных сторонах которого заданы «согласованные» направления, гомеоморфен прямоугольнику, на противоположных сторонах которого заданы противоположные «согласованные» направления. Или, формально, существуют измельчение  $K$  гиперграфа с вершинами 1, 2, 3, 4 и гранями  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$  и изоморфизм  $K \rightarrow K$ , переводящий 1, 2, 3, 4 в 2, 1, 4, 3 соответственно.

(b) Кольцо, на краевых окружностях которого заданы «согласованные» направления, гомеоморфно кольцу, на краевых окружностях которого заданы противоположные «согласованные» направления.

(с) Тор с дыркой, на краевой окружности которого задано направление, гомеоморфен тору с дыркой, на краевой окружности которого задано противоположное направление.

**5.8.3.** Лента Мёбиуса, на краевой окружности которой задано направление, гомеоморфна ленте Мёбиуса, на краевой окружности которой задано противоположное направление.

### 5.9. Регулярные окрестности и клеточные подграфы

В качестве *регулярной окрестности* подграфа в гиперграфе можно взять объединение  $U$  шапочек и ленточек, соответствующих вершинам и ребрам подграфа, т.е. объединение граней второго барицентрического подразделения гиперграфа, пересекающих подграф. Приведем более общее определение.

A hypergraph  $L$  is obtained from a hypergraph  $K$  by an *elementary collapse* (элементарным сдавливанием), if  $K = L \cup \sigma$  and  $L \cap \sigma = \partial\sigma - \text{Int } \tau$  for some faces  $\sigma, \tau$  of  $K$  such that  $\tau \subset \partial\sigma$ . A hypergraph  $K$  collapses to  $L$  (notation:  $K \searrow L$ ) if there exists a sequence of elementary collapses  $K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_n = L$ . A hypergraph  $K$  is *collapsible*, if it collapses to a point.

A **regular neighborhood** of a subhypergraph  $A$  in a hypergraph  $K$  is a subhypergraph of some subdivision of  $K$  which contains  $A$  and collapses to  $A$ .

**5.9.1.** (a) The cone of any graph is collapsible.

(b) Construct three hypergraphs none of which collapses to a hypergraph homeomorphic to any other.

(c) Эйлерова характеристика не меняется при сдавливании.

(d) Эйлеровы характеристики подграфа и его регулярной окрестности в 2-гиперграфе равны.

(e) Объединение  $U$  действительно является регулярной окрестностью.

*Дополнение*  $G - H$  в графике  $G$  до набора вершин  $H$  образовано всеми вершинами графа  $G$ , не лежащими в  $H$ , и всеми ребрами графа  $G$ , ни один конец которых не лежит в  $H$ .

Пусть  $G$  — подграф гиперграфа  $K$  (т. е. подграф графа, образованного всеми вершинами и ребрами гиперграфа  $K$ ). *Дополнение*

$K - G$  образовано всеми гранями гиперграфа  $K$ , не пересекающими  $G$ .

Следующие определения формализуют конструкцию склейки гиперграфа из квадрата (рис. 2.1.1) или из многоугольника.

Набор вершин в графе называется (топологически) **клеточным**, если каждый связный кусок дополнения тела графа до тела набора вершин гомеоморфен (топологически) открытому отрезку. Мы будем использовать следующее (эквивалентное) комбинаторное определение. Набор  $H$  вершин в графе  $G$  называется **клеточным**, если каждая связная компонента дополнения  $G'' - H$  является путем, каждый из концов которого лежит в ребре графа  $G''$ , содержащем одну из вершин набора  $H$ .

Подграф в гиперграфе называется (топологически) **клеточным**, если каждый связный кусок дополнения тела гиперграфа до тела подграфа гомеоморфен (топологически) открытому диску. Мы будем использовать следующее (эквивалентное) комбинаторное определение. Подграф  $G$  в гиперграфе  $K$  называется **клеточным**, если каждая связная компонента  $C$  дополнения  $K'' - G''$  гомеоморфна диску,<sup>15</sup> каждое ребро границы которого лежит в грани гиперграфа  $K''$ , пересекающей  $G$ . Например,

- точка в сфере клеточна, а в торе — нет;
- объединение ребер гиперграфа клеточно.

**5.9.2. Формула Эйлера.** Если  $K$  — гиперграф и  $G \subset K$  — связный клеточный подграф с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами, то  $V - E + F = \chi(K)$ , где  $F$  — количество связных кусков дополнения  $K' - G'$ .

Эта формула следует из формулы включений-исключений (задача 5.5.4.a), ибо  $\chi(D^2) = 1$ .

**5.9.3.** (a) Если связный граф вложим в сферу с  $g$  ручками, то он гомеоморфен некоторому клеточному подграфу сферы с не более чем  $g$  ручками.

(b) То же для сферы с пленками Мёбиуса.

---

<sup>15</sup>Во многих применениях клеточности условие гомеоморфности диску можно заменить на более слабое проще проверяемое условие  $\chi(C) = 1$ . Если компонента  $C$  локально евклидова, то клеточность эквивалентна и этому условию, и тому, что компонента  $C$  разбивается любой ломаной с концами на границе компоненты.

## § 6. Гомологии двумерных многообразий

I should say it meant something simple and obvious, but then I am no philosopher!

I. Murdoch. The Sea, the Sea<sup>16</sup>

### 6.1. Критерий ориентируемости

Определения кусочно линейного 2-многообразия и его триангуляции приведены в пп. 5.3, 5.6. Определения гладкого 2-многообразия и его триангуляции приведены в п. 4.5. В этом параграфе можно пользоваться любым из двух подходов. Однако кое-где аккуратное изложение приведено только на кусочно линейном языке.

Определение ориентируемости триангуляции дается в п. 5.7. Существует красивый и простой критерий ориентируемости: «не содержит ленты Мёбиуса» (четкая формулировка на кусочно линейном языке приведена в задаче 5.7.3 (а)). Существует следующий простой алгоритм распознавания ориентируемости. Достаточно проверить ориентируемость каждой компоненты связности. Сначала ориентируем произвольно одну грань компоненты. Затем на каждом шаге будем ориентировать грань, соседнюю с некоторой уже ориентированной, пока не ориентируем все грани компоненты или не получим несогласованности ориентаций вдоль некоторого ребра.

В этом параграфе мы приведем алгебраический критерий ориентируемости, который по сути является лишь переформулировкой определения ориентируемости на алгебраическом языке. Но он важен не сам по себе, а как иллюстрация теории препятствий. Кроме того, похожие соображения позволяют получить утверждение 6.1.2 (б) и применяются для *классификации утолщений* [Sk]. Ср. с п. 6.8, 4.11.

---

<sup>16</sup>Должен бы сказать, что это означает нечто простое и очевидное, однако я не философ! (А. Мэрдок. Море, море. Пер. автора.)

**Теорема 6.1.1** (об ориентируемости). 2-многообразие  $N$  ориентируемо тогда и только тогда, когда его первый класс Штифеля—Уитни  $w_1(N) \in H_1(N, \partial)$  нулевой.

Группа  $H_1(N, \partial)$  и класс  $w_1(N)$  определены позже. Они естественно возникают и строго определяются в процессе *придумывания* теоремы об ориентируемости, к которому мы перейдем в п. 6.2. Вычисления группы  $H_1(N)$  приведены в п. 6.4.

В этом параграфе слово «группа» можно рассматривать как синоним слова «множество» (кроме задач 6.2.3, 6.5.3 и п. 6.7). Приводимые построения останутся интересными.

**6.1.2.** (a) Нарисуйте замкнутую несамопересекающуюся кривую на диске с тремя лентами Мёбиуса, дополнение до которой ориентируемо.

(b) На любом замкнутом связном 2-многообразии найдется замкнутая несамопересекающаяся кривая, дополнение до которой ориентируемо. (Вот строгая формулировка. Для любой замкнутой триангуляции 2-многообразия найдется подграф в некоторой гомеоморфной триангуляции  $T$ , гомеоморфный окружности, дополнение до образа которого во втором барицентрическом подразбиении триангуляции  $T$ , см. п. 5.9, ориентируемо.)

## 6.2. Препятствующий 1-цикл

В этом параграфе  $T$  — триангуляция 2-многообразия  $N$ , а  $o$  — набор ориентаций на ее гранях.

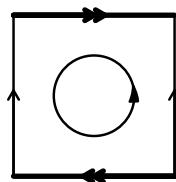


Рис. 6.2.1. Набор  $o$  ориентаций и препятствующий цикл  $\omega(o)$

Покрасим ребро триангуляции  $T$  в красный цвет, если к этому ребру примыкают две грани, ориентации которых *не согласованы* вдоль этого ребра (т. е. задают на этом ребре одинаковые направления, рис. 5.7.1). Множество красных ребер называется **препятствующим 1-циклом**  $\omega(o)$ .

**6.2.1.** (a) Возьмем триангуляцию квадрата, дающую триангуляцию бутылки Клейна (при представлении бутылка Клейна в виде склейки сторон квадрата). См. рис. 6.2.1, где сама триангуляция не нарисована. Возьмем набор  $o$  ориентаций граней, согласованный вдоль каждого внутреннего ребра. Тогда препятствующий 1-цикл состоит из горизонтального ребра (жирные линии).

(b) Возьмем триангуляцию квадрата, дающую триангуляцию ленты Мёбиуса. См. третью колонку на рис. 2.1.1, где сама триангуляция не нарисована. Возьмем набор  $o$  ориентаций граней, согласованный вдоль каждого внутреннего ребра. Найдите препятствующий 1-цикл.

(c) То же для проективной плоскости (шестая колонка на рис. 2.1.1).

**6.2.2.** (a) Набор  $o$  ориентаций граней определяет ориентацию триангуляции тогда и только тогда, когда  $\omega(o) = \emptyset$ .

(b) Если 2-многообразие замкнуто, то из каждой вершины выходит четное число ребер препятствующего 1-цикла.

(c) Дополнение до препятствующего 1-цикла  $\omega(o)$  (или, формально, объединение граней второго барицентрического подразбиения, не пересекающих  $\omega(o)$ ) ориентируемо.

(d) Для любой замкнутой триангуляции 2-многообразия на всех (двумерных) гранях ее барицентрического подразбиения можно ввести такой набор ориентаций, что ориентации любых двух соседних граней будут не согласованы.

Назовем **1-циклом** (подробнее: одномерным симплициальным циклом по модулю 2) в графе множество  $C$  ребер такое, что каждая вершина принадлежит четному числу ребер из  $C$ . Например, цикл в смысле теории графов — это 1-цикл, но не наоборот. Например, в окружности два 1-цикла, в графе «восьмерка» — четыре, а в графе  $K_4$  — восемь (последнее не так очевидно).

Множества, состоящие из ребер данного графа, можно складывать (по модулю 2, т. е. брать симметрическую разность). *Группой гомологий*  $H_1(G)$  графа  $G$  (одномерной, по модулю 2) называется группа всех 1-циклов в графе  $G$  (это осмыслено ввиду утверждения 6.2.3.a).

**6.2.3.** (a) Сумма 1-циклов есть 1-цикл.

- (b) Группы гомологий гомеоморфных графов изоморфны.
- (c) Для связного графа  $G$  с  $V$  вершинами и  $E$  ребрами имеем  $H_1(G) \cong \mathbb{Z}_2^{E-V+1}$ .
- (d) Несамопересекающиеся циклы в графе  $G$  порождают  $H_1(G)$ .

*Указание к 6.2.1 (b), 6.4.1 (c), 6.5.3, 6.5.4 (a), 6.6.2, 6.7.1 (d).*  
См. фотографии в [Sk20].

*Указание к 6.2.2.* (d) Занумеруем вершины каждой грани барицентрического подразбиения размерностью симплекса (т. е. вершины, ребра или грани) исходного разбиения, соответствующего этой вершине. Полученная нумерация вершин барицентрического подразбиения задает нужный набор ориентаций его граней.

*Указание к 6.2.3.* См. [MNS, §1.3].

(b) Это достаточно доказать для случая, когда один граф получается из другого подразделением ребра.

(c) Осторожно! Из одного только равенства  $|H_1(G)| = 2^{E-V+1}$  изоморфность не следует, надо воспользоваться еще и тем, что сумма любого 1-цикла с собой равна нулю.

### 6.3. Гомологичность 1-циклов

Если препятствующий 1-цикл  $\omega(o)$  непуст, то  $o$  не определяет ориентацию триангуляции  $T$ . Но еще не все потеряно: можно попытаться изменить  $o$  так, чтобы препятствующий 1-цикл стал пустым. Для этого выясним, как  $\omega(o)$  зависит от  $o$ .

Назовем (гомологической) **границей** да грани  $a$  гиперграфа набор ребер геометрической границы этой грани. Назовем **границей** сумму границ нескольких граней.

**6.3.1.** (a) Граница является 1-циклом.

(b) Если 2-многообразие замкнуто, то при изменении ориентации граней  $a_1, \dots, a_k$  препятствующий 1-цикл  $\omega(o)$  изменяется на сумму границ этих граней. Т.е. для полученного набора  $o'$  ориентаций имеем

$$\omega(o') - \omega(o) = \partial a_1 + \dots + \partial a_k.$$

(b') Верен ли аналог п. (a) для 2-многообразий с непустым краем?

(c) Если  $\omega(o)$  является границей, то  $T$  ориентируема (т.е. существует набор  $o'$  ориентаций такой, что  $\omega(o') = \emptyset$ ).

Назовем 1-циклы **гомологичными** (или *сравнимыми по модулю границ*), если их разность есть граница. На этом языке утверждение 6.3.1.b означает, что *при изменении набора ориентаций препятствующий 1-цикл заменяется на гомологичный 1-цикл*.

**Утверждение 6.3.2.** *Триангуляция замкнутого 2-многообразия ориентируема тогда и только тогда, когда некоторый (или, что эквивалентно, любой) ее препятствующий 1-цикл гомологичен пустому 1-циклу.*

**6.3.3.** Гомологичность является отношением эквивалентности на множестве 1-циклов.

**6.3.4.** (a) Краевая окружность ленты Мёбиуса гомологична пустому 1-циклу.

(b) Краевые окружности на торе с двумя дырками гомологичны.

**6.3.5.** Любые два 1-цикла гомологичны для

(a) полного гиперграфа с 9 вершинами; (b) сферы;

(c) *шутовского колпака Зимана*; он получается такой склейкой сторон треугольника  $ABC$ , при которой стороны склеиваются с направлениями  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .

**6.3.6.** (a) Срединная окружность ленты Мебиуса не гомологична пустому 1-циклу.

(b) Меридиан тора не гомологичен пустому 1-циклу.

(c) Меридиан тора не гомологичен его параллели.

**6.3.7.** (a) Простой цикл в триангуляции замкнутого 2-многообразия гомологичен нулю тогда и только тогда, когда он разбивает 2-многообразие.

(b) Любой 1-цикл в связной триангуляции 2-многообразия гомологичен некоторой замкнутой несамопересекающейся ломаной в некотором подразбиении этой триангуляции.

(c) Верно ли то же для произвольного связного гиперграфа?

*Указание к 6.3.1. (c)* Пусть  $\omega(o) = \partial a_1 + \dots + \partial a_s$ . Возьмем набор  $o'$  ориентаций граней, отличающийся от  $o$  в точности на гранях  $a_1, \dots, a_s$ . Тогда по п. (b) получим  $\omega(o') = 0$ .

*Указание к 6.3.2.* По утверждению 6.3.1 (b) условие необходимо для ориентируемости.

Обратно, пусть для некоторого набора  $o$  ориентаций граней препятствующий цикл  $\omega(o)$  гомологичен пустому циклу. Значит, препятствующий цикл является границей. Тогда по утверждению 6.3.1 (c) триангуляция ориентируема.

*Указание к 6.3.4.* See Assertion 6.5.2.b.

## 6.4. Гомологии и первый класс Штифеля—Уитни

Напомним определения, мотивированно введенные в предыдущих пунктах. **1-Циклом** в гиперграфе называется множество его ребер, для которого из каждой вершины выходит четное число ребер набора. **Границей** *да* грани  $a$  гиперграфа называется набор всех ребер геометрической границы этой грани. Два цикла называются **гомологичными**, если их разность есть сумма границ нескольких граней.

**Группой гомологий**  $H_1(K)$  (одномерной с коэффициентами  $\mathbb{Z}_2$ ) гиперграфа  $K$  называется группа 1-циклов с точностью до гомологичности.

The homology group appears in solutions of specific problems (e.g. in checking orientability, see §6.2-§6.3). It is important that the homology group is defined in a short way regardless of the problems, and for arbitrary hypergraphs.

**6.4.1.** (a) В множестве  $H_1(K)$  корректно определена операция суммы формулой  $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$ .

(b) Множество  $H_1(K)$  с этой операцией является группой.

(c) Группы гомологий гомеоморфных гиперграфов изоморфны. Более точно, если гиперграф  $K$  получен из гиперграфа  $L$  операцией подразделения ребра, то естественно определяемый гомоморфизм  $H_1(L) \rightarrow H_1(K)$  является изоморфизмом.

Понятие клеточного разбиения гиперграфа формализует примеры «склейки из многоугольников» из примера 5.1.1.c. **Клеточным разбиением** гиперграфа  $K$  называется пара  $K_0 \subset K_1 \subset K$  его подгиперграфов, для которой  $K_1$  — клеточный граф в  $K$  и  $K_0$  — клеточный набор вершин в  $K_1$  (см. определения в п. 5.9). Граф  $K_1$  называется *одномерным остовом* клеточного разбиения. *Ребром* и *гранью*

клеточного разбиения  $K_0 \subset K_1 \subset K$  называются связная компонента дополнения  $K''_1 - K_0$  и связная компонента дополнения  $K'' - K''_1$  соответственно.

Многие построения удобно проделывать не для гиперграфов, а для клеточных разбиений, ибо у «интересных» гиперграфов «много» граней, но можно найти их «экономные» клеточные разбиения. Для вычислений удобнее рисовать клеточные разбиения, что менее громоздко, чем разбиения на многоугольники. Триангуляция является частным случаем клеточного разбиения. Другие примеры фактически нарисованы на рис. 2.1.1.

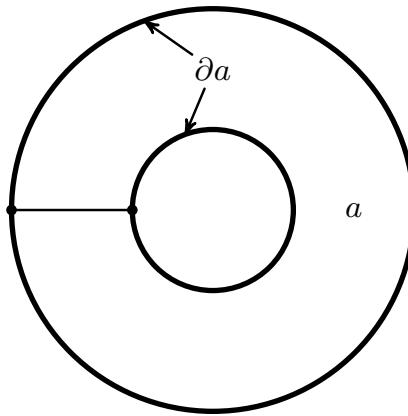


Рис. 6.4.1. Гомологическая (алгебраическая) граница сложной грани

*Группа гомологий*  $H_1(T)$  (одномерная с коэффициентами  $\mathbb{Z}_2$ ) клеточного разбиения  $T$  некоторого гиперграфа определяется аналогично. При этом для определение границы грани клеточного разбиения более сложное. Назовем (гомологической) **границей** *да* грани *a* набор всех тех ребер геометрической границы этой грани, к которым грань примыкает с нечетного числа сторон (рис. 6.4.1).

**6.4.2.** Для вышерассмотренных клеточных разбиений на один многоугольник сферы, тора, проективной плоскости, бутылки Клейна (рис. 2.1.1 и 6.2.1) число элементов группы  $H_1(T)$  равно 1, 4, 2, 4 соответственно.

**6.4.3. (а)** Любой цикл в гиперграфе гомологичен некоторому циклу в произвольном клеточном графе в этом гиперграфе.

(b) Если два цикла в клеточном разбиении гиперграфа гомологичны в гиперграфе, то они гомологичны и в этом клеточном разбиении.

(c) Для клеточного разбиения  $T$  гиперграфа  $K$  имеем  $H_1(T) \cong H_1(K)$ .

*Hint.* (a) Утверждение следует из того, что для любого цикла в гиперграфе грани гиперграфа можно так раскрасить в два цвета, чтобы

- при переходе через ребро цикла, не лежащее на ребре разбиения, цвет менялся;
- при переходе через ребро, не лежащее ни на цикле, ни на ребре разбиения, цвет сохранялся.

(b) Разность в гиперграфе между циклами разбиения есть сумма границ некоторых граней разбиения.

(c) Вытекает из (a,b).

*Группой гомологий*  $H_1(N)$  (одномерной с коэффициентами  $\mathbb{Z}_2$ ) 2-многообразия  $N$  называется группа  $H_1(T)$  любой его триангуляции  $T$  (или даже любого клеточного разбиения  $T$  некоторой его триангуляции). Это определение корректно ввиду утверждения 6.4.1 (c) (и 6.4.3 (c)).

**Первым классом Штифеля—Уитни** клеточного разбиения  $T$  замкнутой триангуляции 2-многообразия называется класс гомологичности препятствующего цикла:

$$w_1(T) := [\omega(o)] \in H_1(T).$$

Это определение корректно ввиду утверждения 6.3.1 (b).

*Первым классом Штифеля—Уитни* замкнутого 2-многообразия  $N$  называется первый класс Штифеля—Уитни любой триангуляции  $T$  2-многообразия  $N$  (или даже любого клеточного разбиения  $T$  некоторой триангуляции)  $w_1(N) := w_1(T)$ . Это определение корректно в следующем смысле (см. также утверждение 6.4.3 (c)).

**6.4.4.** Отображение из утверждения 6.4.1 (c) переводит  $w_1(L)$  в  $w_1(K)$ .

Теорема 6.1.1 об ориентируемости является переформулировкой утверждения 6.3.2.

## 6.5. Вычисления и свойства группы гомологий

В рассуждениях с классами гомологичности циклов удобно сначала работать с представляющими их циклами, а потом доказывать независимость от выбора представляющих циклов.

**6.5.1.** Найдите группу гомологий и нарисуйте кривые, образующие ее базис, для (любой триангуляции)

- (a) сферы с  $g$  ручками;
- (b) сферы с  $g$  ручками и  $h$  дырками;
- (c) сферы с  $t$  пленками Мёбиуса;
- (d) сферы с  $t$  пленками Мёбиуса и  $h$  дырками.

**6.5.2.** (a) Сумма границ всех граней замкнутой триангуляции 2-многообразия пуста.

(b) Сумма границ всех граней триангуляции 2-многообразия равна сумме краевых окружностей.

(c) Сумма границ любого собственного подмножества множества всех граней связной замкнутой триангуляции 2-многообразия непуста.

**6.5.3.** Если  $T$  есть триангуляция связного замкнутого 2-многообразия, то  $H_1(T) \cong \mathbb{Z}_2^{2-\chi(T)}$ .

**6.5.4.** (a) Если  $M$  и  $N$  — связные замкнутые 2-многообразия, то  $H_1(M \# N) \cong H_1(M) \oplus H_1(N)$  (операция  $\#$  связной суммы определяется аналогично рис. 5.5.1).

(b) Верна ли эта формула для связных незамкнутых 2-многообразий  $M$  и  $N$ ?

**6.5.5.** (a) Для любых гиперграфов  $K$  и  $L$ , имеющих не более одной общей точки,  $H_1(K \cup L) \cong H_1(K) \oplus H_1(L)$ .

(b) Верна ли эта формула, если общих точек две?

**6.5.6.** (a) Для любого связного графа  $K$  имеем

$$H_1(K \times I) \cong H_1(K) \quad \text{и} \quad H_1(K \times S^1) \cong H_1(K) \oplus \mathbb{Z}_2.$$

(Определения произведений графа на отрезок и на окружность придумайте сами или посмотрите в [Sk, п. 6.16 «Декартово произведение»].)

(b) Группа  $H_1(K)$  не меняется при сдавливании. (См. определение в п. 5.9. Hence the group  $H_1(K)$  is not changed by passing to the regular neighborhood.)

## § 8. Векторные поля на многомерных многообразиях

Основные результаты этого параграфа сформулированы в п. 8.1 и 8.7. В п. 8.7 используются определения, введенные в начале п. 8.6.  
Обозначим

$$D^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \quad \text{и}$$
$$S^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

В этом параграфе те, кому трудно работать сразу со случаем  $n > 3$ , могут считать, что  $n = 3$  — даже этот случай очень интересен.

### 8.1. Векторные поля в евклидовом пространстве

Определения векторных полей (произвольных, ненулевых и единичных) на подмножестве  $N \subset \mathbb{R}^n$  и их гомотопности аналогичны случаю  $n = 2$  (п. 3.3 и 3.4). Определение гомотопности отображений приведено в п. 3.7.

**8.1.1.** (a) Любое ненулевое векторное поле  $v$  на  $\mathbb{R}^{2k}$  гомотопно полю  $-v$ .

(b) Радиальное векторное поле на  $S^{2k-1}$  гомотопно центрально-му.

**8.1.2.** Сформулируйте и докажите аналоги задач 3.4.4 (а—е), 3.4.5 (а, с), 3.4.6 (б), 3.4.7 (а, б) и 3.7.2 (б, с, д, е) для векторных полей на  $\mathbb{R}^n$  и отображений в  $S^{n-1}$ .

**8.1.3.** Следующие утверждения эквивалентны. (В этой задаче требуется именно доказать эквивалентность, доказывать сами утверждения не требуется.)

(1) **Теорема Брауэра о неподвижной точке.** *Любое отображение  $f: D^n \rightarrow D^n$  шара в себя имеет неподвижную точку, т. е. такую точку  $x \in D^n$ , что  $f(x) = x$ .*

(2) **Несминаемость шара на граничную сферу.** *Не существует отображения шара в его граничную сферу, тождественно-*

го на этой сфере, т. е. отображения  $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ , для которого  $f(x) = x$  для любого  $x \in S^{n-1}$ .

(3) *Тождественное отображение сферы  $S^{n-1}$  не гомотопно по-стоянному (т. е. отображению в точку).*

Эти результаты можно доказать при помощи многомерного аналога леммы Шпернера 3.6.1 (Sp) и кусочно линейной аппроксимации (см. задачу 8.2.2). Мы приведем похожее (но более сложное) доказательство при помощи *степени модулю 2 отображения*, введенной Лейтзеном Эгбертом Яном Брауэром в 1911 г. Важное понятие степени отображения понадобится далее. Более конкретно, утверждение (3) вытекает из задач 8.3.5 (a,b), 8.3.6 (d) и 8.3.7 (c,d).

**Теорема 8.1.4.** *Шары  $D^n$  и  $D^k$  не гомеоморфны при  $n \neq k$ .*

Выполните эту теорему из теорем 8.1.3 (3) и 8.1.5 (a).

**Теорема 8.1.5.** (a) *Для любых  $k < n$  любое отображение  $S^k \rightarrow S^n$  гомотопно отображению в точку.*

(b) *Для любого  $n \geq 2$  любое отображение  $S^n \rightarrow S^1$  гомотопно отображению в точку.*

Доказательство части (b) аналогично теореме 3.1.9 (b) (задача 3.11.4). Доказательство части (a) основано на кусочно линейной (или гладкой) аппроксимации и аналогично доказательству теоремы 3.1.9 (a) (задача 3.9.5). Более конкретно, часть (a) вытекает из результата задачи 8.2.2.

**Теорема 8.1.6** (Борсуга-Улама). *Для любого отображения  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  существует такое  $x \in S^d$ , что  $f(x) = f(-x)$ .*

У этой теоремы имеется много эквивалентных формулировок, см. теорему 8.1.7 и [Ma03]. The equivalence of the following assertions to each other and to Theorem 8.1.6 is simple.

A map  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  is called *odd*, or *equivariant*, or *antipodal* if  $f(-x) = -f(x)$  for any  $x \in S^n$ .

**Теорема 8.1.7** (Borsuk-Ulam). (a) *For any equivariant map  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  there exists  $x \in S^d$  such that  $f(x) = 0$ .*

(b) *There are no equivariant maps  $S^d \rightarrow S^{d-1}$ .*

(c) *No equivariant map  $S^{d-1} \rightarrow S^{d-1}$  extends to  $D^d$ .*

(d) *If  $S^d$  is the union of  $d+1$  closed sets (or  $d+1$  open sets), then one of the sets contains opposite points.*

Part (c) follows by Assertions 8.3.7 (d) and 8.3.8.f. A simple proof of the latter is sketched by Assertions 8.3.8.b-e (this slightly simplifies the proof from [BSS] and [Ma03, pp. 153-154]).<sup>17</sup>

Определение касательного векторного поля на  $S^n$  аналогично случаю  $n = 2$  (п. 4.1).

**Теорема 8.1.8** (Хопф). (а) *На  $S^n$  существует ненулевое касательное векторное поле тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно.*

(б) *Тождественное отображение сферы  $S^n$  гомотопно антиподальному тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно.*

Для нечетного  $n$  это доказывается заданием поля и гомотопии явной формулой. Для четного  $n$  часть (а) вытекает из (б), а часть (б) вытекает из результатов задач 8.4.3.c и 8.4.6.d (i.e., is proved using the *degree*; here the degree modulo 2 is not sufficient!).

## 8.2. Кусочно линейная аппроксимация

Обозначим через

$$S_{PL}^n := \partial I^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \max(|x_1|, \dots, |x_{n+1}|) = 1\}$$

поверхность  $(n + 1)$ -мерного куба (или, более ученуо, стандартную кусочно линейную сферу). Обозначим через  $\pi: S^n \rightarrow S_{PL}^n$  центральную проекцию с центром в начале координат.

*Триангуляцией* сферы  $S_{PL}^n$  называется ее разбиение на конечное число  $n$ -мерных симплексов, любые два из которых пересекаются по симплексу размерности менее  $n$  (в частности, могут не пересекаться). Отображение  $S_{PL}^k \rightarrow S_{PL}^n$  называется **кусочно линейным**, если оно линейно на каждом симплексе некоторой триангуляции сферы<sup>18</sup>  $S_{PL}^k$ .

<sup>17</sup> For other proofs of Theorems 8.1.6, 8.1.7 and Assertion 8.3.8.f see §3 (for  $d = 2$ ), [Ma03, §2], and the references therein. E.g. Theorem 8.1.7.a can be deduced from its following ‘quantitative version’.

If  $0 \in \mathbb{R}^d$  is a regular point of a (PL or smooth) equivariant map  $f: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , then  $|f^{-1}(0)| \equiv 2 \pmod{4}$ .

See the definition of a regular point e.g. in §8.3. This quantitative version is proved analogously to [Sk, Lemmas 1.4.3 and 2.2.3]: calculate  $|f^{-1}(0)|$  for a specific  $f$  and prove that  $|f^{-1}(0)|$  modulo 4 is independent of  $f$ . Realization of this simple idea is technical, see [Ma03, §2.2].

<sup>18</sup> Вместо рассмотрения сферы  $S_{PL}^n$  можно было бы определить триангуляции и кусочно линейные отображения для  $S^n$ .

**8.2.1.** Какие из следующих отображений  $S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$  являются кусочно линейными:

- (a) постоянное;
- (b) тождественное;
- (c) антиподальное (т. е. центральная симметрия с центром в начале координат);
- (d) сужение на  $S_{PL}^n$  движения  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ;
- (e) центральная проекция из точки  $(1/2, \dots, 1/2)$ ;
- (f) отображение  $S_{PL}^2 \rightarrow S_{PL}^2$ , заданное формулой  $(x, y, z) \mapsto (z^2, x, y)$ ;
- (g)  $\pi(\Sigma w_k)\pi^{-1}$  для  $k$ -кратной намотки  $w_k: S^1 \rightarrow S^1$  (см. определение надстройки  $\Sigma g$  ниже)?

Надстройкой  $\Sigma g$  над отображением  $g: S^1 \rightarrow S^1$  является отображение  $f: S^2 \rightarrow S^2$ , определенное формулой

$$f(\cos \alpha \cos \theta, \cos \alpha \sin \theta, \sin \alpha) := (g(\cos \theta, \sin \theta) \cos \alpha, \sin \alpha).$$

**8.2.2.** (а—е) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений 3.11.4 для отображений  $S^k \rightarrow S^n$ ,  $k < n$ .

### 8.3. Степень по модулю 2 отображения

Приводимые здесь построения интересны даже для  $n = 1$  (начните решать предложенные ниже задачи с этого случая — там, где он осмыслен). При этом для  $n = 1$  они отличаются от приведенных в п. 3.8; см. утверждение 8.4.7.

В этом и следующем пунктах  $g: S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$  — кусочно линейное отображение, and we use a triangulation of  $S_{PL}^n$  such that  $g$  is linear on every simplex of the triangulation.

**Регулярным значением** отображения  $g$  называется любая точка в  $S_{PL}^n$ , не лежащая в объединении  $g$ -образов  $(n - 1)$ -мерных граней триангуляции. Ясно, что такая точка существует. Регулярное значение можно назвать значением «общего положения», или «случайным» значением.

**8.3.1.** (а—д) Найдите регулярное значение для каждого из отображений  $S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$ , определенных в задаче 8.2.1 (а—д).

**8.3.2.** Для любого регулярного значения  $y$  множество  $g^{-1}(y)$  конечно.

**Степенью по модулю 2**  $\deg_2 g$  отображения  $g$  называется четность количества  $g$ -прообразов регулярного значения  $y$ .

**8.3.3.** Степень по модулю 2 PL отображения  $g$  определена корректно, т.е. не зависит от выбора регулярного значения  $y$ .

This follows from утверждения 8.3.6.d.

Для любого отображения  $f: S^n \rightarrow S^n$  ввиду результата задачи 8.2.2 (e) существует кусочно линейное отображение  $g: S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$ , гомотопное отображению  $\pi f \pi^{-1}$ . **Степенью по модулю 2** отображения  $f$  называется  $\deg_2 f := \deg_2 g$ .

**8.3.4.** Степень по модулю 2 отображения  $f$  определена корректно, т.е. не зависит от выбора отображения  $g$ .

This follows from утверждений 8.3.7.abc.

**8.3.5.** Предполагая утверждения 8.3.3 и 8.3.4, найдите степень по модулю 2

(a—g) отображений  $S^n \rightarrow S^n$ , аналогичных определенным в задаче 8.2.1.

(2, 3, 4) «возведения в  $d$ -ю степень»  $S^n \rightarrow S^n$ , для  $S^2 = \mathbb{C}P^1$ ,  $S^3 \subset \mathbb{H}$  и  $S^4 = \mathbb{H}P^1$ . (Здесь гладкая формализация из сноски 19 удобнее кусочно линейной.)

**8.3.6.** Пусть  $y_0, y_1$  — регулярные значения отображения  $g$ . Соединим  $y_0$  с  $y_1$  несамопересекающейся ломаной  $l \subset S_{PL}^n$ ,

- не пересекающей никакой  $(n - 2)$ -мерный  $g$ -образ симплекса триангуляции;

- пересекающей каждый  $(n - 1)$ -мерный  $g$ -образ симплекса триангуляции не более чем в одной точке, и если в одной, то малые части ломаной  $l$  по две стороны от этой точки лежат по разные стороны от этого  $g$ -образа;

- пересекающей каждый  $n$ -мерный  $g$ -образ симплекса триангуляции по пустому множеству или отрезку.

(Такая ломаная называется *регулярным путем* отображения  $g$ .)

(a) The preimage  $g^{-1}(l)$  is the union of its intersections with  $n$ -simplices of the triangulation.

(b) Every such non-empty intersection is a segment.

(c) Every non-empty intersection of  $g^{-1}(l)$  with an  $(n - 1)$ -simplex is a point, which is the endpoint of exactly two of the above segments.

(d) Прообраз  $g^{-1}(l)$  есть объединение конечного числа попарно непересекающихся (замкнутых и незамкнутых) ломаных, множество концов которых есть  $g^{-1}\{y_0, y_1\}$ .

*Триангуляция цилиндра*  $S_{PL}^n \times I$  (и других подмножеств в  $\mathbb{R}^d$ ) определяется аналогично триангуляции сферы  $S^n$ . (Не для любого подмножества триангуляция существует.) Гомотопия  $S_{PL}^n \times I \rightarrow S_{PL}^n$  называется *кусочно линейной*, если она линейна на каждом симплексе некоторой триангуляции цилиндра  $S_{PL}^n \times I$ .

**8.3.7.** (a) Пусть гомотопия  $G: S_{PL}^n \times I \rightarrow S_{PL}^n$  линейна на каждом симплексе некоторой триангуляции цилиндра  $S_{PL}^n \times I$ . Возьмем точку  $y \in S_{PL}^n$ , не лежащую в объединении  $G$ -образов  $(n-1)$ -мерных симплексов триангуляции. (Такая точка называется *регулярным значением* гомотопии  $G$ .) Тогда  $G^{-1}(y)$  есть объединение конечного числа (замкнутых и незамкнутых) ломаных, множество концов которых есть  $G^{-1}(y) \cap S_{PL}^n \times \{0, 1\}$ .

(b) Для любых двух кусочно линейно гомотопных кусочно линейных отображений  $g, g': S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$  существует их общее регулярное значение  $y \in S_{PL}^n$ , для которого  $|g^{-1}(y)| \equiv |(g')^{-1}(y)| \pmod{2}$ .

(c) Если кусочно линейные отображения  $S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$  гомотопны, то они кусочно линейно гомотопны.

(d) Степени по модулю 2 гомотопных отображений равны.

**8.3.8.** Take an equivariant PL map  $f: S^k \rightarrow S^k$  such that  $f|_{S^{k-1}} = \text{id}$ . Let

$$D_\pm^k := \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^k : \pm x_{k+1} \geq 0\}.$$

Let  $f^+: S^k \rightarrow S^k$  be the ‘union’ of  $f$  on  $D_+^k$  and the identity on  $D_-^k$ . Let  $f^-: S^k \rightarrow S^k$  be the ‘union’ of  $f$  on  $D_-^k$  and the identity on  $D_+^k$ . Formally,

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D_+^k \\ x, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{and} \quad f^-(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D_-^k \\ x, & \text{иначе} \end{cases}.$$

- (a) Find  $\deg_2 f^+$  and  $\deg_2 f^-$  for the standard  $n$ -winding  $f: S^1 \rightarrow S^1$ ,  $n = 3, 5$ .
- (b)  $f^-(x) = -f^+(-x)$ .
- (c)  $\deg_2 f^+ = \deg_2 f^-$ .
- (d)  $\deg_2 f = \deg_2 f^+ + \deg_2 f^- + 1$ .

(e)  $\deg_2 f = 1$ .

(f) Степень любого нечетного отображения  $S^k \rightarrow S^k$  нечетна.

**Hints to 8.3.8.** (Это решение получено редактированием текста А. Мирошникова.)

(b) Так как  $-\text{id}$  и  $f$  нечетны, имеем  $-f^+(-x) = f(x) = f^-(x)$  для  $x \in D_-^k$ , и  $-f^+(-x) = -(-x) = x = f^-(x)$  иначе.

(c,d) Обозначим через  $y$  любое регулярное значение отображения  $f$ .

(c) По (b) имеем  $\deg_2 f^+ = |(f^+)^{-1}(y)|_2 = |(f^-)^{-1}(-y)|_2 = \deg_2 f^-$ .

(d) Для  $X \subset S^k$  обозначим  $X_\pm := |X \cap D_\pm^k|_2$ . Тогда

$$\deg_2 f = |f^{-1}(y)|_2 = f^{-1}(y)_+ + f^{-1}(y)_- =$$

$$= (f^{-1}(y)_+ + y_-) + (f^{-1}(y)_- + y_+) + 1 =$$

$$= |(f^+)^{-1}(y)|_2 + |(f^-)^{-1}(y)|_2 + 1 = \deg_2 f^+ + \deg_2 f^- + 1.$$

(e) Ввиду (c) и (d) имеем  $\deg_2 f = \deg_2 f^+ + \deg_2 f^- + 1 = 1$ .

## 8.4. Степень отображения

Знаком  $g$ -прообраза  $x$  регулярного значения  $y$  называется число  $+1$ , если ограничение  $g$  на симплекс триангуляции, содержащий точку  $x$ , сохраняет ориентацию, и число  $-1$ , если оно обращает ориентацию. **Степенью**  $\deg g$  отображения  $g$  называется сумма знаков  $g$ -прообразов регулярного значения  $y$ .

**8.4.1.** Степень PL отображения  $g$  определена корректно, т.е. не зависит от выбора регулярного значения  $y$ .

This follows from утверждения 8.4.5.

Для любого отображения  $f: S^n \rightarrow S^n$  по результату задачи 8.2.2 (e) существует кусочно линейное отображение  $g: S_{PL}^n \rightarrow S_{PL}^n$ , гомотопное отображению  $\pi f \pi^{-1}$ . **Степенью** отображения  $f$  называется  $\deg f := \deg g$ .<sup>19</sup>

<sup>19</sup> А вот определение через гладкую аппроксимацию. (Обоснования не доказанных здесь утверждений можно найти, например, в [Pr14, § 18.1].) Любое отображение  $f: S^n \rightarrow S^n$  гомотопно гладкому отображению  $h$ . Точка  $y \in S^n$  называется *регулярным значением* гладкого отображения  $h$ , если  $\text{rk } dh(x) = n$  для любой точки  $x \in g^{-1}(y)$  (здесь  $dh(x)$  — производная отображения  $h$  в точ-

**8.4.2.** Степень отображения  $f$  определена корректно, т.е. не зависит от выбора отображения  $g$ .

This follows from утверждений 8.3.7.c и 8.4.6.ab.

**8.4.3.** (a—g), (2, 3, 4) Solve the analogue of Problem 8.3.5 for the degree.

**8.4.4.** При любом  $d$  существует PL отображение  $g : S^n \rightarrow S^n$  степени  $d$ .

This is proved using the sum and the inverse element constructions (§14.4) or follows from утверждения 8.5.2 (b).

**8.4.5.** Under the assumptions of Problem 8.3.6 every non-closed polygonal line joins either two points of the same sign in  $g^{-1}(y_0)$  and in  $g^{-1}(y_1)$ , or two points of different signs in  $g^{-1}(y_0)$ , or two points of different signs in  $g^{-1}(y_1)$ .

In other words, for the ends  $u, v$  of every non-closed polygonal line we have  $gu = gv$  if and only if  $\operatorname{sgn} u \neq \operatorname{sgn} v$ .

*Hints.* State and prove analogous assertion for a linear map from the  $n$ -simplex onto the  $n$ -simplex. Возьмите «прообраз поля нормальных реперов» к регулярному пути. Он дает «поле нормальных реперов» на каждой незамкнутой ломаной  $l$ . Вместе с ориентацией сферы  $S_{PL}^n$  это поле дает ориентацию на  $l$ . Докажите, что для этой ориентации ломаная  $l$

- выходит либо из положительной точки на  $g^{-1}(y_0)$ , либо из отрицательной точки на  $g^{-1}(y_1)$  и
- входит либо в положительную точку на  $g^{-1}(y_1)$ , либо в отрицательную точку на  $g^{-1}(y_0)$ .

Alternatively, denote by  $y_0 = z_1, z_2, \dots, z_s = y_1$  consecutive vertices of  $l$ , and by  $x_1 \dots x_t$  consecutive vertices of a non-closed polygonal line which is a connected component of  $g^{-1}(l)$ . Define  $a_j$  by  $g(x_j) = y_{a_j}$ . Then  $a_j = a_{j-1} + \operatorname{sgn}_g \Delta_j$ , where  $\Delta_j$  is the simplex containing  $x_{j-1}x_j$ .

**8.4.6.** (a) Under the assumptions of Assertion 8.3.7.a every non-closed polygonal line joins either two points of the same sign in  $S_{PL}^n \times 0$

---

ке  $x$ ). Имеется регулярное значение  $y \in S^n$ . Тогда  $h^{-1}(y)$  есть конечное число точек. Назовем *знаком*  $h$ -прообраза  $x$  точки  $y$  число  $\operatorname{sgn} \det dh(x)$ . **Степенью**  $\deg f$  называется сумма знаков  $h$ -прообразов точки  $y$ .

## 8.6. Многомерные многообразия

Неформально говоря,  $n$ -мерным многообразием называется фигура, любая точка которой имеет малую окрестность, гомеоморфную  $n$ -мерному шару. Строгие определения  $n$ -мерных *гладких* (под)многообразий в  $\mathbb{R}^d$ , их края, их замкнутости, связности и ориентируемости, аналогичны случаю  $n = 2$  (п. 4.5). In this book manifolds are allowed to have non-empty boundary. We abbreviate ‘smooth manifolds’ to ‘manifolds’. Примерами многообразий являются шары, сферы и их декартовы произведения.

**8.6.1.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^m$  и  $N \subset \mathbb{R}^n$  — гладкие подмногообразия. Тогда  $M \times N \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  — гладкое многообразие.

Другие примеры естественно появляются далее. При этом изучаемые методы настолько сильны, что позволяют доказать красивые нетривиальные результаты про многообразия, формально не используя знакомства практически с никакими примерами (см., например, § 8.7, § 9.1).

*Если не оговорено противное, многообразия считаются компактными.*

- (b)  $SL(n, \mathbb{R}) = \{\text{вещественные } n \times n\text{-матрицы } A: \det A = 1\}$ ;
- (c)  $SO(n) = \{\text{вещественные } n \times n\text{-матрицы } A: AA^T = E, \det A = 1\}$ ,  
где  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (d)  $SU(2) = \{\text{комплексные } 2 \times 2\text{-матрицы } A: A\bar{A}^T = E\}$ ;
- (e)  $SO(1, 1) = \{\text{вещественные } 2 \times 2\text{-матрицы } A: AIA^T = I\}$ , где  
 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**8.6.5.** Let  $V$  and  $W$  be smooth  $k$ - and  $l$ -submanifolds of  $\mathbb{R}^n$  (or of a smooth  $n$ -manifold). They are (more precisely, the pair  $V, W$  is) called *transversal* if for any  $z \in V \cap W$  there exists a closed neighborhood  $Oz$  of  $z$  in  $\mathbb{R}^n$ , and a diffeomorphism  $\varphi: Oz \rightarrow [-1, 1]^n$  such that

$$\varphi(V \cap Oz) = [-1, 1]^k \times 0^{n-k} \quad \text{and} \quad \varphi(W \cap Oz) = 0^{n-l} \times [-1, 1]^l.$$

- (a) If  $V$  and  $W$  are transversal, then  $V \cap W$  is a smooth submanifold.
- (b) Immersions  $v: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  and  $w: W \rightarrow \mathbb{R}^d$  are (more precisely, the pair  $v, w$  is) called *transversal* if for any  $x \in V$  and  $y \in W$  such that  $v(x) = w(y)$  there exist closed neighborhoods  $O$  of  $v(x) = w(y)$  in  $\mathbb{R}^d$ ,  $Ox$  of  $x$  in  $V$ , and  $Oy$  of  $y$  in  $W$ , and a diffeomorphism  $\varphi: O \rightarrow [-1, 1]^d$  such that  $v|_{Ox}$  and  $w|_{Oy}$  are injective, and

$$\varphi(O \cap v(Ox)) = [-1, 1]^k \times 0^{d-k} \quad \text{and} \quad \varphi(O \cap w(Oy)) = 0^{d-l} \times [-1, 1]^l.$$

Is it correct that if  $v, w: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  are transversal immersions, then  $u^{-1}(v(S^2))$  is a 1-submanifold of  $S^2$ ?

- (c) If at every point of  $V \cap W$  the sum of the tangent spaces to  $V$  and to  $W$  is  $\mathbb{R}^n$ , then  $V \cap W$  is a smooth submanifold.
- (d) Under the assumption of (c)  $V$  and  $W$  are transversal.
- (e) Given three pairwise *tangent-transversal* submanifolds (in the sense of (c)), the sum of their normal spaces at any point of their triple intersection is the normal space to the triple intersection.

## 8.10. Векторные поля на трехмерной сфере

**8.10.1.** (a) Постройте три линейно независимых касательных векторных поля на  $S^3$ .

(b) Постройте биекцию  $V(S^3) \rightarrow \pi^2(S^3)$ .

В (a) задайте поля явной формулой (например, используя тот факт, что  $S^3$  есть группа единичных кватернионов). Биекция из п. (b) получается с помощью п. (a) (это справедливо и для задач 8.12.1, 8.12.2, 8.12.3).

Коэффициент зацепления lk определен, например, в [Sk, п. 4.3 «Коэффициент зацепления»].

**8.10.2.** (a) Разбейте дополнение трехмерного пространства до прямой на замкнутые ориентированные кривые, любые две из которых зацеплены с коэффициентом 1.

(b) Постройте отображение  $S^3 \rightarrow S^2$ , прообразы при котором любых двух различных точек — замкнутые кривые, зацепленные с коэффициентом  $\pm 1$ .

См. визуализацию в [Но] и построение после утверждения 8.10.3.

Определим

$$\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim,$$

где  $x \sim y$ , если  $x = \lambda y$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

**8.10.3.** (a) Имеем  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ .

(Это означает наличие непрерывного отображения  $f: \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow S^2$ , для которого  $f(x) = f(y)$  тогда и только тогда, когда  $x = \lambda y$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Определение гомеоморфности, приведенное перед задачей 3.1.7, неприменимо, поскольку  $\mathbb{C}P^1$  не задано как подмножество евклидова пространства.)

(b) Имеем  $\mathbb{C}P^n \cong S^{2n+1} / \sim$ , где  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  и  $x \sim y$ , если  $x = e^{i\varphi} y$  для некоторого  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

(Это означает наличие непрерывного отображения  $f: \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$  для которого  $f(x) = f(y)$  тогда и только тогда, когда  $x = \mu y$  для некоторого  $\mu > 0$ .)

(c) Задайте  $\mathbb{C}P^n$  как подмножество евклидова пространства.

Отождествим  $S^2$  с  $\mathbb{C}P^1$  (см. утверждение 8.10.3.a). Представим

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Определим **отображение Хопфа**  $\eta: S^3 \rightarrow S^2$  формулой

$$\eta(z_1, z_2) = (z_1 : z_2).$$

Ср. с утверждением 8.10.3.b.

**8.10.4.** (a) Для любого  $x \in S^2$  выполнено соотношение  $\eta^{-1}x \cong S^1$ .

(b) The preimages of the Hopf map are intersections of  $S^3$  with complex lines  $a_1z_1 + a_2z_2 = 0$ , where  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ .

(c) Имеем  $\mathbb{C}P^2 \cong D^4 / \sim$ , где  $x \sim y$ , если  $x, y \in S^3$  и  $\eta(x) = \eta(y)$ .

(Это означает наличие непрерывного отображения  $f: S^5 \rightarrow D^4$ , для которого  $x \sim y$  in the sense of Assertion 8.10.3.b тогда и только тогда, когда either  $f(x) \notin S^3$  and  $f(x) = f(y)$ , or  $f(x), f(y) \in S^3$  and  $\eta(f(x)) = \eta(f(y))$ .)

Подмножество  $A \subset X \subset \mathbb{R}^m$  называется **ретрактом** множества  $X$ , если существует отображение  $X \rightarrow A$ , тождественное на  $A$ .

**8.10.5.** (a) Подмножество  $\mathbb{R}P^1$  не является ретрактом множества  $\mathbb{R}P^2$ .

(b) Подмножество  $\mathbb{C}P^1$  не является ретрактом множества  $\mathbb{C}P^2$ .

Доказательство п. (b) основано на негомотопности отображению в точку отображения Хопфа. Для доказательства этой негомотопности необходимо следующее понятие.

**Инвариант Хопфа** отображения  $S^3 \rightarrow S^2$  называется коэффициент зацепления прообразов двух точек общего положения при гладкой (или кусочно линейной) аппроксимации данного отображения. Приведем детали этого определения. Любое отображение  $f: S^3 \rightarrow S^2$  гомотопно PL отображению  $g$ , i.e. to a map simplicial for some triangulations of  $S^3$  and  $S^2$ . Take two points  $y_1, y_2 \in S^2$  in the interiors of 2-faces of the triangulation of  $S^2$  (*regular values* of  $g$ ). Тогда  $g^{-1}y_i = S_{i1}^1 \sqcup S_{i2}^1 \sqcup \dots \sqcup S_{ik_i}^1$  есть PL *зацепление* (т. е. набор несамопересекающихся попарно непересекающихся замкнутых ломаных) для каждого  $i = 1, 2$ .<sup>20</sup> The orientations of  $S^2$  and  $S^3$  define

<sup>20</sup>Here are some details for a smooth approximation. Доказательства используемых утверждений можно найти, например, в [Pr14, §18.4]. Любое отображение  $f: S^3 \rightarrow S^2$  гомотопно гладкому отображению  $g$ . Точка  $y \in S^2$  называется его *регулярным значением*, если  $\text{rk } dg(x) = 2$  для любой точки  $x \in g^{-1}y$ . Имеются регулярные значения  $y_1, y_2 \in S^2$ . Тогда  $g^{-1}y_i = S_{i1}^1 \sqcup S_{i2}^1 \sqcup \dots \sqcup S_{ik_i}^1$  есть гладкое зацепление.

ориентации on these curves. Определим *инвариант Хопфа*

$$H(f) := \sum_{i=1, j=1}^{k_1, k_2} \text{lk}(S_{1i}^1, S_{2j}^1).$$

**8.10.6.** (a) Инвариант Хопфа определен корректно, т.е. не зависит ни от  $y_1$ , ни от  $y_2$ , ни от  $g$ .

(b) Справедливо равенство  $H(\eta) = 1$ .

(c) Для любого  $n$  существует отображение  $S^3 \rightarrow S^2$ , инвариант Хопфа которого равен  $n$ .

(d) The Hopf invariant of  $f$  does not change under homotopy of  $f$ .

Parts (a,d) are proved аналогично утверждениям 8.3.3, 8.3.4, 8.4.1, 8.4.2. Parts (b) and (c) are easily proved assuming (a).

Для доказательства теоремы 8.7.8 Хопфа—Понtryгина—Фрейденталя осталось доказать инъективность инварианта Хопфа. В задаче 8.10.7 намечено доказательство теоремы 8.7.8, обобщающее метод накрытий из п. 3.9. Хотя инвариант Хопфа в нем явно не упоминается, фактически оно доказывает инъективность инварианта Хопфа. Другое доказательство инъективности намечено в задаче 8.11.1.

**8.10.7.** Для подмножества  $X \subset \mathbb{R}^m$  отображение  $\tilde{f}: X \rightarrow S^3$  называется *поднятием* отображения  $f: X \rightarrow S^2$ , если  $f = \eta \circ \tilde{f}$ .

(a) Отображение  $\eta_*: \pi^3(S^3) \rightarrow \pi^2(S^3)$ , определенное композицией с отображением Хопфа, корректно определено.

(b) **Лемма о локальной тривиальности.** Для любой точки  $x \in S^2$  существует такой гомеоморфизм

$$h: \eta^{-1}(S^2 - \{x\}) \rightarrow (S^2 - \{x\}) \times S^1, \quad \text{что} \quad \text{pr}_1 \circ h = \eta.$$

(c) **Лемма о поднятии пути.** Любой путь  $s: [0, 1] \rightarrow S^2$  имеет поднятие  $\tilde{s}: [0, 1] \rightarrow S^3$ .

(d) Любое отображение  $D^3 \rightarrow S^2$  имеет поднятие  $D^3 \rightarrow S^3$ .

(e) Любое отображение  $S^3 \rightarrow S^2$  гомотопно такому, которое имеет поднятие (т. е. отображение  $\eta_*$  сюръективно).

(f) **Лемма о поднятии гомотопии.** Для любого отображения  $F_0: D^3 \rightarrow S^3$  и любой гомотопии  $f_t: D^3 \rightarrow S^2$  отображения

$f_0 = \eta \circ F_0$  существует гомотопия  $F_t: D^3 \rightarrow S^3$  отображения  $F_0$ , для которой  $f_t = \eta \circ F_t$ .

(g) Если композиции  $S^3 \rightarrow S^2$  отображений  $S^3 \rightarrow S^3$  с отображением Хопфа гомотопны, то и сами отображения  $S^3 \rightarrow S^3$  гомотопны (т. е. отображение  $\eta_*$  инъективно).

**8.10.8.** Любое отображение  $S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  гомотопно отображению в точку.

Это доказывается аналогично утверждениям 8.10.7 с использованием отображения  $S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$  вместо отображения Хопфа  $S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$  (see the details in Problem 14.5.4).

## 8.11. Оснащенные зацепления

*Зацеплением* (неупорядоченным, или нераскрашенным) называется замкнутое 1-подмногообразие, т.е. объединение попарно непересекающихся образов несамопересекающихся замкнутых гладких регулярных кривых. *Оснащенным зацеплением* (в  $S^3$ ) называется ориентированное зацепление в  $S^3$  (называемое *носителем*) вместе с нормальным полем на нем.

Для оснащенного зацепления  $L$  обозначим через  $H(L)$  коэффициент зацепления его носителя и образа этого носителя при сдвиге вдоль нормальных векторов.

Определим оснащенное зацепление  $J(n)$  как стандартную окружность вместе с нормальным полем, для которого  $H(J(n)) = n$  (т.е. «обращающимся вокруг нее  $n$  раз»).

Два оснащенных зацепления называются *оснащенно кобордантыми*, если существуют

- (компактное) 2-подмногообразие  $M \subset S^3 \times [0, 1]$  с краем в  $S^3 \times \{0, 1\}$ , пересечения которого с  $S^3 \times 0$  и с  $S^3 \times 1$  есть первое и второе зацепление соответственно;

- нормальное поле на  $M$ , сужение которого на эти пересечения есть первое и второе поле соответственно.

Обозначим через  $\Omega_{fr}^1(3)$  множество оснащенных зацеплений с точностью до оснащенного кобордизма.

Определим отображение  $J: \mathbb{Z} \rightarrow \Omega_{fr}^1(3)$  формулой  $J(n) := [J(n)]$ .

**8.11.1.** (a) Отображение  $H: \Omega_{fr}^1(3) \rightarrow \mathbb{Z}$  корректно определено формулой  $H([L]) := H(L)$ . Оно тоже называется инвариантом

Хопфа. (В этом пункте сформулируйте и используйте без доказательства гладкий аналог лемм [Sk, 5.3.7 и 5.4.1b].)

(b) Любое ориентированное зацепление в  $S^3$  является ориентированным краем некоторого ориентированного 2-подмногообразия в  $B^4$ .

(Справедлив более сильный, но не используемый нами результат, *теорема Франкля-Понтрягина* [Pr15, §3]: любое ориентированное зацепление в  $\mathbb{R}^3$  является ориентированным краем некоторого ориентированного 2-подмногообразия в  $\mathbb{R}^3$ .)

(c) Любое оснащенное зацепление оснащенно коборданно стандартной окружности в  $S^3$  с некоторым оснащением.

(d) Инвариант Хопфа инъективен. (Значит, отображения  $H$  и  $J$  являются взаимно обратными биекциями.)

(e) Множество  $\pi^2(S^3)$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством  $\Omega_{fr}^1(3)$ . (Ср. с задачей 8.5.3.)

*Указание к п. (c).* Analogously to (b) (or by (b)) there is a 2-submanifold  $M \subset S^3 \times [0, 1]$  with boundary in  $S^3 \times \{0, 1\}$  such that  $M \cap S^3 \times 0$  is the support of the given link, and  $M \cap S^3 \times 1$  is the standard circle. Analogously to §§4.8, 4.10 extend the given normal vector field on  $M \cap S^3 \times 0$  to a normal vector field on  $M$ .

**8.11.2.** (a) Определите инвариант Хопфа  $H: \pi^3(S^5) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

(b) Этот инвариант нулевой.

## 8.12. Векторные поля на трехмерных многообразиях\*

**8.12.1.** (a) Постройте три линейно независимых касательных векторных поля на  $\mathbb{R}P^3$ .

(b) Постройте биекцию  $V(\mathbb{R}P^3) \rightarrow \pi^2(\mathbb{R}P^3)$ .

(c) Отображение сужения  $D: \pi^2(\mathbb{R}P^3) \rightarrow \pi^2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$  (теорема Хопфа 8.5.1 (b)) сюръективно.

(d) Любое отображение  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow S^2$ , сужение которого на  $\mathbb{R}P^2$  гомотопно постоянному, гомотопно такому, которое имеет поднятие  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow S^3$ .

(e) Для любого  $a \in \mathbb{Z}_2$  постройте биекцию  $D^{-1}(a) \rightarrow \mathbb{Z}$  (аналогично п. 8.10).

Решения пунктов (д) и (е) задач 8.12.1, 8.12.2, 8.12.3 и 8.12.4 аналогичны задаче 8.10.7(е) и задачам 8.10.7(е,г) соответственно. См. детали в [Pr14', 3.1.4].

**8.12.2.** (а, б, с, д) То же, что в задаче 8.12.1, с заменой  $\mathbb{R}P^3$  на  $S^1 \times S^2$ ,  $\pi^2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$  на  $\pi^2(1 \times S^2) = \mathbb{Z}$  (теорема Хопфа 8.5.1 (а)) и  $\mathbb{R}P^2$  на  $1 \times S^2$ .

(е) Постройте биекцию  $D^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{Z}$  (аналогично п. 8.10).

(ф)\* При  $k \neq 0$  справедливо равенство  $|D^{-1}(k)| = 2k$ .

Для решения п. (а) представьте  $S^1 \times S^2$  в виде «склейки» подмножества  $D^1 \times S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , ср. с замечаниями после задач 4.4.2 и 4.4.4. (Ср. с. указаниями к задаче 9.1.1 (б).)

**8.12.3.** (а, б, с, д) То же, что в задаче 8.12.1, с заменой  $\mathbb{R}P^3$  на  $S^1 \times S^1 \times S^1$ ,  $\pi^2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$  на

$$\pi^2(1 \times S^1 \times S^1) \times \pi^2(S^1 \times 1 \times S^1) \times \pi^2(S^1 \times S^1 \times 1) = \mathbb{Z}^3$$

(теорема Хопфа 8.5.1 (б)) и  $\mathbb{R}P^2$  на  $1 \times S^1 \times S^1 \cup S^1 \times 1 \times S^1 \cup S^1 \times S^1 \times 1$ .

(е) Постройте биекцию  $D^{-1}(0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{Z}$  (аналогично п. 8.10).

(ф)\* При  $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$  справедливо равенство  $|D^{-1}(p, q, r)| = 2\text{НОД}(p, q, r)$ .

**8.12.4.** Пусть  $N$  — замкнутое ориентируемое 3-многообразие.

(а) Постройте отображение  $D: V(N) \rightarrow H_1(N; \mathbb{Z})$ , выбрав  $v \in V(N)$  (аналогично п. 4.11).

(б) Постройте отображение  $D: \pi^2(N) \rightarrow H_1(N; \mathbb{Z})$  (аналогично п. 4.11).

(Определение группы  $H_1(N; \mathbb{Z})$  одномерных гомологий многообразия  $N$  с целыми коэффициентами естественно появится при построении, поэтому его не нужно знать заранее. Придуманное вами определение можно сравнить с приведенным в п. 10.6.)

(с) Отображения  $D$  сюръективны.

(д) Любое отображение  $N \rightarrow S^2$ , сужение которого на  $N - D^3$  гомотопно отображению в точку, гомотопно такому, которое имеет поднятие  $N \rightarrow S^3$ .

(е) Существуют биекции  $D^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

## § 9. Наборы векторных полей

‘You mean...’ he would say, and then he would rephrase what I had said in some completely simple and concrete way, which sometimes illuminated it enormously, and sometimes made nonsense of it completely.

I. Murdoch. Under the Net<sup>22</sup>

### 9.1. Введение и основные результаты

Определения (гладких) многообразий, их ориентируемости, замкнутости, края, триангуляции, касательных векторных полей на них аналогичны случаю двумерных многообразий (п. 4.5, 4.10, 8.6).

Ученик Хайнца Хопфа Эдуард Штифель рассмотрел проблему существования пары, тройки, и т. д. линейно независимых касательных векторных полей на многообразии. Развивая идеи Хопфа, Штифель около 1934 г. пришел к определению характеристических классов. Любопытно, что Штифель начал со случая ориентируемых 3-многообразий и пытался построить пример такого многообразия, на котором не существует тройки линейно независимых касательных векторных полей. Формализация была завершена Норманом Стинродом в 1940-х гг. При помощи построенной теории были доказаны следующая теорема Штифеля 9.1.3, а также многие другие результаты (см. § 9, 12, 13, 16).

Многообразие размерности  $n$  называется **параллелизуемым**, если на нем имеется семейство из  $n$  касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке. Например, окружность, тор,  $S^3$  и  $\mathbb{R}P^3$  параллелизуемы (утверждения 8.10.1.а и 8.12.1.а) а любое неориентируемое многообразие,  $S_g$  при  $g \neq 1$  и  $S^{2k}$  не параллелизуемы (по теоремам Эйлера-Пуанкаре 4.6.2 и Хопфа 8.7.4.б).

Напомним, что через  $S_g$  обозначается сфера с  $g$  ручками.

**9.1.1.** Произведения  $S_g \times I$  и  $S_g \times S^1$  параллелизуемы for any  $g$ .

---

<sup>22</sup>Скажешь ему что-нибудь, а он твое высказывание, как переводную картинку обмакнет в воду, и все проясняется. (Л. Улицкая. Зеленый Шатер.)

**9.1.2.** (a) Любой набор из  $n - 1$  линейно независимых касательных векторных полей на ориентируемом  $n$ -многообразии можно дополнить до набора из  $n$  таких полей.

(b) Если на многообразии имеется набор из  $k$  линейно независимых касательных векторных полей, то имеется набор из  $k$  ортонормированных касательных векторных полей.

(c) Any  $n$ -submanifold of a parallelizable  $n$ -manifold (e.g. of  $\mathbb{R}^n$ ) is parallelizable.

**Теорема 9.1.3** (Штифель). *Любое ориентируемое 3-многообразие параллелизуемо.*

Обобщения — теоремы 9.1.9, 9.8.4 (b) и 12.6.1.

Многообразие называется  *$k$ -параллелизуемым*, если на нем имеется семейство из  $k$  касательных векторных полей, линейно независимых в каждой точке.

**Теорема 9.1.4.** *Если  $n + 1 = 2^r m$ , где  $m$  нечетно, то  $\mathbb{R}P^n$  не является  $2^r$ -параллелизуемым.*

**Теорема 9.1.5** (об алгебрах с делением). *Если на  $\mathbb{R}^n$  имеется структура алгебры с делением, то  $n$  есть степень двойки.*

Более точно, *алгебры с делением на  $\mathbb{R}^n$  имеются только при  $n = 1, 2, 4, 8$ . Кроме того, сфера  $S^n$  параллелизуема только при  $n = 0, 1, 3, 7$ .* Эти знаменитые теоремы Ботта—Милнора—Кервера (см. ссылки в [MS74, § 4]) доказываются также с использованием топологии (но гораздо более продвинутой) [Hi95].

В этом параграфе теоремы 9.1.4 и 9.1.5 доказываются при помощи построения характеристических классов. Эти теоремы нетрудно вывести из теоремы 9.9.1 о препятствии и задач 10.6.5 (b), 9.9.6 (c, d). (Доказательство Хопфа, не использующее систем векторных полей и характеристических классов [Hi95], было получено одновременно с доказательством Штифеля, использующим их.)

Другие важные применения характеристических классов — теоремы Уитни о невложимости и Понtryгина—Тома о некобордантности — описаны в § 12, 16.

Для доказательства следующих просто формулируемых фактов также необходимы характеристические классы (кроме п. (a), части «тогда» в п. (b) и части «только тогда» в п. (c) утверждения 9.1.7).

**Утверждение 9.1.6.** Для любого связного 2-многообразия  $F$  следующие условия равносильны:

- $F \times S^1$  2-параллелизуемо;
- $F \times I$  2-параллелизуемо;
- $F$  имеет непустой край или четную эйлерову характеристику.

Это доказывается при помощи задач 9.7.2 (a), 9.7.3 (b) и 9.7.4 (b).

**Утверждение 9.1.7.** Пусть  $M$  — замкнутое 3-многообразие.

- (a) Многообразие  $M \times S^1$  2-параллелизуемо.
- (b) Многообразие  $M \times S^1$  3-параллелизуемо тогда и только тогда, когда  $M$  2-параллелизуемо.
- (c) Многообразие  $M \times S^1$  параллелизуемо тогда и только тогда, когда  $M$  ориентируемо.

Части «только тогда» в п. (b) и «тогда» в п. (c) следуют из утверждения 9.8.3 (d) и теоремы Штифеля 9.1.3 соответственно.

Многообразие называется **почти параллелизуемым** (**почти  $k$ -параллелизуемым**), если его дополнение до точки параллелизуемо ( $k$ -параллелизуемо).

**9.1.8.** The connected sum of almost parallelizable manifolds is almost parallelizable.

**Утверждение 9.1.9.** Любое замкнутое ориентируемое 4-многообразие почти 2-параллелизуемо.

- 9.1.10.** Пусть  $F$  и  $F'$  — замкнутые 2-многообразия.
- (a) Многообразие  $F \times F'$  почти 3-параллелизуемо тогда и только тогда, когда одно из многообразий  $F$  и  $F'$  ориентируемо, а у другого эйлерова характеристика четна.
  - (b) Если  $F \times F'$  почти 2-параллелизуемо, то либо одно из многообразий  $F$  и  $F'$  ориентируемо, либо у обоих эйлерова характеристика четна.
  - (c)\* Верно ли обратное к п. (b)?

Утверждения 9.1.9, 9.1.10 (a) и 9.1.10 (b) доказываются при помощи задач 9.8.10 (b, c), 9.8.3 (a, b, e') и 9.8.8 (e) соответственно.

## 9.2. Параллелизуемость на двумерном подмногообразии

A *PL k-submanifold* of a smooth manifold  $N$  is the collection of some faces of some triangulation of  $N$ , which collection is PL homeomorphic to some PL  $k$ -manifold.

**Лемма 9.2.1** (о подмногообразии). *Any closed PL 2-submanifold of an orientable 3-manifold  $N$  has a parallelizable neighborhood in  $N$ .*

Эта лемма следует из теоремы Штифеля, но используется в ее доказательстве. Мы приведем два независимых доказательства леммы: геометрическое в этом пункте (using the idea of [Ki89] and a suggestion of I. Zhiltsov) и алгебраическое — в п. 9.3.

Гомологические идеи применяются и в алгебраическом доказательстве леммы о подмногообразии, и в сведении (в п. 9.7) теоремы Штифеля 9.1.3 к этой лемме. Такое сведение основано на «исчерпывании» 3-многообразия окрестностями содержащихся в нем 2-многообразий.

**9.2.2.** (a) Существует ориентируемое 3-многообразие с краем, содержащее PL подмногообразие, PL гомеоморфное бутылке Клейна (или, другими словами, связное замкнутое неориентируемое имеющее нулевую эйлерову характеристику).

(b) Одно из таких 3-многообразий параллелизуемо.

(c) Same as (a) for  $\mathbb{R}P^2$  instead of the Klein bottle.

**9.2.3.** (a) Any orientable 2-manifold is PL homeomorphic to a PL submanifold of  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Any non-orientable 2-manifold is PL homeomorphic to a PL submanifold of the connected sum of several  $\mathbb{R}P^3$ 's.

**9.2.4.** (a) There are a 3-manifold  $M$ , and PL homeomorphic closed PL 2-submanifolds of  $M$  that have no homeomorphic neighborhoods (one neighborhood is orientable, the other is not).

(b) If a PL 2-submanifold  $F$  of a 3-manifold is PL homeomorphic to the sphere  $S^2$ , then some neighborhood of  $F$  is PL homeomorphic to  $F \times [0, 1]$ .

(c) Every closed orientable PL 2-submanifold  $F$  of an orientable 3-manifold has a neighborhood PL homeomorphic to  $F \times [0, 1]$ .

**Лемма 9.2.5.** *Each PL homeomorphic closed PL 2-submanifolds  $F_1, F_2$  of orientable 3-manifolds  $M_1, M_2$  have diffeomorphic neighborhoods.*

*Proof of Submanifold Lemma 9.2.1.* By Assertions 9.2.3 (a, b) and Lemma 9.2.5 some neighborhood of  $F$  in  $N$  is diffeomorphic to some neighborhood of some PL submanifold PL homeomorphic to  $F$

- in  $\mathbb{R}^3$ , if  $F$  is orientable;
- in the connected sum of several  $\mathbb{RP}^3$ , if  $F$  is non-orientable.

Now the lemma follows from Assertions 9.1.2.c and 9.1.8.  $\square$

**Hint to 9.2.2.** (a) 3-многообразие

$$\frac{S^1 \times [-1, 1] \times [0, 1]}{(x, y, t, 0) \sim (x, -y, -t, 1)}$$

ориентируемо и содержит бутылку Клейна

$$\frac{S^1 \times 0 \times [0, 1]}{(x, y, 0, 0) \sim (x, -y, 0, 1)}.$$

Вот другое изложение этой конструкции. Возьмем вложение бутылки Клейна в  $\mathbb{R}^4$  (см. рис. 2.1.6 (b)). Возьмем проекцию  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times 0$ . Возьмем нормальное векторное поле на образе при проекции, параллельное четвертой координате. Возьмем нормальное поле (ненаправленных) отрезков, перпендикулярных взятому полю и пересекающих бутылку в своих внутренних точках. Эти отрезки заметают нужное 3-многообразие.

(b) Проекция 3-многообразия, построенного в п. (a), на  $\mathbb{R}^3 \times 0$  локально взаимно однозначна. Поэтому нужная тройка полей происходит из тройки ортонормированных полей на  $\mathbb{R}^3$ . Ср. с задачей 9.1.2.c.

(c) Возьмем  $\varepsilon$ -окрестность проективной плоскости  $\mathbb{RP}^2$ , лежащей в  $\mathbb{RP}^3$ .

Например, точка в  $n$ -сфере (или, формально, вершина в  $n$ -гиперграфе, гомеоморфном полному  $n$ -гиперграфу с  $n + 2$  вершинами) клеточна.

**Клеточным разбиением**  $n$ -гиперграфа  $K$  называется последовательность  $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K$  его подгиперграфов, в котором  $K_{k-1}$  — клеточный  $(k-1)$ -подгиперграф в  $K_k$  для каждого  $k = 1, \dots, n$ . Подгиперграф  $K_k$  называется  $k$ -*(мерным) остовом* клеточного разбиения.

Например, последовательность  $k$ -мерных остовов  $n$ -гиперграфа,  $k = 0, 1, \dots, n$ , образует его клеточное разбиение. По разбиению  $n$ -подмногообразия в  $\mathbb{R}^m$  на многогранники (ср. п. 4.5, 8.6) можно построить клеточное разбиение  $n$ -гиперграфа, тело которого есть заданное подмногообразие.

**10.4.1.** Постройте клеточные разбиения с одной 3-клеткой (т. е. со связным дополнением до 2-остова) для примеров из задачи 10.4.4 ниже.

**10.4.6.** (a)  $\mathbb{R}P^2$  не является краем многообразия (и, стало быть, невложимо в  $\mathbb{R}^3$ ).

(b) Замкнутое 2-многообразие является краем многообразия тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика четна.

(c) Ни  $\mathbb{C}P^2$ , ни  $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$  не являются краем многообразия (стало быть, они невложимы в  $\mathbb{R}^5$ ).

(d) **Теорема.** *Если замкнутое многообразие является краем многообразия, то его эйлерова характеристика четна.*

Ср. с теоремой 11.1.2 (a).

Ввиду утверждения 10.4.5 (b) теорема 10.4.6 (d) интересна только для четномерных многообразий. Ввиду аналога утверждения 10.6.8 для гомологий с коэффициентами  $\mathbb{Z}$  и двойственности Пуанкаре 10.9.5 заключение теоремы 10.4.6 (d) равносильно четности числа  $\text{rk } H_k(N; \mathbb{Z})$ , где  $N$  — ограничивающее многообразие из теоремы и  $2k = \dim N$ .

**10.4.6.** (a) *Первое решение.* Пусть, напротив,  $M$  — 3-многообразие и  $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$ . Обозначим через  $M'$  копию многообразия  $M$ . Тогда  $0 = \chi(M \cup_{\mathbb{R}P^2} M') = \chi(M) + \chi(M') - \chi(\mathbb{R}P^2)$ , откуда  $\chi(\mathbb{R}P^2)$  четно. Противоречие.

*Второе решение.* Пусть, напротив,  $M$  — 3-многообразие и  $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$ . Тогда

$$\tau(M)|_{\partial M} \cong \tau(\partial M) \oplus \nu(\partial M \subset M) \cong \tau(\partial M) \oplus \varepsilon.$$

Поэтому  $0 = e(M) \cap \partial M = e(\partial M) \neq 0$ , где  $e$  — класс Эйлера по модулю 2 и равенства означают сравнения по модулю 2.

*Третье решение.* Пусть, напротив,  $M$  — 3-многообразие и  $\partial M \cong \mathbb{R}P^2$ . Тогда  $w_1(\partial M) = \partial w_1(M)$ , где  $\partial: H_2(M, \partial) \rightarrow H_1(M)$  — граничный гомоморфизм. Пусть  $(\omega, \partial) \subset (M, \partial)$  — 2-подмногообразие с краем, реализующее класс  $w_1(M)$ . Тогда  $\partial\omega \subset \partial M$  реализует класс  $w_1(\partial M)$ . Значит,  $\omega \cap_M \omega$  есть 1-подмногообразие с краем  $\partial\omega \cap_{\partial M} \partial\omega$ . Поэтому  $w_1(\partial M) \cap w_1(\partial M) = 0$ , что неверно для  $\partial M = \mathbb{R}P^2$ .

(c)  $\chi(\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2) = \chi(\mathbb{R}P^2)^2 \equiv 1 \pmod{2}$ .

### 10.5. Одномерные гомологии

**Одномерной группой гомологий**  $H_1(K)$  с коэффициентами  $\mathbb{Z}_2$  гиперграфа  $K$  называется одномерная группа гомологий его 2-остова, см. п. 6.4 и 9.5, ср. [Sk, §9.8 ‘Maps from complex to Eilenberg-McLane spaces’]. Поэтому аналоги многих утверждений (например, 6.4.1, 6.5.5.а и 6.5.6.б) для 2-гиперграфов справедливы и для  $n$ -гиперграфов.

In particular, the group  $H_1(K)$  is not changed by passing to the regular neighborhood. **Регулярная окрестность** подгиперграфа в гиперграфе is defined analogously to §5.9. Например, регулярным окрестностям гомеоморфны  $D^n$  для точки и  $F \times I$  для гиперграфа  $F = F \times 0$ . Ясно, что регулярная окрестность подгиперграфа некоторой триангуляции  $n$ -многообразия является триангуляцией  $n$ -многообразия. О близком понятии утолщения, связанном с реализацием 2-гиперграфов в 3-многообразиях, см. [Sk, § 10 «Трехмерные утолщения двумерных гиперграфов»].

**10.5.1.** (а—f) Найдите  $H_1(K)$  для примеров из задачи 10.4.4.

*Связная сумма*  $\#$  многомерных многообразий определяется аналогично двумерным, рис. 5.5.1.

**10.5.2.** (a) (cf. Assertion 6.5.4.a) Если  $M$  и  $N$  — замкнутые  $n$ -многообразия, то  $H_1(M \# N) \cong H_1(M) \oplus H_1(N)$ .

(b) Если  $K$  и  $L$  — гиперграфы, то  $H_1(K \times L) \cong H_1(K) \oplus H_1(L)$ . (Определение произведения гиперграфов см., например, в [Sk, п. 6.16 «Декартово произведение»]. Доказательство аналогично [MNS, §1.7].)

(c) Сформулируйте и докажите аналог утверждения 6.4.3 (c) для клеточного разбиения гиперграфа.

Concerning the ‘formula’ for the homology of a union see §11.5.

**10.5.3** (cf. Problem 14.1.4). (a) For a subcomplex  $A$  of a complex  $K$  a 1-cycle in  $A$  is a 1-cycle in  $K$ .

(b) For a subcomplex  $A$  of a complex  $K$  if 1-cycles are homologous in  $A$ , then they are homologous in  $K$ . Thus the *inclusion-induced map*  $H_1(A) \rightarrow H_1(K)$  is well-defined.

(c) There are a complex  $K$  and its subcomplex  $A$  such that the inclusion-induced map  $H_1(A) \rightarrow H_1(K)$  is not injective.

Для 1-цикла  $C$  в  $K$  образом  $f_*C$  при симплексиальном отображении  $f : K \rightarrow L$  называется множество всех ребер  $\sigma$  в  $L$  таких, что имеется нечетное количество ребер  $\tau$  в  $C$ , для которых  $f(\tau) = \sigma$ .

#### 10.5.4. For a simplicial map $f : K \rightarrow L$ between hypergraphs

- (a) the image of any 1-cycle in  $K$  is a 1-cycle in  $L$ ;
- (b) the correspondence  $C \mapsto f_*C$  gives a well-defined map  $f_* : H_1(K) \rightarrow H_1(L)$
- (c) we have  $(\text{id } K)_* = \text{id } H_1(K)$ ;
- (d) we have  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  for a simplicial map  $g : L \rightarrow M$  between hypergraphs.

**10.5.5.** Пусть  $K$  — граф с ориентированными ребрами. Расстановка целых чисел на всех ребрах графа называется *целочисленным 1-циклом*, если для каждой вершины сумма чисел на входящих ребрах равна сумме чисел на исходящих ребрах (правило Кирхгофа, ср. задачу 4.11.2).

(a,b,c,d) Сформулируйте и докажите аналоги утверждений 6.2.3.abcd для целочисленных 1-циклов.

(e) Для данного набора  $\omega$  ориентаций на ребрах графа  $K$  обозначим через  $H_1(K; \mathbb{Z}) = H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$  множество целочисленных 1-циклов, с операцией покомпонентной суммы. Тогда группы  $H_1(K; \mathbb{Z})$  для различных наборов ориентаций ребер изоморфны. (Т.е. для различных наборов  $\omega, \omega'$  ориентаций существует взаимно однозначное соответствие  $\varphi : H_1^\omega(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1^{\omega'}(K; \mathbb{Z})$  такое, что  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$  для всех пар  $x, y \in H_1^\omega(K; \mathbb{Z})$ .)

Пусть  $K$  — гиперграф с ориентированными ребрами. Расстановка целых чисел на его ориентированных ребрах называется (симплексиальным) **целочисленным 1-циклом**, если для каждой вершины сумма чисел на входящих ребрах равна сумме чисел на выходящих. **Границей** (одномерной целочисленной) *да* грани  $a = \{i, j, k\}$  называется расстановка *плюс* единиц на ориентированных ребрах  $(ij), (jk), (ki)$  и нулей на остальных ребрах. Это означает, что если ребро  $\{i, j\}$  ориентировано от  $i$  к  $j$ , то на нем ставится  $+1$ , а если от  $j$  к  $i$ , то  $-1$ . Таким образом, граница грани определена с точностью до умножения на  $-1$ . Два целочисленных 1-цикла называются (целочисленно) **гомологичными**, если их разность есть линейная комбинация границ нескольких граней с целыми коэффициентами. **Одномерной группой гомологий**  $H_1(K; \mathbb{Z})$  с коэф-

фициентами  $\mathbb{Z}$  называется группа целочисленных 1-циклов с точностью до гомологичности.

Итак,  $H_1(K; \mathbb{Z}) = H_1(K^{(2)}; \mathbb{Z})$  для 2-остова  $K^{(2)}$ .

**10.5.6.** (a, b, c, d) Сформулируйте и докажите аналоги задач 6.4.1 и 6.5.6.b (группа  $H_1(K)$  не меняется при сдавливании) для  $H_1(K; \mathbb{Z})$ .

(e) Группы  $H_1(K; \mathbb{Z})$  для различных наборов ориентаций ребер изоморфны.

(f) Естественный изоморфизм  $H_1(U; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(U'; \mathbb{Z})$  для гомеоморфных (см. п. 5.2) триангуляций  $U$  и  $U'$ , переводит  $D(U, u, v)$  в  $D(U', u, v)$  (см. определение в п. 4.11).

**10.5.7.** (a—f) Найдите  $H_1(K; \mathbb{Z})$  для примеров из задачи 10.4.4.

**10.5.8.** (a—d) Найдите группу  $H_1(K; \mathbb{Z})$  и нарисуйте ориентированные кривые, представляющие ее базис, для (любой триангуляции) примеров из задачи 6.5.1.

*Hint:* see the following problems.

**10.5.9** (cf. Problem 6.5.3). Let  $T$  be a triangulation (or a cellular decomposition) of a connected closed 2-manifold.

(a) If  $T$  is orientable, then  $H_1(T; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2-\chi(T)}$ .

*Hint.* Докажите это, не используя классификации 2-многообразий (ибо она не была полностью доказана). Prove that the quotient of  $\mathbb{Z}^s$  (by a subgroup generated) by a primitive element is isomorphic to  $\mathbb{Z}^{s-1}$ . Prove that there is a sequence  $f_1, \dots, f_F$  of all faces such that  $[\partial f_j]$  is primitive in  $Z_1(T; \mathbb{Z}) / \langle \partial f_1, \dots, \partial f_{j-1} \rangle$  for every  $j = 1, \dots, F$ .

Alternatively, prove that  $H_1(T; \mathbb{Z}) \cong H_1(T_0; \mathbb{Z})$ , where  $T_0$  is obtained from  $T$  by deleting (the interior of) one 2-face. Use the fact that Euler characteristic is not changed under collapse or deformation retraction, and the results of Problems 10.5.6.d, 10.6.6.

(b) The sum of boundaries of (arbitrary oriented) faces of  $T$  equals  $2C$  for some integer 1-cycle  $C$  (we have  $[C] = \beta[N]$ , see definition of  $\beta$  in Problem 11.8.2.a).

(c) Define the *reduction mod 2*  $\rho_2 : H_1(T; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(T)$ .

(d) For any  $C$  from (b) we have  $\rho_2 C = w_1(T)$  (then  $w_1(T) = \rho_2 \beta[N]$ ).

(e) If  $T$  is non-orientable, then  $H_1(T; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(T)} \oplus \mathbb{Z}_2$ .

*Hint.* Analogously to (a). Use (b). Prove that the quotient of  $\mathbb{Z}^s$  by twice a primitive element is isomorphic to  $\mathbb{Z}^{s-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ .

**13.5. Классификация сечений\***

Отображение  $s: X \rightarrow X \times Y$  называется *сечением*, если  $\text{pr}_1 \circ s = \text{id}_X$ . Сечения называются *послойно гомотопными*, если они гомотопны в классе сечений. Обозначим через  $\Gamma(\text{pr}_1)$  множество классов послойной гомотопности сечений. Равенство между множествами означает наличие биекции между ними.

**13.5.1.** (a)  $\Gamma(\text{pr}_1: S^1 \times I \rightarrow S^1) = \{0\}$ .

(b)  $\Gamma(\text{pr}_1: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1) = \mathbb{Z}$ .

(c) Для замкнутого ориентируемого 2-многообразия  $N$  выполняется равенство

$$\Gamma(\text{pr}_1: N \times S^1 \rightarrow N) = H_1(N; \mathbb{Z}).$$

(d) Множество  $\Gamma(\text{pr}_1)$  находится в биективном соответствии с множеством  $[X; Y]$  отображений  $X \rightarrow Y$  с точностью до гомотопности (см. определение в п. 3.4).

Понятия векторного поля и сечения (прямого произведения) являются важнейшими частными случаями понятия *сечения расслоения*, см. п. 13.2. Сечения расслоения называются *послойно гомотопными*, если они гомотопны в классе сечений.

**13.5.2.** (a) У проекции  $p$  ленты Мёбиуса на ее среднюю линию существует ровно одно сечение (с точностью до послойной гомотопности).

(b) Опишите множество классов послойной гомотопности сечений стандартной проекции  $p: K \rightarrow S^1$  бутылки Клейна на окружность.

Рассмотрим 2-многообразие  $P^*$  с непустым краем и инволюцией  $t$  на  $P^*$ , имеющей лишь конечное число неподвижных точек.

**13.5.3.** Существуют такие негомеоморфные 2-многообразия  $P^*$  и  $P_1^*$  с непустыми краями и инволюциями  $t$  и  $t_1$ , имеющими лишь конечное число неподвижных точек, для которых  $P^*/t \cong P_1^*/t_1$ .

Сечение  $s: P^* \rightarrow P^* \times S^1$  называется *симметричным*, если  $\text{pr}_2 \circ s = \text{pr}_2 \circ s \circ t$ . Множество симметричных сечений с точностью до гомотопии в классе симметричных сечений обозначается кратко  $\Gamma(P^*, t)$ . Положим  $P = P^*/t$ .

**13.5.4.** Если инволюция  $t$  имеет лишь конечное число неподвижных точек, то  $\Gamma(P^*, t) = H_1^t(P^*, \partial; \mathbb{Z}) \cong H_1(P, \partial; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$ . Для пространства с инволюцией симметричные гомологические группы обозначаются добавлением верхнего индекса  $t$  к обычно обозначению. Их определение естественно появляется при изучении множества  $\Gamma(P^*, t)$ . Читатель может придумать его сам или подсмотреть в [Sk, п. «Эквивариантные отображения графа»].

## 13.6. Классификация зейфертовых сечений\*

В приложениях (см. следующий пункт) появляются аналоги сечений для расслоений с особенностями. Приведем определение и результат для частного случая (мотивированного приложениями).

Положим  $Q = Q(P^*) := P^* \times I / \{(a, 0) \sim (t(a), 1)\}$ . (Выражаясь научно, это расслоение над  $S^1$  со слоем  $P^*$  и сшивающим отображением  $t$  [BFM90, определение 2.2].)

**13.6.1.**  $Q(P^*)$  зависит только от  $P$ , но не от  $P^*$ .

Обозначим через  $p: P^* \rightarrow P$  проекцию. Определим отображение  $\pi: Q \rightarrow P$  формулой  $\pi[(a, s)] = p(a)$ . (Это «расслоение Зейфера, имеющее сингулярные слои только типа  $(2, 1)$ ».)

Вложение  $f: P^* \rightarrow Q$  называется *зейфертовым сечением*, если  $\pi \circ f = p$ . (В гладкой категории нужно дополнительно предполагать, что  $f$  трансверсально слоям отображения  $\pi$ . В [BF94] зейфертовы сечения назывались трансверсальными площадками.)

**Теорема 13.6.2** ([RS99']). Для любых  $P^*$  и  $t$  множество  $X$  зейфертовых сечений с точностью до изотопии над  $\pi$  находится в биективном соответствии с  $H_1(P, \partial; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$ . (Определение изотопии над  $\pi$  аналогично приведенным после задачи 6.6.1 и в п. 15.5.)

*Доказательство.* Определим отображение

$$q: P^* \times S^1 \cong \frac{P^* \times I}{\{(a, 0) \sim (a, 1)\}} \rightarrow \frac{P^* \times I}{\{(a, 0) \sim (t(a), 1)\}} \cong Q$$

формулой

$$q[(a, u)] = \begin{cases} [(a, 2u)], & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ [(t(a), 2u - 1)], & \frac{1}{2} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

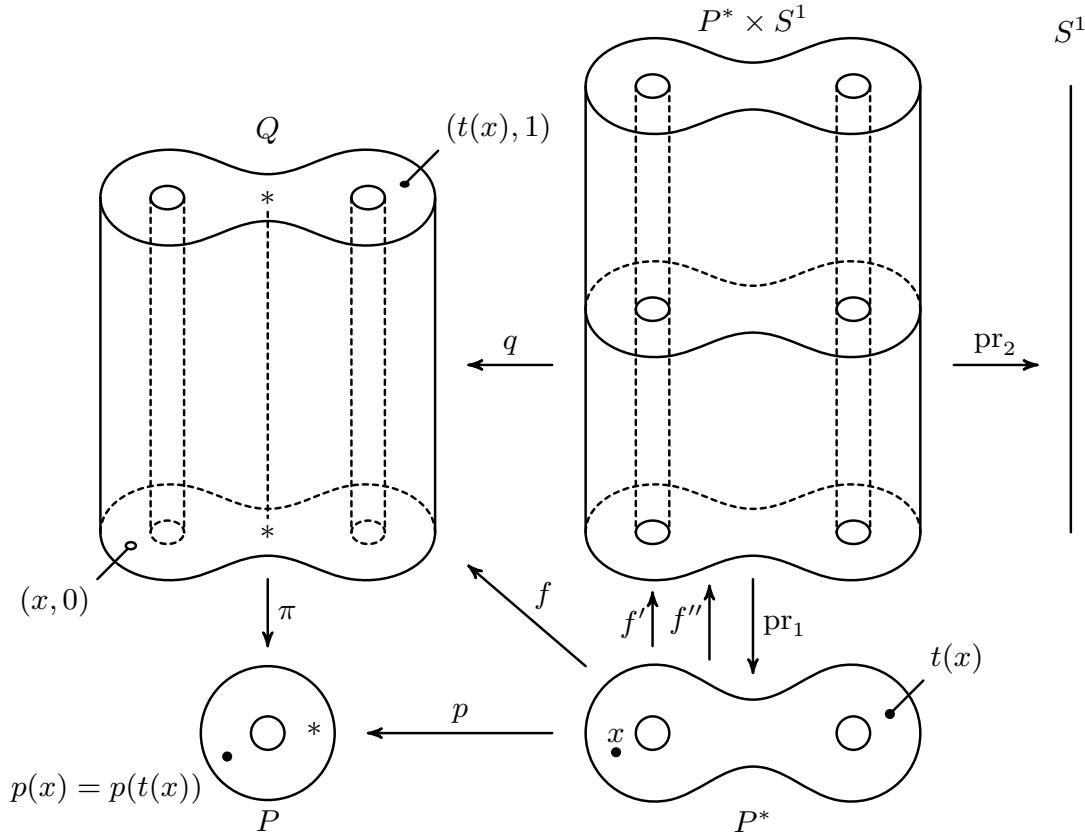


Рис. 13.6.1. Классификация зейфертовых сечений

Поскольку  $t$  — инволюция,  $q$  корректно определено и непрерывно.

Пусть  $f: P^* \rightarrow Q$  — зейфертово сечение. Для каждой точки  $x \in P^*$ , не являющейся неподвижной точкой инволюции  $t$ , существует единственная точка  $f'(x) \in P^* \times S^1$ , для которой  $qf'(x) = f(x)$ . Для каждой неподвижной точки  $x$  инволюции  $t$  существуют две такие точки  $u, v \in S^1$ , что  $q(x, u) = q(x, v) = f(x)$ . Поскольку маленькая проколотая дисковая окрестность в  $P^*$  неподвижной точки  $x$  связна, мы можем взять в качестве  $f'(x)$  либо  $(x, u)$ , либо  $(x, v)$ , так что отображение  $f': P^* \rightarrow P^* \times S^1$  будет непрерывным. Построенное отображение  $f'$  — (обычное) сечение тривиального расслоения  $P^* \times S^1 \rightarrow P^*$ .

Поскольку  $f$  — вложение,  $pr_2 f'(x) \neq pr_2 f'(t(x))$  ни для какой точки  $x \in P^*$ . Поэтому  $f'$  послойно гомотопно симметричному сечению  $f''$ .

Обратно, для любого симметричного сечения  $F: P^* \rightarrow P^* \times S^1$  отображение  $q \circ F$  является зейфертовым сечением и  $(q \circ F)'' = F$ .

Очевидно, зейфертовы сечения  $f$  и  $g$  изотопны над  $\pi$  тогда и только тогда, когда соответствующие симметрические сечения  $f''$  и  $g''$  симметрично гомотопны (или, что эквивалентно, изотопны). Тогда  $X = \Gamma(P^*, t) = H_1(P, \partial; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(P)}$ .  $\square$

### 13.7. Применение к гамильтоновым системам\*

В 1994 г. Болсинов и Фоменко [BF94] доказали теорему о топологической траекторной классификации невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на трехмерных многообразиях постоянной энергии. Мотивировки и краткий обзор см. в [BFM90, § 1], [BF94, § 1]. Они доказали, что две такие системы эквивалентны, если некоторые их инварианты совпадают. Инвариантом является граф с некоторыми дополнительными метками на его вершинах и ребрах. Одним из необходимых ограничений было то, что рассматриваемая гамильтонова система не имеет неустойчивых периодических орбит с *неориентируемой* сепаратрисой. Это связано с тем, что в доказательстве использовались *сечения локально тривиальных* расслоений. Поскольку периодические орбиты с неориентируемой сепаратрисой встречаются в примерах (например, в волчке Ковалевской), было интересно отбросить это ограничение. Это оказалось возможным благодаря использованию *зейфертовых сечений зейфертовых расслоений*.

**Теорема 13.7.1** ([RS99', CRS00], см. [BF94, теорема 4.1]). *Пусть  $X$  — множество невырожденных интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы на ориентируемых трехмерных многообразиях постоянной энергии с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности, сохраняющей ориентацию. Тогда существует инъекция из  $X$  в множество  $t$ -оснащенных графов с точностью до  $t$ -эквивалентности.*

Определения  $t$ -оснащенных графов и  $t$ -эквивалентности такие же, как в [BF94], см. также [BFM90, CRS00]. Заметим, что в [BF94, § 12.3 и § 13.5] описаны образ инъекции из теоремы и зависимость  $t$ -меток от ориентации 3-многообразия постоянной энергии. Кроме того, в [BF94, § 13] было построено в некотором смысле более простое оснащение на  $W$ , названное  $t$ -молекулой. Более общая си-

(c) Пространство  $C_f$  ретрагируется на окружность для любого вложения  $f: N \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  замкнутого  $n$ -многообразия  $N$ .

**15.6.8.** Пусть  $f: N \rightarrow S^7$  — вложение замкнутого связного 4-многообразия  $N$ .

(a)  $\pi_2(C_f) \cong \mathbb{Z}$ .

(b) Если  $N$  односвязно, то  $\pi_3(C_f) \cong \mathbb{Z}_{d(\varkappa(f))}$ . Здесь  $d(\varkappa(f))$  определяется следующим образом. Введем такие обозначения:

- $A_{f,k} = A_k: H_k(N; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k+1}(C_f, \partial; \mathbb{Z})$  — двойственность Александера 11.7.2,
- $\varkappa(f) := A_2^{-1}(A_4[N] \cap A_4[N]) \in H_2(N; \mathbb{Z})$  — *инвариант Беша—Хэфлигера*,
- $d(0) := 0$  и  $d(x) := \max\{k \in \mathbb{Z} : \text{найдется } y \in H_2(N; \mathbb{Z}), \text{ для которого } x = ky\}$  при  $x \neq 0$ .

См. усиления в [Sk05t].

## 15.7. Приклеивающий инвариант\*

По соображениям общего положения нормальное векторное расслоение  $\nu_f$  погружения  $f: N \rightarrow S^{n+k}$  замкнутого  $n$ -многообразия  $N$  не зависит от  $f$  для  $k \geq n + 1$ . Это так называемое *стабильное нормальное расслоение*, которое мы обозначим через  $\nu_k(N)$ . Так как

$$\nu_{i \circ f} = \nu_f \oplus 1, \quad \text{то} \quad \nu_f \oplus (K - k)\varepsilon = \nu_K(N) \quad \text{для } K \geq n + 1.$$

Ср. с переформулировкой теоремы Смейла—Хирша о погружаемости в конце п. 15.3.

По соображениям общего положения  $C_f$  не зависит от  $f$  для  $k \geq n + 2$ . Это пространство обозначим через  $C_k(N)$ . Так как

$$C_{i \circ f} \sim \Sigma C_f, \quad \text{то} \quad \Sigma^{K-k} C_f \sim C_K(N) \quad \text{для } K \geq n + 2.$$

*Необходимым условием дополнения* для вложимости гиперграфа  $N$  в  $S^{n+k}$  является  $(K - k)$ -денадстраиваемость пространства  $C_K(N)$ , т. е. существование пространства  $C$ , для которого  $\Sigma^{K-k} C \sim C_K(N)$ . Если это условие выполняется для  $K = n + 2$ , то оно автоматически выполняется для любого  $K \geq n + 2$ .

**15.7.1.** Для  $k \geq n + 2$  имеем  $C_k \sim D\nu_k/S\nu_k$ .

Нормальное расслоение  $\nu_f$  погружения  $f$  с точностью до эквивалентности является инвариантом регулярной гомотопии погружения  $f$  (и инвариантом изотопии погружения  $f$ , если оно является вложением). Этот изотопический инвариант не очень сильный, потому что, например, нормальные расслоения различных вложений стабильно эквивалентны. См. утверждение 12.2.5. Для вложения  $f$  пространство сферического расслоения  $S\nu_f$  и граница  $\partial C_f = \partial O_f(N)$  дополнения до образа (или трубчатой окрестности образа)  $f(N)$  в  $S^m$  могут быть отождествлены при помощи гомеоморфизма  $\kappa$  из теоремы о трубчатой окрестности в п. 13.2, при котором нулевое сечение переходит в  $f(N)$ . Заметим, что этот гомеоморфизм  $\kappa$  определен неоднозначно (более точно, различающие элементы лежат в группах  $H^l(N; \pi_l(SO_{k-1}))$ ).

*Совмещая* идею дополнения и идею окрестности, Дж. Левин, С. П. Новиков и В. Браудер получили *редукцию* проблем вложимости и изотопии к алгебраическим проблемам (впрочем, достаточно сложным). Доказательство достаточности *комбинации* инвариантов дополнения и окрестности условий — одно из наиболее важных приложений *хирургии* к топологии многообразий. По поводу развития этого подхода и преодоления возникающих трудностей см. [Sk06m, Sk05t, CS11].

Дадим определение нормальной системы и сформулируем теорему Браудера—Левина. Композиция  $S\nu_f \xrightarrow{\kappa} \partial C_f \subset C_f$  называется *приклеивающим отображением*  $a(f, \kappa)$ . Тройка  $S(f, \kappa) = (\nu_f, C_f, a(f, \kappa))$  называется *нормальной системой пары*  $(f, \kappa)$ . Вообще, *нормальной системой коразмерности k на многообразии N* называется тройка  $S = (\nu, C, a)$ , состоящая из векторного  $k$ -расслоения  $\nu$ , пространства  $C$  и непрерывного отображения  $p: S\nu \rightarrow C$ . Нормальные системы  $(\nu, C, p)$  и  $(\nu_1, C_1, p_1)$  называются *эквивалентными*, если существуют изоморфизм расслоений  $b: \nu \rightarrow \nu_1$  и гомотопическая эквивалентность  $r: C \rightarrow C_1$ , для которых  $r \circ p \simeq p_1 \circ Sb$ . Обозначение:  $(\nu, C, p) \sim (\nu_1, C_1, p_1)$ . Очевидно, что класс эквивалентности нормальной системы  $(f, \kappa)$  не зависит от  $\kappa$ . Этот класс называется *нормальной системой S(f) вложения f*. Очевидно, что нормальная система вложения является изотопическим инвариантом.

Так как любые два вложения  $N \rightarrow S^{n+K}$  изотопны при  $K > n + 1$ , класс  $S(f)$  не зависит от вложения  $f$  при  $K > n + 1$ . Эта нормальная система называется *стабильной нормальной системой многообразия*  $N$  и обозначается  $S_K(N)$ . *Надстройка*  $\Sigma S$  над нормальной системой  $(\nu, C, p)$  — это нормальная система  $(\nu \oplus 1, \Sigma C, p')$ , в которой  $p'$  является надстройкой над  $p$  на каждом слое. *Необходимое условие Браудера—Левина* для вложимости многообразия  $N$  в  $S^{n+k}$  состоит в существовании нормальной системы  $S$  на  $N$ , для которой  $\Sigma^{K-k}S \sim S_K(N)$  (ясно, что это условие не зависит от  $K$ ).

**Теорема 15.7.2** (Браудер—Левин). *Пусть  $N$  — замкнутое  $n$ -многообразие,  $K > n + 1$ ,  $k \geq 3$  и существует нормальная система  $S = (\nu, C, p)$  на  $N$ , для которой  $\Sigma^{K-k}S \sim S_K(N)$  и  $\pi_1(C) = 0$ . Тогда существует вложение  $f: N \rightarrow S^{n+k}$ , для которого  $S(f) \sim S$ .*

Для гомотопической сферы  $N$  теорема доказана в [Le65'], а в общем случае — в [Br68]. Она вытекает из следующей леммы [CRS04].

**Лемма 15.7.3** (о сжатии и денадстройке). *Пусть  $F: N \rightarrow S^{n+k+1}$  — вложение замкнутого гладкого  $n$ -многообразия,  $k \geq 3$ ,  $n + k \geq 5$  и существует нормальная система  $S = (\nu, C, p)$  на  $N$ , для которой  $\Sigma S \sim S(F)$  и  $\pi_1(C) = 0$ . Тогда существует вложение  $f: N \rightarrow S^{n+k}$ , для которого  $S(f) \sim S$ .*

Доказательство леммы (принадлежащее Браудеру) использует понятие нормального инварианта и приводится в [CRS04].

## 15.8. Заузливания коразмерности 1\*

В этом пункте если определение или рассуждение годится для всех категорий (DIFF, PL, TOP), то указание на категорию опускается.

Краткая история изучения узлов в *коразмерности 1*, т. е. вложений  $S^n \rightarrow S^{n+1}$ , такова. Известная многомерная теорема Жордана 11.6.1, впервые доказанная Брауэром, утверждает, что сфера  $S^n$ , содержащаяся в  $S^{n+1}$ , разбивает сферу  $S^{n+1}$  на две компоненты. Легко доказывается, что *вложение  $f: S^n \rightarrow S^{n+1}$  незаузлено тогда и только тогда, когда замыкания этих компонент дополнения являются шарами*. (Теорема Левина 15.6.1 (b) в некотором смысле

является аналогом этого утверждения.) В 1912 г. Шенфлис доказал, что любая окружность  $S^1 \subset S^2$  незаузлена.

Утверждение о незаузленности  $S^n$  в  $S^{n+1}$  получило название *гипотезы Шенфлиса*. В 1921 г. Александр объявил, что он доказал гипотезу Шенфлиса для произвольного  $n$ . Однако в 1923 г. он нашел контрпример — знаменитую рогатую сферу Александера (с помощью той же идеи дополнения [Ru73]). Тем не менее, он доказал, что в кусочно линейной категории гипотеза Шенфлиса верна для  $n = 2$ .

После появления рогатой сферы Александера гипотезой Шенфлиса стали также называть утверждение о незаузленности *локально плоского* вложения  $f: S^n \rightarrow S^{n+1}$ . Она была доказана только в 1960—1973 гг.:

- для гладкого случая при  $n \neq 3$  в [Sm61, Ba65];
- для кусочно линейного локально плоского случая при  $n \neq 3$  (следует из топологического локально плоского случая и результатов Кирби—Зибенмана [Ho90]);
- для топологического локально плоского случая в [Br60, Ma59, Mo60].

Заметим, что элегантное короткое доказательство Брауна топологического локально плоского аналога теоремы Смейла—Бардена послужило началом теории «клеточных множеств», которая стала важной частью геометрической топологии.

Кусочно линейный случай гипотезы Шенфлиса для  $n \geq 3$  (или, что эквивалентно, локально плоский кусочно линейный случай гипотезы Шенфлиса для  $n = 3$ ) остается известной и трудной нерешенной проблемой Шенфлиса [RS72].

## 16.6. Конечность множества гомотопических сфер\*

В этом пункте приводится план доказательства знаменитой теоремы Кервера—Милнора 16.1.1. Хотя этот пункт формально независим от п. 11.9, ознакомиться с тем пунктом может оказаться интересно для читателя.

**16.6.1.** Теорема Кервера—Милнора равносильна следующему: для любого  $n \geq 6$  множество  $\theta_n$  ориентированных  $n$ -многообразий, гомотопически эквивалентных  $S^n$  (т. е. *гомотопических сфер*), с точностью до сохраняющего ориентацию диффеоморфизма конечно.

**Лемма 16.6.2.** *Нормальное расслоение вложсения гомотопической  $n$ -сферы в  $\mathbb{R}^m$  тривиально для  $m \geq 2n + 2$ .*

Препятствие к тривиальности лежит в  $\pi_{n-1}(SO)$ . Поэтому лемма верна для  $n \equiv 3, 5, 6, 7 \pmod{8}$  ввиду вещественной периодичности Ботта 14.5.7. Для других  $n$  доказательство более сложно [KM63].

Для большого  $m$  и гомотопической сферы  $N \subset \mathbb{R}^m$  с нормальным оснащением  $\zeta$  обозначим через  $p(N, \zeta) \in \pi_m(S^{m-n}) \cong \pi_n^S$  класс оснащенного кобордизма (утверждение 14.6.2).

**16.6.3.** (a)  $p(N, x\zeta) = p(N, \zeta) + J(x)$ .

(b) Отображение  $p: \theta_n \rightarrow \pi_n^S / \text{im } J$  корректно определено формулой  $p(N) := p(N, \zeta) + \text{im } J$ .

**16.6.4.** (a) Операция связного суммирования превращает  $\theta_n$  в группу.

(b) Отображение  $p$  — гомоморфизм.

(c) Равенство  $p(N) = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $N$  является границей параллелизуемого многообразия.

Ввиду п. (a, b) и конечности группы  $\pi_n^S$  для  $n > 0$  [FF89, 25.3] теорема Кервера—Милнора следует из конечности  $\ker p$ .

В этом пункте задачи со звездочкой сложны, за доказательством их утверждений следует обратиться, например, к [KM63].

**16.6.5.** (Ср. с задачей 16.2.6.)

(a) *Перестройка* [KM63] дает многообразие, коборданное исходному.

(b)\* Обратно, если многообразия коборданты, то одно можно получить из другого перестройками.

**16.6.6.** (а) Любое ориентируемое многообразие размерности  $\neq 3$  коборданно односвязному.

(б) Любое спинорное (т. е. параллелизуемое в окрестности двумерного остова некоторой триангуляции) многообразие размерности  $\geq 6$  коборданно двусвязному.

(с) Любое спинорное многообразие размерности  $\geq 8$  параллелизуемо в окрестности трехмерного остова некоторой триангуляции и потому коборданно трехсвязному.

В следующих задачах  $N = \partial W$  — гомотопическая  $n$ -сфера и  $W$  параллелизуемо.

**16.6.7.** В этой задаче  $n \geq 5$ .

(а) Если  $W$  стягиваемо, то  $N \cong S^n$ . (Это следует из *теоремы об  $h$ -кобордизме*.)

(б)\* Можно так выбрать оснащение сферы  $S^i \subset W$ , чтобы результат перестройки по этой сфере с этим оснащением был параллелизуемым.

(с) Перестройками можно добиться того, чтобы многообразие  $W$  стало  $([n/2] - 1)$ -связным.

**16.6.8.** В этой задаче, в отличие от других мест книги, мы пропускаем  $\mathbb{Z}$  в обозначениях групп гомологий.

Пусть  $n = 2k$  и  $W'$  получено из  $W$  перестройкой сферы  $S^k \subset W$ .

(а) Существует  $x \in H_k(W')$ , для которого  $H_k(W')/x \cong H_k(W)/[S^k]$ .

(б) Если класс  $[S^k] \in H_k(W)$  примитивен, то  $H_k(W') \cong H_k(W)/[S^k]$ .

(с) Если  $k \geq 4$  четно, то  $\text{rk } H_k(W') \neq \text{rk } H_k(W)$ .

(д)\* Если  $k \geq 4$  четно, то  $N \cong S^n$ .

(е)\* Если  $k \geq 3$  нечетно, то  $N \cong S^n$ .

**16.6.9.** (а)\* Если  $n = 4l - 1 \geq 7$  и  $\sigma(W) = 0$ , то  $N \cong S^n$ .

(б) Если  $n = 4l - 1 \geq 7$  и  $\sigma(W)$  делится на  $\sigma(M)$  для некоторого  $4l$ -многообразия  $M$  из утверждения ??, то  $N \cong S^n$ .

**16.6.10.** Пусть  $n = 4l + 1 \geq 17$ . Перестройками можно добиться того, чтобы  $W$  стало  $2l$ -связным (и осталось параллелизуемым). Реализуем элемент  $x \in H_{2l+1}(W; \mathbb{Z})$  вложением  $x: S^{2l+1} \rightarrow W$ . Обозначим через

$$q(x) \in \ker[i_*: \pi_{2l}(SO_{2l+1}) \rightarrow \pi_{2l}(SO)] \cong \mathbb{Z}_2$$

препятствие к тривиальности нормального расслоения вложения  $x$ . Обозначим  $\text{Arf}(N) := \text{Arf}(q) := \sum_i q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{Z}_2$ , где  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$  — симплектический базис группы  $H_{2l+1}(W; \mathbb{Z})$ . Тогда

- (a)  $q$  — квадратичная форма над  $\mathbb{Z}_2$ ;
- (b)  $\text{Arf}(N)$  действительно зависит только от  $N$ ;
- (c) если  $\text{Arf}(N) = 0$ , то  $N \cong S^n$ .

Заметим, что  $\text{Arf}(N) = 0$  для  $l \neq 1, 3, 7, 15, 31$ . Это решение знаменитой проблемы Кервера, полученное около 2008 г. Хопкинсом (оставшийся случай  $l = 31$  называется проблемой Снайта).

## Литература

Звездочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

- [ABM+] \* *Э. Алкин, Е. Бордачева, А. Мирошников, А. Скопенков*, Инварианты почти вложений графов в плоскость, arXiv:2410.09860.
- [Ad93] \* *M. Adachi*. Embeddings and Immersions. Amer. Math. Soc., 1993. (Transl. of Math. Monographs; V. 124).
- [AGL] Mathematical Economics, ed. by A. Ambrosetti, F. Gori, R. Lucchetti, Lect. Notes Math. 1330, Springer, 1986.
- [An03] \* *Д. В. Аносов*. Отображения окружности, векторные поля и их применения. М: МЦНМО, 2003.
- [ARS01] *P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov*, Embedding products of low-dimensional manifolds in  $\mathbb{R}^m$ , Topol. Appl. 113 (2001), 7–12.
- [Ba65] *D. Barden*. Simply-connected five-manifolds // Ann. of Math. (2). 1965. V. 82. P. 365–385.
- [BCM] \* 13th Hilbert Problem on superpositions of functions, presented by A. Belov, A. Chilikov, I. Mitrofanov, S. Shaposhnikov and A. Skopenkov, <http://www.turgor.ru/lktg/2016/5/index.htm>.
- [BE82] \* *B. Г. Болтянский и В. А. Ефремович*. Наглядная топология. М.: Наука, 1982.
- [Be22] *T. Березин*. Реализуемость одновершинного графа с вращениями на 2-мерном торе, arXiv:2208.08692.
- [BF94] *A. В. Болсинов, А. Т. Фоменко*. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I, II // Мат. Сборник. 1994. Т. 185, N 4. С. 27–80; Т. 185, N 5. С. 27–78.
- [BFM90] \* *A. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко*. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Успехи Мат. Наук. 1990. Т. 45, N 2. С. 49–77.
- [Bi20] \* *A. Bikeev*. Realizability of discs with ribbons on the Möbius strip. Mat. Prosveschenie, 28 (2021), 150-158; erratum to appear. arXiv:2010.15833.

- [BM58] *R. Bott, J. Milnor.* On the parallelizability of the spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. P. 87–89.
- [Br60] *M. Brown.* A proof of the generalized Schoenfliess theorem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 74–76.
- [Br68] *W. Browder.* Embedding smooth manifolds // Труды Международного конгресса математиков, Москва, 1966. М.: Мир, 1968. С. 712–719.
- [Br72] *B. Braudер.* Перестройки односвязных многообразий. М.: Наука, 1984.
- [BSS] *I. Bárány, S. B. Shlosman, and A. Szűcs,* On a topological generalization of a theorem of Tverberg, J. London Math. Soc. (II. Ser.) 23 (1981), 158–164.
- [Bu68] *A. R. Butz,* Space filling curves and mathematical programming, Information and Control, 12:4 (1968) 314–330.
- [Ch99] \* *A. B. Чернавский,* Теорема Жордана. Мат. Просвещение, 3 (1999), 142–157.
- [Co85] *R. L. Cohen.* The immersion conjecture for differentiable manifolds // Ann. of Math. (2). 1985. V. 122. P. 237–328.
- [CR] \* *P. Курант, Дж. Роббинс,* Что такое математика. М.: МЦНМО, 2004.
- [CRS00] *A. Cavicchioli, D. Repovš, A. B. Skopenkov.* An extension of the Bol'sinov–Fomenko theorem on classification of Hamiltonian systems // Rocky Mount. J. Math. 2000. V. 30, N 2. P. 447–476.
- [CRS04] \* *M. Ценцељ, Д. Реповш, А. Скопенков.* О теоремах вложения Браудера–Левина–Новикова // Труды МИРАН. 2004. Т. 247. С. 280–290.
- [CRS07] *M. Cencelj, D. Repovš, M. Skopenkov.* Classification of framed links in 3-manifolds // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 2007. V. 117, N 3. P. 301–306. Препринт: arxiv:math/0705.4166.
- [CS11] *D. Crowley, A. Skopenkov.* A classification of smooth embeddings of 4-manifolds in 7-space, II // Internat. J. Math. 2011. V. 22, N 6. P. 731–757. Препринт: arxiv:math/0808.1795.
- [Cu81] *M. Culler.* Using surfaces to solve equations in free groups // Topology. 1981. 20. P. 133–145.
- [DNF79] \* *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия: методы и приложения. М.: Наука, 1979.

- [DNF84] \* *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия: методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
- [DW59] *A. Dold, H. Whitney.* Classification of oriented sphere bundles over a 4-complex // Ann. Math. 1959. V. 69. P. 667–677.
- [DZ93] \* *Я. Дымарский, И. Заверач.* Пересечение двух кривых на торе. Квант. 1993. N 6. C. 17–22.
- [E84] \* *H. M. Edwards.* Galois Theory. New York: Springer-Verlag, 1984. (Graduate Texts in Mathematics; V. 101).
- [FF89] \* *А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс.* Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
- [FQ90] *M. H. Freedman and F. S. Quinn.* Topology of 4-Manifolds, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.
- [Fr34] *P. Franklin, P.* A Six Colour Problem. J. Math. Phys. 13, 363–369, 1934.
- [FT07] \* *С. Л. Табачников, Д. Б. Фукс.* Математический дивертимент. М.: МЦНМО, 2011.
- [GDI] \* *А.А. Глибичук, А.Б. Дайнек, Д.Г. Ильинский, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков, А.А. Чернов,* Элементы дискретной математики в задачах, М, МЦНМО, 2016. Обновляемая версия части книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/dscrbook.pdf>
- [Gl62] *H. Gluck.* The embedding of two-spheres in the four-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104, N 2. P. 308–333.
- [GS99] \* *Р. Гомпф, А. Штипишиц.* Четырехмерные многообразия и исчисление Кирби. М.: МЦНМО, 2013.
- [Ha] \* *Ф. Харари.* Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [Ha73] \* W. Haken, Connections Between Topological and Group Theoretical Decision Problems, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 71 (1973) 427–441.
- [Ha66] *A. Haefliger.* Differential embeddings of  $S^n$  in  $S^{n+q}$  for  $q > 2$ . Ann. Math. (2). 1966. V. 83. P. 402–436.
- [Ha07] \* *A. Hatcher.* Notes on basic 3-manifold topology. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mfds.pdf>.
- [HH62] *A. Haefliger, M. W. Hirsch.* Immersions in the stable range // Ann. of Math. (2). 1962. V. 75, N 2. P. 231–241.

- [Hi60] *M. W. Hirsch.* Immersions of manifolds // Trans. Amer. Mat. Soc. 1960. V. 93. P. 242—276.
- [Hi76] \* *M. Хирш.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
- [Hi95] \* *F. Hirzebruch.* Division Algebras and Topology // Numbers. New York: Springer-Verlag, 1991. (Graduate Texts in Mathematics; V. 123). P. 281—302.
- [Ho] \* The Hopf fibration, <https://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk>
- [Ho90] \* *K. Horvatić.* Klasični problemi geometrijske topologije. Zagreb: Tehnička knjiga, 1990.
- [HP64] *A. Haefliger, V. Poenaru.* La classification des immersions combinatoires // Publ. Math. IHES. 1964. V. 23. P. 75—91.
- [Is] \* <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>
- [Ka84] *U. Kaiser.* Immersions in codimension 1 up to regular homotopy // Arch. Math. (Basel). 1984. V. 51, N 4. P. 371—377.
- [Ke59] *M. Kervaire.* An interpretation of G. Whitehead's generalization of H. Hopf's invariant // Ann. of Math. (2). 1959. V. 69. P. 345—362.
- [Ki89] \* *R. C. Kirby.* The Topology of 4-Manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1989. (Lect. Notes Math.; V. 1374).
- [KM63] *M. Kervaire, J. Milnor.* Groups of homotopy spheres, I // Ann. of Math. (2). 1963. V. 77. P. 504—537.
- [Ko81] \* *U. Koschorke.* Vector Fields and Other Vector Bundle Morhpisms—a Singularity Approach. Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1981. (Lect. Notes Math.; V. 847).
- [Ko01] *U. Koschorke.* Homotopy classification of line fields and of Lorentz metrics on closed manifolds // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2002. V. 132, N 2. P. 281—300.
- [Ko21] *E. Kogan.* On the rank of  $\mathbb{Z}_2$ -matrices with free entries on the diagonal, arXiv:2104.10668.
- [KPS] \* *A. Kaibkhanov, D. Permyakov and A. Skopenkov.* Realization of graphs with rotation // <http://www.turgor.ru/lktg/2005/3/index.htm>.
- [KS79] \* *P. Керби, М. Шарлеман.* Восемь ликов гомологической трехмерной сферы Пуанкаре // УМН. 1982. Т. 37, Н 5. С. 139—159.
- [Ku15] *G. Kuperberg.* Algorithmic homeomorphism of 3-manifolds as a corollary of geometrization, arXiv:1508.06720.

- [Le65] *J. Levine.* Unknotting spheres in codimension 2 // Topology. 1965. V. 4. P. 9—16.
- [Le65'] *J. Levine.* A classification of differentiable knots // Ann. of Math. (2). 1965. V. 82. P. 15—50.
- [LF] [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Linking\\_form](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Linking_form)
- [Lo13] *M. de Longueville.* A course in topological combinatorics. Universitext. Springer, New York (2013).
- [LZ] \* *S. Lando and A. Zvonkin.* Graphs on Surfaces and Their Applications. Springer, 2004.
- [Ma59] *B. Mazur.* On embeddings of spheres // Bull. Amer. Math. Soc. 1959. V. 65. P. 91—94.
- [Ma60] *W. S. Massey.* On the Stiefel—Whitney classes of a manifold, 1, Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 92—102.
- [Ma62] *W. S. Massey.* On the Stiefel—Whitney classes of a manifold, 2, Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 938—942.
- [Ma69] *W. S. Massey.* Pontryagin squares in the Thom space of a bundle // Pacific J. Math. 1969. V. 31. P. 133—142.
- [Ma80] \* *R. Mandelbaum.* Four-Dimensional Topology: An introduction // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1980. 2. P. 1—159.
- [Ma03] \* *J. Matoušek.* Using the Borsuk-Ulam theorem: Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Springer Verlag, 2008.
- [Ma07] \* *C. B. Матвеев.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.
- [MF90] \* *C. B. Матвеев, A. T. Фоменко.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Наука, 1997.
- [MK58] *J. W. Milnor and M. A. Kervaire.* Bernoulli numbers, homotopy groups and a Theorem of Rohlin, Proceedings of the International Mathematical Congress, Edinburgh, 1958, pp. 454—458.
- [MM95] *Yu. G. Makhlin, T. Sh. Misirpashaev.* Topology of vortex-soliton intersection: invariants and torus homotopy // JETP Lett. 1995. V. 61. P. 49—55.
- [MNS] \* *A. Мирошников, О. Никитенко и А. Скопенков.* Циклы в графах и в гиперграфах: в направлении теории гомологий, arXiv:2406.16705.

- [Mo60] *M. Morse.* A reduction of the Schoenfliess extension problem // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 113–117.
- [Mo89] *B. Mohar.* An obstruction to embedding graphs in surfaces. Discrete Math. 1989. V. 78. P. 135–142.
- [MS74] \* *Дж. Милнор, Дж. Сташефф.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
- [MT01] \* *B. Mohar, C. Thomassen.* Graphs on Surfaces. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2001.
- [No76] \* *C. П. Новиков.* Топология-1. М.: Наука, 1976. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Основные направления, 12).
- [Om18] \* *A. Омельченко,* Теория графов. М.: МЦНМО, 2018.
- [P] \* *Платон.* Федон, Пир, Федр, Парменид. М.: Мысль, 1999.
- [Pa57] *C. D. Papakyriakopoulos.* On Dehn’s lemma and the asphericity of knots // Ann. of Math. (2). 1957. V. 66. P. 1–26.
- [Po76] \* *Л. С. Понtryгин.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976.
- [Pr14] \* *B. B. Прасолов.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2014.
- [Pr14'] \* *B. B. Прасолов.* Элементы теории гомологий. М.: МЦНМО, 2014.
- [Pr15] \* *B. B. Прасолов.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 2015.
- [PS97] \* *B. B. Прасолов, Ю. П. Соловьев.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997.
- [RS72] \* *K. П. Рурк и Б. Дж. Сандерсон.* Введение в кусочно-линейную топологию, Москва. Мир. 1974.
- [RS99] \* *D. Repovš and A. B. Skopenkov.* New results on embeddings of polyhedra and manifolds into Euclidean spaces, Russ. Math. Surv. 54:6 (1999), 1149–1196.
- [RS99'] *Д. Реповш, А. Скопенков.* Теория препятствий для расслоений Зейферта и классификация интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1999. Т. 54, № 3. С. 183–184.
- [RSS05] *D. Repovš, M. Skopenkov, F. Spaggiari.* On the Pontryagin–Steenrod–Wu Theorem // Israel J. Math. 2005. V. 145. P. 341–347. Препринт: arxiv:math/0808.1209.

- [Ru73] \* *T. B. Rushing.* Topological Embeddings. New York: Academic Press, 1973.
- [S] \* *Д. Судзуки.* Основы дзэн-буддизма. Наука дзэн — ум дзэн. Київ: Преса України, 1992.
- [SE62] \* *H. Стінрод, Д. Эпштейн.* Когомологические операции. М.: Наука, 1983.
- [Sh89] \* *Ю. А. Шашкін,* Неподвижные точки, М., Наука, 1989.
- [Sk] \* *A. Скопенков.* Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf>.
- [SK86] \* *T. L. Saaty and P. C. Kainen.* The Four-Color Problem: Assaults and Conquest. New York: Dover, 1986.
- [Sk02] *A. Skopenkov.* On the Haefliger—Hirsch—Wu invariants for embeddings and immersions // Comment. Math. Helv. 2002. V. 77. P. 78—124.
- [Sk05] \* *A. Скопенков.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Мат. Просвещение. 2005. 9. С. 116—128.
- [Sk05t] *A. Skopenkov.* A classification of smooth embeddings of 4-manifolds in 7-space, I // Topol. Appl. 2010. V. 157. P. 2094—2110. Препринт: arxiv:math/0512594.
- [Sk06] \* *A. Skopenkov,* Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.
- [Sk06m] *A. Skopenkov.* A classification of smooth embeddings of 3-manifolds into 6-space // Math. Zeitschrift. 2008. V. 260, N 3. P. 647—672. Препринт: arxiv:math/0603429.
- [Sk08] \* *A. Скопенков.* Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах. М.: МЦНМО, 2016 (3е издание). Препринт: arxiv:0801.1568.
- [Sk10] \* *A. Скопенков,* Вложения в плоскость графов с вершинами степени 4, Мат. просвещение, 21 (2017), arXiv:1008.4940.
- [Sk10'] \* *A. Скопенков.* Объемлемая однородность. М.: МЦНМО, 2010. Препринт: arXiv:1003.5278.
- [Sk14] \* *A. Skopenkov,* Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory, Mat. Prosveschenie, 32 (2024), 125–159, arXiv:1402.0658.
- [Sk16c] \* *A. Skopenkov,* Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification, to appear in Boll. Man. Atl. [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings\\_in\\_Euclidean\\_space:\\_an\\_introduction\\_to\\_their\\_classification](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification)

- [Sk16h] \* *A. Skopenkov*, High codimension links, to appear in *Boll. Man. Atl.* [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High\\_codimension\\_links](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High_codimension_links).
- [Sk16i] \* *A. Skopenkov*, Isotopy, submitted to *Boll. Man. Atl.* <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>.
- [Sk18] \* *A. Skopenkov*. Invariants of graph drawings in the plane. *Arnold Math. J.*, 6 (2020) 21–55; full version: arXiv:1805.10237.
- [Sk20] \* *A. Скопенков*. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, интернет-страница книги.  
<http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combttop13.htm#photo>.
- [Sk20u] \* *A. Skopenkov*. A user's guide to basic knot and link theory, in: *Topology, Geometry, and Dynamics, Contemporary Mathematics*, vol. 772, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 281–309. Russian version: *Mat. Prosveschenie* 27 (2021), 128–165. arXiv:2001.01472.
- [Sk20e] \* *A. Skopenkov*. Extendability of simplicial maps is undecidable, *Discr. Comp. Geom.*, 69:1 (2023), 250–259, arXiv:2008.00492.
- [Sm61] *S. Smale*. Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than 4 // *Ann. of Math.* (2). 1961. V. 74. P. 391–406.
- [So04] *А. Б. Сосинский*. А не может ли гипотеза Пуанкаре быть неверной? // Геометрическая топология и теория множеств. М.: Hayka, 2004. (Тр. МИАН; Т. 247). С. 247.
- [Sp] \* Sperner's lemma defeats the rental harmony problem, <https://www.youtube.com/watch?v=7s-YM-kcKME>.
- [SS03] *F. W. Simmons and F. E. Su*. Consensus-halving via theorems of Borsuk-Ulam and Tucker, *Math. Social Sciences* 45 (2003) 15–25. <https://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/tucker.pdf>.
- [St40] *E. Stiefel*. Über Richtungsfelder in den Projektiven Räumen und einen Satz aus den Reelen Algebra // *Comment. Math. Helv.* 1940–41. V. 13. P. 201–218.
- [St63] *J. Stallings*. On topologically unknotted spheres // *Ann. of Math.* (2). 1963. V. 77. P. 490–503.
- [St68] \* *P. Стонг*. Заметки по теории кобордизмов. М.: Мир, 1973.
- [ST07] \* *A. Скопенков и А. Телишев*. И вновь о критерии Курантовского планарности графов, *Мат. Просвещение*, 11 (2007), 159–160.
- [ST34] \* *Г. Зейферт, В. Трельфалль*. Топология. М.—Л.: ОНТИ, 1938.

- [Ta87] \* *C. Табачников.* Соображения непрерывности // Квант. 1987. № 9. С. 45–50.
- [Wa68] \* *A. H. Wallace.* Differential Topology: First Steps. W. A. Benjamin, 1968.
- [Ya99] *Z. Yang.* Computing Equilibria and Fixed Points: The Solution of Nonlinear Inequalities, Kluwer, Springer Science + Business Media, 1990.
- [Ze] \* *E. C. Zeeman,* A Brief History of Topology, UC Berkeley, October 27, 1993, On the occasion of Moe Hirsch's 60th birthday, <http://zakuski.utsa.edu/~gokhman/ecz/hirsch60.pdf>.
- [Zi10] \* *D. Živaljević,* Borromean and Brunnian Rings, <http://www.rade-zivaljevic.appspot.com/borromean.html>.
- [ZSS] \* Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. Сборник под редакцией А. Заславского, А. Скопенкова и М. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2018. Обновляемая версия части книги: <http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>.