СТУДЕНЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ МЕХМАТА МГУ 2010-2011 [1]

**И. В. Аржанцев, [2] В. И. Богачев, [3] А. И. Гарбер, [4]
А. А. Заславский, [5] В. Ю. Протасов, [6] А. Б. Скопенков [7]**

Мы приводим задачи заключительных туров олимпиад мехмата МГУ 2010 и 2011 годов, а также математического боя между командой преподавателей и командой первокурсников на мехмате МГУ (вместе с указаниями, решениями и комментариями). [8] Заключительный тур 2011 года был совмещен с универсиадой-2011, поэтому в нем приняли участие студенты из ВШЭ, МФТИ и СПБГУ. Введение и задачи прошлых олимпиад приведены в [BRST, ABZPRS]. Имена победителей приведены в конце заметки.

Мы благодарим механико-математический факультет МГУ, попечительский совет мехмата МГУ и компанию 'Атон' за награждение победителей всемехматовской олимпиады 2011 и поддержку командирования команды мехмата на международную олимпиаду IMC. Научно-методическое обеспечение универсиад - всемехматовских олимпиад еще нуждается в финансовой поддержке.

2010-1. Пусть $f\colon [0,1]\to[0,1]$ и $g\colon [0,1]\to[0,1]$ — непрерывные функции, для которых $f(g(x))=g(f(x))$ при любом $x\in[0,1]$. Предположим, что g непрерывно дифференцируема на $(0,1)$ и $g'(x)\le 1$ для $x\in(0,1)$. Докажите, что существует точка $t\in[0,1]$, для которой $f(t)=g(t)=t$.

2010-2. Даны векторы $v_1,\dots,v_n\in\mathbb{R}^k$. Обозначим через $(v_1,\dots,v_n)$ матрицу размера $k\times n$, образованную их координатами. Докажите, что существует m и $w_1,\dots,w_n\in\mathbb{R}^m$ со следующими двумя условиями:
(i) $(w_1,\dots,w_n)(v_1,\dots,v_n)^T=0\in\mathbb{R}^{mk}$;
(ii) для любого l и любых элементов $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{R}^l$ таких, что $(u_1,\dots,u_n)(v_1,\dots,v_n)^T=0\in\mathbb{R}^{lk}$, существует линейное отображение $T\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, для которого $T(w_i)=u_i$ при любом $i=1,\dots,n$.

2010-3. Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица размера $n\times n$ с вещественными элементами. Предположим, что для любого подмножества $I\subseteq\{1,...,n\}$ и матрицы $A_I:=(a_{ks})_{k,s\in I}$ выполнено $A_I^n=0$. Докажите, что матрицу A можно сделать верхнетреугольной с нулями на главной диагонали конечным числом следующих преобразований: сначала переставляются две строки в матрице, а потом переставляются два столбца с такими же номерами.

2010-4. Дана пирамида $SABC$. Рассмотрим сферы X, вписанные в трехгранный угол с вершиной S. Найти ГМТ пересечения трех плоскостей, касательных к X, проходящих

[1]Мат. Просвещение, 16 (2012). Обновляемая версия: http://mccme.ru/circles/oim/stolymp/mechm1011.pdf

[2]arjantse@mccme.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[3]vibogachev@yandex.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[4]alexeyigorevich@rambler.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[5]zaslavsky@mccme.ru; Центральный Экономико-Математический Институт.

[6]v-protassov@yandex.ru; механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

[7]skopenko@mccme.ru; инфо: http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/PAPERSCI.pdf; механико-математический факультет Московского Государственного Университета, Независимый Московский Университет и Московский Институт Открытого Образования. Поддержан грантом фонда Саймонса.

[8]Вот кто предложил задачи и приведенные решения (предложивший не обязательно является автором): И. Аржанцев (2010-2,3), В. Богачев (2010-1, 2011-3,5, МБ-2, МБ-5), В. Брагин (2010-5), С. Гайфуллин (2010-3), А. Гарбер (МБ-4, 2011-5), И. Григорьев (2011-2, МБ-1), А. Ефимов (МБ-4), А. Заславский (2010-4, МБ-3), Ф. Ивлев (МБ-6), А. Клячко (МБ-7), С. Ландо (МБ-8), Н. Назаренко (МБ-6), Ф. Петров (2011-5), А. Пешнин (2010-3), В. Протасов (2011-1,4, МБ-6), А. Райгородский (2010-5), А. Скопенков (МБ-1, МБ-7, МБ-8). Задачи 2011-4 и 2011-5 взяты из книг. Все варианты составлены В.И. Богачевым.

через прямые AB, BC и CA, соответственно, и не содержащих грани пирамиды. (S, A, B, C фиксированы, а X меняется.)

2010-5. Для каких

(a) нечетных n (b) четных n

можно покрасить вершины n-мерного куба в n цветов так, что для любой вершины ее n соседей имеют разные цвета?

2011-1. Функция $f\colon\ (0,1) \to (0,+\infty)$ обладает следующим свойством:

$$\frac{f(x)}{f(y)} \le 1 + \frac{x}{y} \quad \text{для всех } x, y \in (0,1).$$

Докажите, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2011-2. Пусть G — связный (неориентированный) граф с n вершинами $1, 2, \dots, n$, $n \ge 3$. Для каждой пары ребер ij, jk (имеющих общую вершину) возьмем циклы (ijk) и (ikj). Докажите, что взятые циклы порождают всю подгруппу четных перестановок.

(Напомним, что циклом (abc) называется перестановка множества $\{1, 2, \dots, n\}$, переводящая a в b, b в c, c в a и каждый другой элемент в себя.)

2011-3. Непрерывная функция $h : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ строго возрастает и сюръективна. Докажите, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{h(t)}{t^2}\, dt = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{h^{-1}(s)}\, ds,$$

если хотя бы один интеграл конечен.

2011-4. Пусть M, N и A — различные внутренние точки шара в трехмерном пространстве, ограниченного сферой Σ. Прямые AM и AN перпендикулярны диаметру сферы Σ, проходящему через A. Две различные сферы Σ_1 и Σ_2 касаются сферы Σ и проходят через M, N, A. Докажите, что радиус сферы Σ равен сумме радиусов сфер Σ_1 и Σ_2.

2011-5. Пусть A — матрица $n\times n$ с вещественными элементами. Матрица $H = (A+A^T)/2$ положительно определена. Докажите, что $\det H \le \det A$.

МБ-1. При каких $N > 1$ и $K > 1$ циклы $(1, 2, \dots, N)$ и $(N, N+1, \dots, N+K-1)$ порождают всю группу перестановок $(N+K-1)$-элементного множества?

МБ-2. Существует ли непостоянная функция $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, имеющая конечную производную в каждой точке, равную нулю на некотором всюду плотном множестве?

МБ-3. Эллипс с фокусами F_1 и F_2 касается изнутри в двух точках окружности с центром O и радиусом r. Докажите, что эксцентриситет эллипса равен OF_1/r.

МБ-4. Пусть x_i, y_i — вещественные числа, где $i \in \mathbb{Z}/(2r+1)\mathbb{Z}$, $r \ge 1$. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{2r+1} x_i = \sum_{i=1}^{2r+1} y_i = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_{i,j} := x_i y_j - x_j y_i \ge 0 \quad \text{при} \quad j \in \{i+1, \dots, i+r\}.$$

Тогда

$$3 \sum_{\substack{1\le i\le r,\\ r+1\le j\le 2r,\\ j\in\{i+1,\dots,i+r\}}} \Delta_{i,j} \le \sum_{\substack{1\le i\le 2r+1,\\ j\in\{i+1,\dots,i+r\}}} \Delta_{i,j}.$$

(На матбое предлагалась эта задача для $r = 8$.)

МБ-5. Существует ли такой многочлен P с целыми коэффициентами, что $|P(x) - 10^{-1}| < 10^{-4}$ для всех $x \in [2/25; 3/25]$?

МБ-6. На плоскости даны ограниченный выпуклый многоугольник и треугольник. Каждая из прямых, содержащих стороны треугольника, делит площадь многоугольника пополам. Докажите, что площадь треугольника не превосходит четверти площади многоугольника.

МБ-7. Докажите, что если n взаимно просто с $\varphi(n)$, то любая группа из n элементов является циклической. Здесь $\varphi(n)$ — количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n.

МБ-8. На сфере заданы конечное семейство A непересекающихся окружностей и семейство B из такого же количества непересекающихся окружностей. Обязательно ли существуют два многогранника $f, g \subset \mathbb{R}^3$, гомеоморфных сфере, для которых $f \cap g$ есть объединение замкнутых несамопересекающихся ломаных, образующее семейство A на f и семейство B на g?

Примечания. Окружности в семействах *не занумерованы.* Здесь многогранником называется его *поверхность*, а не внутренность. Многогранники f и g *несамопересекающиеся* и *не обязательно выпуклые.* Многогранник называется *гомеоморфным сфере*, если любая замкнутая ломаная, лежащая на его поверхности, разбивает многогранник на две части. Подразумевается теоретико-множественное пересечение $f \cap g$, никаких условий трансверсальности не накладывается. Объединение $f \cap g$ замкнутых несамопересекающихся ломаных *образует* семейство A на f, если существует взаимно-однозначное соответствие между связными компонентами дополнения $f - (f \cap g) = f - g$ и связными компонентами дополнения $S^2 - A$, при котором две компоненты в $f - g$ примыкают к окружности из $f \cap g$ тогда и только тогда, когда соответствующие компоненты в $S^2 - A$ примыкают к окружности из A.

Решения и комментарии к всемехматовской олимпиаде 2010

2010-1. Если $g(a) = a$ и $g(b) = b$, $a \leq b$, то $g(s) = s$ при всех $s \in [a, b]$, ибо если $g(s) < s$, то $g(b) < b$ при $b > s$ из-за $g' \leq 1$. Так как $f(g) = g(f)$, то $f([a, b]) \subset [a, b]$, значит, существует $t \in [a, b]$ с $f(t) = t$.

2010-2. Условие $x(v_1, \ldots, v_n)^T = 0 \in \mathbb{R}^k$ на вектор-строку $x \in \mathbb{R}^n$ является системой линейных уравнений с матрицей $(v_1, \ldots, v_n)^T$. Возьмем векторы-столбцы $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^m$, для которых строки матрицы $(w_1, \ldots, w_n)$ порождают пространство решений этой системы. Тогда условия (i) и (ii), очевидно, выполнены. (Для доказательства свойства (ii) заметим, что условие '$T(w_i) = u_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$' равносильно условию '$(u_1, \ldots, u_n) = T'(w_1, \ldots, w_n)$' на $l \times m$-матрицу T' линейного отображения T.)

Замечание. Переход от матрицы системы к матрице ее некоторого фундаментального набора решений (т.е. от набора $v_1, ..., v_n$ к набору $w_1, ..., w_n$) научно называют *линейным преобразованием Гейла*, см., например [OP].

Авторская формулировка. Пусть $v_1, ..., v_n$ — элементы векторного пространства V. Докажите, что найдутся такое векторное пространство W и такие элементы $w_1, ..., w_n \in W$, что

(i) $v_1 \otimes w_1 + ... + v_n \otimes w_n = 0$ в $V \otimes W$;

(ii) для любого векторного пространства U и любых элементов $u_1, ..., u_n \in U$, для которых $v_1 \otimes u_1 + .. + v_n \otimes u_n = 0$ в $V \otimes U$, найдется такое линейное отображение $\varphi : W \to U$, что $\varphi(w_i) = u_i$, $i = 1, ..., n$.

Авторское решение. Можно считать, что $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$. Рассмотрим линейное пространство W_1 с базисом $e_1, ..., e_n$, и вложим в него сопряженное пространство V^*:

$$\imath \colon V^* \to W_1, \qquad l \mapsto l(v_1)e_1 + ... + l(v_n)e_n.$$

Рассмотрим факторпространство $W := W_1/\imath(V^*)$ и проекцию $p : W_1 \to W$. Положим $w_i := p(e_i)$. Для того, чтобы проверить свойство (i), достаточно заметить, что условие $v_1 \otimes w_1 + ... + v_n \otimes w_n = 0$ в $V \otimes W$ равносильно тому, что $l(v_1)w_1 + ... + l(v_n)w_n = 0$ в W для любой функции $l \in V^*$. Для проверки свойства (ii) определим линейное отображение $\psi : W_1 \to U$ условиями $\psi(e_i) = u_i$. Чтобы проверить, что отображение ψ индуцирует отображение $\phi : W \to U$, достаточно показать, что $\psi(\imath(V^*)) = 0$. Последнее следует из того, что $v_1 \otimes u_1 + ... + v_n \otimes u_n = 0$ в $V \otimes U$.

2010-3. По матрице A построим ориентированный граф на n вершинах, в котором стрелка от вершины i в вершину j проведена в точности тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Достаточно показать, что в этом графе нет ориентированных циклов. Воспользуемся индукцией по n. Пусть ориентированный цикл есть. Тогда по предположению индукции он имеет длину n. Наличие стрелки вне этого цикла приводит к ориентированному циклу меньшей длины. Значит, наш граф является простым ориентированным циклом, и тогда определитель матрицы A отличен от нуля, противоречие.

2010-4. *Ответ.* Гипербола, лежащая в плоскости, перпендикулярной ABC и проходящей через прямую точек, равноудаленных от граней трехгранного угла $SABC$. Фокусы гиперболы — точки пересечения касательных к сфере в этой плоскости с ABC.

Решение. Рассмотрим сначала плоский аналог задачи. Пусть к окружности, вписанной в угол POQ, проведены из точек P, Q касательные, отличные от сторон угла. Тогда, если R — точка пересечения этих касательных, то нетрудно видеть, что $|PR-QR| = |PO-QO|$. Следовательно, при изменении радиуса окружности точка R будет двигаться по гиперболе с фокусами P, Q, проходящей через O.

Возвращаясь к исходной задаче, заметим, что полюс плоскости ABC относительно вписанной сферы, вершина трехгранного угла и точка пересечения вторых касательных плоскостей лежат на одной прямой, причем точка пересечения этой прямой с плоскостью ABC будет для этих трех точек четвертой гармонической. Значит, если множество полюсов — коника, то и множество точек пересечения тоже. Но все полюса лежат в плоскости, проходящей через линию центров сфер и перпендикулярной ABC. Таким образом, задача свелась к плоскому аналогу, и мы получаем приведенный выше ответ. Отметим также, что это рассуждение обобщается на любую размерность.

2010-5. (a) *Ответ.* Ни при каких.

Решение. Возьмем все вершины, среди координат которых две единицы и $n-2$ нуля, а также вершину со всеми нулевыми координатами. Всего взято $C_n^2 + 1$ вершин. Среди любых $[n/2] + 1$ вершин есть две, соединенные ребром. Значит, необходимое для такой раскраски число цветов не меньше $\lceil (C_n^2 + 1)/([n/2]) \rceil = n + 1$.

(b) *Ответ.* При $n = 2^k$.

Доказательство необходимости. Из каждой вершины первого или второго цвета выходит ровно одно ребро, соединяющее вершины первого и второго цвета. Количество таких ребер равно как количеству вершин первого цвета, так и количеству вершин второго цвета. Поэтому всех цветов поровну. Тогда 2^n делится на n. Значит, $n = 2^k$.

Построение примера раскраски для $n = 2^k$. Занумеруем цвета упорядоченными наборами из нулей и единиц длины k. Покрасим вершину

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \text{где} \quad a_s \in \{0, 1\} \quad \text{в цвет} \quad a_1\overline{1} \oplus a_2\overline{2} \oplus \ldots a_n\overline{n},$$

где $\overline{s}$ — набор, соответствующий двоичной записи числа s и $\oplus$ — сумма по модулю 2 (фактически суммируются наборы $\overline{s}$, для которых $a_s = 1$).

Докажем, что такая раскраска удовлетворяет условиям задачи. Рассмотрим вершину $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Предположим, что ее соседи $(a_1, a_2, \ldots, a_i \oplus 1, \ldots, a_n)$ и $(a_1, a_2, \ldots, a_j \oplus 1, \ldots, a_n)$ имеют одинаковый цвет. Тогда

$$a_1\overline{1} \oplus a_2\overline{2} \oplus \ldots \oplus a_n\overline{n} \oplus \overline{i} = a_1\overline{1} \oplus a_2\overline{2} \oplus \ldots \oplus a_n\overline{n} \oplus \overline{j}.$$

Поэтому $\overline{i} = \overline{j}$. Значит, $i = j$. Таким образом, предъявленная раскраска удовлетворяет условию задачи.

Решения и комментарии к всемехматовской олимпиаде 2011

1. Фиксируем произвольное $y \in (0,1)$. Для любого $x \in (0,y)$ имеем $f(x) \le \left(1+\frac{x}{y}\right) f(y) \le 2\,f(y)$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена на интервале $(0,y)$. Если она не имеет предела при $x \to 0$, то найдутся последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, стремящиеся к нулю, для которых существуют пределы $a := \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \ne \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) =: b$. Фиксируем произвольное n. Для любого k имеем $f(a_k) \le \left(1+\frac{a_k}{b_n}\right) f(b_n)$. В пределе при $k \to \infty$ получаем $a \le f(b_n)$, что в пределе при $n \to \infty$ даёт $a \le b$. Аналогично $b \le a$, откуда $a = b$, что противоречит предположению.

2. Достаточно доказать утверждение для дерева. Для дерева оно доказывается по индукции с отбрасыванием висячей вершины. Другое решение приведено в [G2].

3. *Первое решение.* Если функция h непрерывно дифференцируема на $[1,R]$ и строго возрастает, то замена $t = h^{-1}(s)$ и интегрирование по частям дают

$$\int_1^R \frac{1}{h^{-1}(s)}\,ds = \int_1^{h^{-1}(R)} \frac{h'(t)}{t}\,dt = \int_1^{h^{-1}(R)} \frac{h(t)}{t^2}\,dt - 1 + \frac{R}{h^{-1}(R)}. \tag{1}$$

Это равенство остается в силе и без предположения о непрерывной дифференцируемости, ибо можно взять гладкие возрастающие функции

$$h_n(t) = \int_0^1 h(t+\frac{s}{n})\,\varrho(s)\,ds,$$

где ϱ – гладкая функция с носителем в $[0,1]$ и единичным интегралом, причем при $t > T$ мы полагаем $h(t) = h(T)$. Эти функции равномерно сходятся к h на $[1,R]$, строго возрастают, причем $h_n^{-1}(s) \to h^{-1}(s)$ при $s \in (0,T]$ (при фиксированном $s \in (0,T]$ значения $h_n^{-1}(s)$ определены при достаточно больших n). В самом деле, если $h_{n_k}^{-1}(s) \to y$, то $s = h_{n_k}(h_{n_k}^{-1}(s)) \to h(y)$, т.е. $y = h^{-1}(s)$. Тем самым (1) верно при наших условиях.

Если интеграл от функции $h(t)/t^2$ конечен, то найдется последовательность $t_n \to \infty$, для которой $h(t_n)/t_n \to 0$. Значит, $R_n = h(t_n) \to \infty$, $R_n/h^{-1}(R_n) \to 0$, откуда следует доказываемое. Это же верно, если интеграл от функции $1/h^{-1}(s)$ конечен.

Второе решение. Пусть интеграл от функции $f(s) = 1/h^{-1}(s)$ конечен. Тогда интеграл от f по $[1,+\infty)$ равен площади под графиком f. Последняя по теореме Фубини равна интегралу по $t \in (0,1)$ от длины множества

$$P_t = \{u \ge 1\colon\ f(u) \le t\} = [1, h(t^{-1})],$$

ибо $f(1) = 1$, $f(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Длина множества P_t равна $h(t^{-1}) - 1$. Наконец, замена $u = t^{-1}$ дает

$$\int_0^1 h(t^{-1})\,dt = \int_1^\infty h(u)u^{-2}\,du.$$

Аналогично рассматривается случай, когда интеграл от функции $h(t)t^{-2}$ конечен.

4. Пусть O – центр внешней сферы, а O_1, O_2 – центры внутренних сфер, M_1, M_2 — точки касания (M_i лежит на сфере с центром O_i, $i = 1,2$). Из условия следует, что отрезок OA перпендикулярен плоскости, содержащей общие точки двух внутренних сфер, а значит, параллелен прямой O_1O_2. Проведем сечение плоскостью, проходящей через точки O, O_1, O_2. Эта плоскость содержит точки касания M_1, M_2 и точку A. Получаем две окружности с центрами O_1, O_2, пересекающиеся в точке A и касающиеся изнутри в точках M_1, M_2 окружности с центром O. Надо доказать, что радиус R внешней окружности равна сумме радиусов $R_1 + R_2$ внутренних.

Обозначим $f(X) := XO_1 - XO_2$. Пусть B — вторая точка пересечения внутренних окружностей. Возьмем на прямой OA точку C такую, что O_1O_2AC — равнобедренная трапеция. Тогда O_1BO_2C — параллелограмм, откуда $CO_1 = R_2, CO_2 = R_1$, следовательно, $f(C) = CO_1 - CO_2 = R_2 - R_1$. Из касания окружностей заключаем, что $OO_1 + R_1 =$

$OO_2 + R_2 = R$, откуда $f(O) = OO_1 - OO_2 = R_2 - R_1$. Так как функция $f(X)$ строго монотонна на прямой OA, то уравнение $f(C) = R_2 - R_1$ имеет не более одного решения $C \in OA$. Поэтому $C = O$, откуда $OO_1 = R_2$, и значит $R_2 + R_1 = R$.

Примечание. Центр большой окружности в сечении — это так называемая "точка двух велосипедистов" для двух маленьких окружностей [P]. У этой точки масса интересных свойств (только на международной олимпиаде школьников задачи, в которых эта точка так или иначе фигурировала, появлялись, как минимум, трижды).

5. *Первое решение.* Так как H положительно определена, то $H = D^2$ для некоторой положительно определенной матрицы D. Обозначим $W := (A - A^t)/2$. Тогда $A = H + W = D(I + D^{-1}WD^{-1})D$. Так как W кососимметрическая, то и $C := D^{-1}WD^{-1}$ кососимметрическая. Поэтому утверждение задачи вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если вещественная матрица C кососимметрическая, то* $\det(E + C) \geq 1$*, где E — единичная матрица.*

Доказательство. Собственные числа матрицы C разбиваются на пары $(it, -it)$ с вещественными t. Для каждого из таких t имеем $(1 + it)(1 - it) \geq 1$. Перемножая по всем t (с учетом кратности) получаем требуемое. QED

Второе решение. Будем рассматривать матрицы A и H как матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$, соответственно. В силу положительной определенности матрицы H существует базис, в котором форма $\mathcal{H}$ имеет единичную матрицу E, то есть $E = C^T HC$ для некоторой невырожденной матрицы C. Матрица формы $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид $B = C^T AC$. Так как $\det H = (\det C)^{-2}$ и $\det A = \det B(\det C)^{-2}$, то достаточно доказать, что $\det B \geq 1$.

Так как $H = \dfrac{A + A^T}{2}$, то $E = \dfrac{B + B^T}{2}$. Поэтому матрица B представляется в виде $B = E + B'$, где B' — кососимметрическая матрица. Собственные значение матрицы B' чисто мнимые. Значит, собственные значения матрицы B имеют вид $1 + ti$, причем комплексные собственные значения разбиваются на пары сопряженных $1 \pm ti$, произведение которых равно $1 + t^2 > 1$. Определитель матрицы B равен произведению ее собственных значений, которые равны 1 или разбиваются на пары, произведение в которых больше 1. То есть $\det B \geq 1$.

Набросок третьего решения (оно встречалось в работах многих студентов). Приводим H к диагональному виду. Далее A представляется в виде суммы H и кососимметрической. Далее определитель A расписываем через сумму по перестановкам (обобщенным диагоналям). Объединяем перестановки в группы с одинаковыми неподвижными элементами. Тогда произведение соответствующих диагональных элементов матрицы H будет умножаться на минор кососимметрической матрицы, который неотрицателен. А для тождественной перестановки будет как раз $\det H$.

Набросок четвертого решения. Доказываем по индукции для неотрицательно определенной матрицы H. Приводим H к диагональному виду. Далее $\det A$ и $\det H$ линейно зависят от диагонального элемента a_{11} и коэффициент в $\det A$ не меньше по предположению индукции. Значит, достаточно доказать для $a_{11} = 0$. Аналогично, достаточно рассмотреть случай когда все диагональные элементы матрицы A равны нулю. Так как H диагональна, то в этом случае $H = 0$ и A кососимметрична. А определитель кососимметрической матрицы неотрицателен, что легко видеть из ее канонического вида.

Решения и комментарии к матбою.

МБ-1. Ответ: при четном NK. Доказательство см. в [G1, G2].

МБ-2. Ответ: да, существует.

Определим функцию $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ формулой $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(x - r_n)^{1/3}$, где $\{r_n\}$ — все рациональные числа из $[0,1]$. Эта функция непрерывна и строго возрастает. Искомой функцией f является обратная к ней (с точностью до преобразования области определения). Для доказательства сначала проверяется, что g имеет конечную производную всюду, где сходится формальный ряд из производных слагаемых, и бесконечную в остальных точках, в частности, во всех r_n. Затем проверяется, что f дифференцируема (с конечной производной) и $f'(g(r_n)) = 0$ для любого n.

МБ-3. Пусть P — одна из точек касания. Основная идея решения: четырехугольник OF_1PF_2 вписанный. Далее можно разными способами получать требуемое соотношения из подобия треугольников.

Докажем вписанность. Прямая PO — биссектриса угла F_1PF_2. Отсюда, так как $OF_1 = OF_2$ и точки F_1, F_2 не симметричны относительно PO, следует, что четырехугольник OF_1PF_2 — вписанный, т.е. $\angle OF_1F_2 = \angle OPF_2 = \angle F_1PO$.

Поэтому треугольник OF_1P подобен треугольнику OKF_1, где K — точка пересечения OP с F_1F_2. Аналогично подобны треугольники OF_2P и OKF_2. Следовательно,

$$\frac{OF_1}{r} = \frac{OF_1}{OP} = \frac{F_1K}{F_1P} = \frac{F_2K}{F_2P} = \frac{F_1F_2}{F_1P + F_2P}.$$

МБ-4. Переформулируем условие задачи в векторной форме. Система координат декартова и мы считаем, что все векторы отложены от начала координат. Положим $\boldsymbol{a}_p := (x_p, y_p)$, тогда $\Delta_{p,q} = x_q y_q - x_q y_p$ — это ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_p$ и $\boldsymbol{a}_q$. Известно, что $\sum\limits_{i=1}^{2r+1} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ и направления векторов идут против часовой стрелки, причем если мы проведем прямую через ненулевой вектор $\boldsymbol{a}_i$, то векторы $\boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i+r}$ окажутся по одну сторону от нее, а векторы $\boldsymbol{a}_{i-1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-r}$ — по другую (это как раз условие неотрицательности $\Delta_{i,j}$ при $j = i+1, \ldots, i+r$). Отметим, что в каждой из частей данного неравенства записана сумма некоторых неотрицательных площадей $\Delta_{p,q}$ и функция ориентированной площади $S(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ от пары векторов билинейна и кососимметрична.

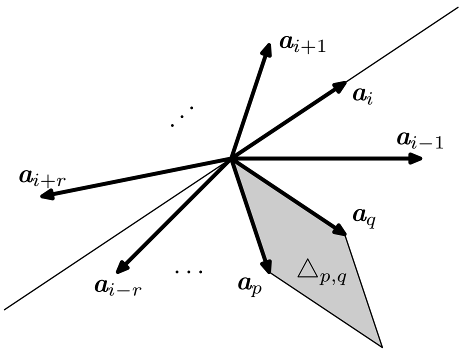

Рис. 1. Геометрическая интерпретация задачи

Теперь перейдем к решению задачи по индукции по r. База индукции $r = 1$, тогда вектора три и утверждение проверяется непосредственно. Пусть $r > 1$. Возможны три случая:

(1) Среди данных векторов есть нулевой $\boldsymbol{a}_{i_0} = \boldsymbol{0}$ *и* $i_0 \neq 2r+1$. Тогда удалим этот вектор, а векторы $\boldsymbol{a}_{i_0+r}$ и $\boldsymbol{a}_{i_0-r}$ заменим на их сумму. В получившемся наборе будет $2r-1$ вектор,

которые удовлетворяют условию задачи. При этом левая часть неравенства не изменилась, так как пара векторов $\boldsymbol{a}_{i_0+r}$ и $\boldsymbol{a}_{i_0-r}$ не разделялась ни одной прямой с направлением $\boldsymbol{a}_i$ при $i \neq i_0$. Правая часть неравенства не увеличилась, так как в ней пропало слагаемое вида Δ_{i_0+r,i_0+r+1}, а все остальные слагаемые, в которых участвовали векторы $\boldsymbol{a}_{i_0+r}$ или $\boldsymbol{a}_{i_0-r}$, сгруппировались по парам благодаря билинейности ориентированной площади.

(2) Найдется такое $i_0 \neq r+1, 2r+1$, что векторы $\boldsymbol{a}_{i_0}$ и $\boldsymbol{a}_{i_0+r}$ противоположно направлены. Тогда заменим один из этих векторов на их сумму, а второй $\boldsymbol{x}$ на нулевой; опять же векторов стало $2r-1$ и все условия задачи будут выполнены. При этом левая часть неравенства уменьшится на $3|S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{i_0}+\boldsymbol{a}_{i_0+1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{i_0+r})|$, а правая на $4|S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{i_0}+\boldsymbol{a}_{i_0+1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{i_0+r})|$, то есть разность правой и левой частей не увеличилась и мы перешли к случаю (1).

(3) Любые два вектора $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$ при $i, j \neq 2r+1$ линейно независимы. Начнем двигать конец вектора $\boldsymbol{a}_{2r}$ вдоль вектора $\boldsymbol{a}_r$ и соответственно уменьшать вектор $\boldsymbol{a}_r$, сохраняя нулевую сумму всех векторов, пока условие попарной линейной независимости сохраняется. Это условие нарушится либо если вектор $\boldsymbol{a}_r$ станет нулевым (случай (1)), либо когда вектор $\boldsymbol{a}_{2r}$ станет противоположно направлен вектору $\boldsymbol{a}_{r-1}$ (случай (2)). Поэтому осталось показать, что при таком движении разность правой и левой частей не увеличивается. Пусть мы изменили каждый из двух векторов на вектор $\boldsymbol{y}$, тогда левая часть уменьшилась на $3|S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_{r+1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{2r})|$, а правая на $4|S(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_{r+1}+\ldots+\boldsymbol{a}_{2r})|$, то есть нужная разность не увеличилась.

Таким образом, утверждение индукции доказано.

Примечания. Отношение эти сумм не только не меньше 3, но и не больше 4. Константа 3 экстремальна, 4 — нет. Эта задача возникла из одной проблемы об исключительных наборах в производных категориях торических стеков Фано.

МБ-5. Ответ: да, существует. Можно взять $P(x) = ((10x-1)^5+1)/10$. Легко проверить, что этот многочлен удовлетворяет условию.

Примечание. Придумать решение можно так. Ищем P в виде $Q/10$, где Q удовлетворяет условию $|Q(x)-1| < 0.001$ и коэффициенты многочлена Q делятся на 10. Многочлен Q ищем в виде $Q(x) = (10x-1)^n$ с нечетным n. Условие на x запишем в виде $|10x-1| < 0.2$. Поэтому достаточно взять n так, что $(0.2)^n < 0.001$.

МБ-6. Пусть M — данный многоугольник площади S_M, $A_1A_2A_3$ – данный треугольник площади S. Из условия следует, что каждая вершина треугольника лежит внутри M.

(Действительно, предположим, напротив, что некоторая вершина A_1 лежит вне многоугольника. Тогда ввиду выпуклости многоугольника прямые A_1A_2 и A_1A_3 делят его на три части. По условию площади двух 'крайних' из этих частей равны половине площади многоугольника. Следовательно, площадь 'средней' части равна нулю. Противоречие.)

Для $i = 1, 2, 3$ обозначим через S_i площадь пересечения многоугольника с углом, вертикальным к углу A_i треугольника, а через q_i обозначим площадь пересечения M с бесконечной фигурой, ограниченной стороной треугольника, противоположной вершине A_i, и продолжениями двух других сторон. Так как и A_1A_2, и A_1A_3 делят площадь многоугольника M пополам, то $S_i = S + q_i \geq S$. Поэтому $S_M \geq S + S_1 + S_2 + S_3 \geq 4S$.

Примечания. Оценка $1/4$ не точна. Аналог утверждения задачи несправедлив для невыпуклых фигур. В решении нужна выпуклость, чтобы треугольник лежал внутри фигуры. Для невыпуклых он может не пересекаться с фигурой вовсе. На этом основан следующий *контрпример к аналогу задачи 6 для невыпуклых фигур*, придуманный В.Ю. Протасовым.

Возьмем правильный семиугольник $A_1 \ldots A_7$. Убрав сторону A_1A_7, получим шестизвенную ломаную. Каждая из прямых A_1A_4, A_2A_5 и A_4A_7 делит периметр этой ломаной пополам. Заменим каждую сторону данной ломаной узкой прямоугольной полоской ширины $h > 0$. Получаем невыпуклый 14-угольник M (это шестизвенная 'ломаная', 'каждая сторона которой имеет толщину'). При $h \to 0$ площадь 14-угольника M стремится к нулю, а отношения, в которых каждая из прямых A_1A_4, A_2A_5 и A_4A_7 делит площадь

14-угольника M, стремятся к 1/2. Поэтому образы этих прямых при малом параллельном переносе делят площадь 14-угольника M пополам. При этом переносе площадь S треугольника, образованного этими прямыми, изменится мало. Поэтому при малых h эта площадь будет больше площади 14-угольника M.

МБ-7. См. [BKS].

МБ-8. Авторам неизвестно решение этой задачи. Ср. [R].

Информация о победителях

Вот призеры заключительных туров: Антропов А. (2011), Ардинарцев Н. (2011), Балицкий А. (2011), Бажов И. (2010 и 2011), Бердников А. (2011), Брагин В. (2010), Горинов Е. (2010 и 2011), Григорьев С. (2010 и 2011), Девятов Р. (2010), Ивлев Ф. (2011), Калачев Г. (2011), Карпухин М. (2010), Карпушин В. (2010), Климовицкий И. (2011), Клочков Е. (2011), Мищенко П. (2011), Мокин В. (2011), Наумов В. (2010), Немиро В. (2011), Облакова А. (2010), Омельяненко В. (2011), Плосконосов А. (2011), Руденко Д. (2011), Савчик А. (2010), Тыщук К. (2011), Царьков О. (2011), Шмаров В. (2010 и 2011).

Составы команд на международную олимпиаду:

2010: Арутюнов В. (3-я премия), Бажов И. (1-я премия), Брагин В. (не участвовал ввиду отсутствия загранпаспорта), Горинов Е. (1-я премия), Девятов Р. (1-я премия), Шмаров В. (1-я премия).

2011: Бердников А. (1-я премия), Горинов Е. (1-я премия), Ивлев Ф. (2-я премия), Мокин В. (2-я премия), Облакова А. (3-я премия), Омельяненко В. (1-я премия), Царьков О. (3-я премия), Шмаров В. (1-я премия). Не участвовали по техническим причинам (отсутствие загранпаспорта или своевременной связи): Григорьев С., Антропов А., Калачев Г., Брагин В.

В неофициальном командном зачете команда заняла II место в 2010 году и VI место в 2011 году. Руководители команды М.П. Заплетин, К.В. Семенов и Н.А. Толмачев.

Матбой состоялся в день Пифагора 30.11.2010. Он организован студенческим советом во главе с А. Поповым. В команде первокурсников участвовали А. Бердников, Ф. Ивлев, Н. Медведь, А. Менщиков, В. Мокин и В. Омельяненко, а в команде преподавателей — А. Гайфуллин, С. Гайфуллин, А. Гарбер, В. Галатенко и О. Герман. Жюри: А. Скопенков и Н. Толмачев. Победила команда первокурсников.

Подробнее см. http://www.universe.msu.ru.

Литература

[ABZPRS] И. В. Аржанцев, В. И. Богачев, А. А. Заславский, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков, Студенческие олимпиады мехмата МГУ, Мат. Просвещение (2010) 225-234

[BKS] В. Брагин, А. Клячко и А. Скопенков, Когда любая группа из n элементов циклическая? http://arxiv.org/abs/1108.5406

[BRST] В.И. Богачев, А.М. Райгородский, А.Б. Скопенков и Н.А. Толмачев, Студенческие олимпиады и межкафедральный семинар на мехмате Московского Государственного Университета, Мат. Просвещение, 12 (2008), 205-222.

[G1] И. Григорьев, Порождение перестановок ‘восьмеркой’, http://www.mccme.ru/mmks/dec10/grigoryev_report.pdf (осторожно, там имеется ошибка!)

[G2] И. Григорьев, Порождение перестановок циклами длины 3, готовится.

[OP] T. Oda, H.S. Park, Linear Gale transforms and Gel’fand-Kapranov-Zelevinskij decompositions. Tohoku Math. J. (2) 43 (1991), no. 3, 375–399.

[P] В.Ю. Протасов, О двух велосипедистах и вишневой косточке, Квант, 2008, No 3, 41-45.

[R] A. Rukhovich, On intersection of two embedded spheres in 3-space, http://arxiv.org/abs/1012.0925.