

К. Ю. Федоровский

Аппроксимация полианалитическими
многочленами, однолистные функции в
модельных пространствах и смежные задачи

Краткое изложение заявки

Представленный проект состоит из двух связанных частей (направлений). Первое направление связано с задачами равномерной, L^p , $Lip\alpha$ – аппроксимации функций полианалитическими многочленами, т.е. многочленами вида $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k P_k(z)$, где P_k – многочлены комплексного переменного, на компактных подмножествах комплексной плоскости.

Эти задачи возникли в 1970-1980 годы, когда первые результаты о плотности рациональных модулей в пространстве $C(X)$ были получены в работах Д. Вердеры, Д. Кармоны, А. Г. О'Фаррелла, Т. Трента и Дж. Вонга и других авторов. Являясь естественным развитием классических задач аппроксимации функций рациональными функциями и многочленами комплексного переменного, эта тематика развилась в теорию аппроксимации функций решениями эллиптических дифференциальных уравнений, которая активно изучается в настоящее время. В этой связи отметим (кроме работ уже названных авторов) работы А. Буаве, П. М. Готье, М. Я. Мазалова, П. В. Парамонова и других авторов, включая автора заявки.

Несмотря на активное развитие этой теории, задачи полиномиальной аппроксимации остаются, в общем случае, нерешенными. Наибольший прогресс имеется именно в задаче о равномерной приближаемости полианалитическими многочленам, причем этот прогресс непосредственно связан с идеями и результатами автора данной заявки и его соавторов.

В рамках предлагаемого проекта планируется получение новых необходимых и достаточных условий приближаемости (равномерной, L^p и $Lip\alpha$) функций полианалитическими многочленами (как общего вида, так и с ограничениями на допустимые степени сопряженного переменного) на компактах в \mathbb{C} .

Второе направление проекта связано с изучением понятия неванлинновской области и его модификаций. Эти понятия возникают как специальные аналитические характеристики множеств, в терминах которых формулируются решения рассматриваемых аппроксимационных задач. Через важное свойство псевдопродолжения голоморфных функций они связывают рассматриваемую проблематику с теорией модельных пространств (инвариантных относительно оператора обратного сдвига подпространств пространства Харди H^2), где возникают задачи описания таких внутренних функций Θ , что соответствующее модельное пространство $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ содержит ограниченные однолистные функции и изучения граничного поведения таких функций.

Konstantin Fedorovskiy

Approximation by polyanalytic polynomials, univalent functions in model spaces, and related problems

Summary

The proposed project consists of two related parts (topics). The first topic is related with problems of uniform, L^p , and $Lip\alpha$ – approximation of functions by polyanalytic polynomials, i.e. by polynomials of the form $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k P_k(z)$, where P_k are polynomials in the complex variables, on compact subsets of the complex plane.

These problems have appeared in 1970-1980, when first results about density of rational modules in the space $C(X)$ were obtained by J. Verdera, J. Carmona, A. G. O'Farrell, T. Trent and J. L.-M. Wang and others. As a natural extension of the classical problems of approximation of functions by rational functions and polynomials in the complex variable, this topic has been developed up to the theory of approximation by solutions of elliptic differential equations, which is actively studied at present. Thereupon let us mention (apart the works by the mentioned above authors) the results by A. Boivin, P. M. Gauthier, M. Ya. Mazalov, P. V. Paramonov and other authors, including the author of the proposed project.

In spite of the active development of this theory, the problems of polynomial approximation remain unsolved in the general case. The most progress is attained namely in the problem of polyanalytic polynomial approximation, and this progress is peculiarly related with ideas and results of the author of this proposal and his coauthors.

In the frameworks of the proposed project it is planned to obtain new necessary and sufficient conditions for approximation (uniform, L^p , and Lip_α) of functions by polyanalytic polynomials (of the general form, as well as with certain restrictions to admissible degrees of the conjugate variable) on compact sets in \mathbb{C} .

The second topic of the project is related with studies of the concept of a Nevanlinna domain and its refinements. These concepts are appeared as the special analytic characteristics of sets in terms of which the solutions of approximation problems under consideration are formulated. By means of the important property of pseudocontinuation of holomorphic functions, these concepts connect the topic under consideration with the theory of model spaces (invariant with respect to the backward shift operator subspaces of the Hardy space H^2). In this theory the problem on description of such inner functions Θ that the respective model space $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$ contains bounded univalent functions, and the problem of studying of boundary behavior of such functions are arisen.