

Краткое изложение заявки
Трушечкин Антон Сергеевич

Исследования в рамках настоящего проекта будут посвящены квазиклассическому (коротковолновому, высокочастотному) пределу квантовой унитарной эволюции на различных римановых многообразиях при больших временах, соответствующим квазиклассическим мерам, а также некоторым вопросам квантового хаоса.

Хорошо известен принцип соответствия между квантовой и классической механиками, в соответствии с которым в квазиклассическом пределе квантовая динамика переходит в классическую. Математически этот факт выражает, например, теорема Ю.В. Егорова (в микролокальном анализе), согласно которой действие унитарного оператора квантовой эволюции в указанном пределе эквивалентно сдвигу вдоль классической траектории.

Однако теорема формулируется только для малых времён — времён, не превышающих так называемое время Эренфеста (зависящее от малого параметра). На масштабах времени, превышающих время Эренфеста, отклонение квантовой динамики от классической становится существенным, даже в квазиклассическом пределе. При этом квантовая динамика проявляет нетривиальные интересные свойства, даже когда гамильтониан системы имеет простой вид.

В настоящее время в математической физике активно изучается квазиклассический предел квантовой динамики на масштабах времени, превышающих время Эренфеста. Одним из средств описания свойств квантовой динамики в квазиклассическом пределе являются квазиклассические меры (или меры Вигнера) в фазовом пространстве, которые некоторым образом характеризуют локализацию решений уравнения Шрёдингера одновременно в конфигурационном и в импульсном пространствах в данном пределе.

В серии работ ряда авторов (N. Anantharaman, N. Burq, P. Gérard, P.-L. Lions, F. Macià, S. Zelditch и других) с помощью методов квазиклассического и микролокального анализов удалось установить общие свойства квазиклассических мер. В отличие от этих работ, в моей диссертационной работе квазиклассические меры для некоторых частных случаев подсчитаны в явном виде. Основным инструментом были асимптотические оценки тригонометрических сумм, через которые выражаются унитарные операторы квантовой эволюции. Но мотивация диссертационной работы была другой и результаты сформулированы на другом языке. В настоящем проекте планируется вернуться к этим результатам и продолжить исследования, получив в явном виде выражения для квазиклассических мер для более сложных и более общих случаев. Для этого помимо методов квазиклассического и микролокального анализов предполагается использовать технику оценок тригонометрических сумм, развитую в аналитической теории чисел.

Другой интересной задачей является обобщение метода канонического оператора В.П. Маслова (который позволяет получать решения уравнения Шрёдингера в квазиклассическом приближении) на масштабы времени, превышающие время Эренфеста.

Эта тематика тесно связана с математической теорией квантового хаоса (направлением исследований по изучению динамики квантовых систем, являющихся хаотическими в классическом пределе), поэтому также предполагается получить новые результаты в этой области. Одной из задач является получение новых самосопряжённых операторов (квантовых гамильтонианов), у которых главный асимптотический член распределения собственных значений совпадает с главным асимптотическим членом распределения нетривиальных нулей дзета-функции Римана (даваемый формулой Римана–Мангольдта). Другая задача — это строгое обоснование формулы следа Гутцвиллера (которая связывает спектр квантового оператора Гамильтона с периодическими орбитами соответствующей классической гамильтоновой системы) для хаотических динамических систем в ограниченных областях. В этой задаче также имеется некоторый задел.