

## Листок 2. Проективная двойственность

Напомним, что при проективной двойственности мы сопоставляем точке  $p = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2$  прямую  $p^\times = \{aX + bY + cZ = 0\} \in \mathbb{P}^{2\times}$ .

**Задача 1. а)** Убедитесь, что касательные к невырожденной конике  $C \subset \mathbb{P}^2$  составляют невырожденную конику  $C^\times \subset \mathbb{P}^{2\times}$ .

**б)** Пусть коника  $C$  задана уравнением  $aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eXZ + 2fYZ = 0$ . Напишите уравнение двойственной коники.

**Задача 2.** Пусть неприводимая коника  $C \subset \mathbb{P}^2$  задается уравнением  $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}X_iX_j = 0$ . Докажите, что отображение  $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^{2\times}$ , переводящее  $p = (X_1 : X_2 : X_3)$  в  $\alpha = (\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)$  с  $\alpha_i = \sum_j a_{ji}X_j$ , линейно, взаимно однозначно и, будучи интерпретировано как биекция между точками и прямыми на  $\mathbb{P}^2$ , переводит каждую точку  $p$  в прямую, соединяющую точки касания с  $C$  опущенных на нее из  $p$  касательных. Для примера опишите полярное соответствие относительно (аффинной) окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

## Грассманианы

**Задача 3.** Напомним, что *грассманиан*  $Gr(k, n)$  — это множество всех векторных  $k$ -мерных подпространств в векторном  $n$ -мерном пространстве. Рассмотрим грассманиан  $Gr(k, n)$  над полем  $\mathbb{F}_q$  из  $q$  элементов. Из скольких точек он состоит?

**Задача 4.** Докажите, что бивектор  $\omega \in \Lambda^2 V$  разложим, т.е. представляется в виде  $\omega = v \wedge u$  для некоторых  $v, u \in V$ , тогда и только тогда, когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

**Задача 5.** Задайте квадратичными уравнениями грассманиан  $Gr(2, n)$ , вложенный по Плюккеру в проективное пространство размерности  $\mathbb{P}^{\frac{n(n-1)}{2}-1}$ .

**Задача 6\*.** Сколько прямых в  $\mathbb{P}^4$  пересекают шесть данных плоскостей общего положения?