

### Задачи Г.Б. Шабата к лекции 3

**3.1.** Перечислите одноклеточные и двуклеточные детские рисунки с валентностями вершин  $\geq 2$  и периметром границы  $\leq 7$ .

**3.2.** Опишите страты пространств метризованных ленточных графов  $\mathcal{MRG}_{0,3}$  и  $\mathcal{MRG}_{1,1}$ .

**3.3.** Опишите отображения периметров  $\mathcal{MRG}_{0,3} \rightarrow \mathbb{R}^3$  и  $\mathcal{MRG}_{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**3.4.** Вычислите объёмы Концевича  $\text{vol}_{0,3}(p_1, p_2, p_3)$  и  $\text{vol}_{1,1}(p)$ .

**3.5.** Вычислите функции Норбери  $\text{Nor}_{1,1}(p)$  для чётных и для нечётных значений  $p$ .

**3.6.** Пользуясь рекурсией Норбери, вычислите многочлены  $\text{Nor}_{1,2}(p)$  и  $\text{Nor}_{0,4}(p_1, p_2, p_3, p_4)$  для чётных аргументов. Сверьте результаты со списками детских рисунков.

**3.7.** Докажите равенство  $\left(\frac{1+y}{1-y}\right)^x = 1 + A_1(x)y + A_2(x)y^2 + \dots$ , где  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{Q}[x]$  – попеременно чётные и нечётные многочлены с рациональными коэффициентами. Вычислите (вручную или с помощью компьютеров) несколько многочленов  $A_1, A_2, A_3, \dots$ .

**3.8.** Исходя из производящей функции для чисел Харера-Цагира

$$1 + 2xy + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{g=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\varepsilon_{g,n} x^{n-2g+1} y^{n+1}}{(2n-1)!!} = \left(\frac{1+y}{1-y}\right)^x,$$

докажите рекурсивное соотношение

$$\varepsilon_{g,n+1} = \frac{4n+2}{n+2} \varepsilon_{g,n} + \frac{4n^3-n}{n+2} \varepsilon_{g-1,n-1},$$

позволяющее вычислить числа Харера-Цагира с учётом очевидных начальных условий (включая нулевые при "бессмысленных" значениях параметров). **Указание.** Воспользуйтесь дифференциальным оператором  $(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y} - 2x$ .