Теория внутренних множеств:

Аксиоматический подход к нестандартному анализу

Станислав Сперанский

Дубна 2023

Аннотация

Цель этой брошюры — познакомить читателей с одним популярным (аксиоматическим) подходом к нестандартному анализу, называемым *теорией внутренних множеств*. В основу данного текста легли четыре лекции, прочитанные автором в июле 2023 года в Дубне.

Содержание

1 Введение

Один из ярких примеров применения методов математической логики — строгое обоснование «инфинитезимального анализа», которое позволило полностью легитимизировать метод актуальных бесконечно малых, восходящий к Г. В. Лейбницу и И. Ньютону. Интуитивно поле стандартных вещественных чисел при этом расширяется посредством добавления бесконечно больших и малых (по сравнению с обычными числами) величин. В рамках современного инфинитезимального анализа — также известного как «нестандартный анализ» — можно дать строгие определения предела, производной и интеграла в духе Лейбница и Ньютона (без использования эпсилон-дельта техники).

Как известно, первый учебник анализа назывался «Анализ бесконечно малых»; он был написан Г. Ф. Лопиталем (в контакте с И. Бернулли) и опубликован в 1696 году. Разумеется, в основе этого учебника лежало научное наследие Лейбница и Ньютона, так что там всюду использовались актуальные бесконечно малые величины.

На протяжении XVIII века бесконечно малые постоянно и эффективно применялись в исследованиях. В частности, такого рода величинами свободно манипулировали Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж. Однако недоверие к ним постепенно росло, что в XIX веке, когда была разработана эпсилон-дельта техника, привело к их изгнанию из математики. На этом этапе многие из математиков (но не физиков) поспешили откреститься от бесконечно малых; началось переписывание Лейбница, Ньютона, Эйлера, Лагранжа и т.д. в новых терминах.

Ситуация изменилась в 1961 году, когда А. Робинсон опубликовал книгу «Нестандартный анализ» [8], содержавшую современное обоснование метода бесконечно малых.[1] Тут активно использовались новые (для того времени) теоретико-модельные понятия и техники. В итоге

[1] В качестве хорошего краткого введения рекомендуется [2, раздел 2.8].

подходы Лейбница и Ньютона оказались полностью оправданы, хотя, конечно, ни Ньютон, ни Лебниц не могли сделать это так, как в [8].

В 1977 году выходит статья Э. Нельсона (специалиста по математическим физике и логике), где излагается аксиоматический подход к нестандартному анализу [6]. В основе этого подхода лежит так называемая *теория внутренних множеств* — специальное консервативное расширение классической теории множеств, вдохновлённое идеями из [8]. Здесь «консервативность» означает, что:

в расширенной теории нельзя вывести
никаких новых утверждений классического языка.

Предложенная Э. Нельсоном «нестандартная теория множеств» естественным образом включает не только «нестандартный анализ», но и нестандартные аналоги многих других разделов математики.[2] Кроме того, её консервативность позволяет свободно пользоваться «нестандартными методами» в ходе получения результатов об обычных математических объектах. Эта теория приобрела немалую популярность и породила ряд интересных модификаций; см. обсуждение родственных теоретико-множественных формализмов в [1, глава 3].

Цель этой брошюры — познакомить читателей с теорией внутренних множеств, которой были посвящён курс, прочитанный автором в июле 2023 года в Дубне. Как известно, в основе современной математики лежит теория множеств, а точнее, соответствующая ей аксиоматическая система Цермело–Френкеля с аксиомой выбора, известная в литературе как ZFC; в рамках ZFC обычные математические объекты вроде натуральных или вещественных чисел отождествляются с множествами специального рода. Вдохновлённая идеями нестандартного анализа *теория внутренних множеств*, обозначаемая через IST, — осо-

[2] В целом подход Нельсона оказывается более общим и удобным по сравнению с подходом Робинсона.

бая аксиоматическая система на основе ZFC, которая позволяет говорить о бесконечно больших натуральных числах, бесконечно больших и малых вещественных числах и т.д. Многие рассуждения из области анализа и теории меры становятся (пользуясь выражением Нельсона) «радикально элементарными» в IST.[3]

Мы предполагаем знакомство с основами теории множеств. Тем не менее, разделы 2, 3 и 4 помогут освежить в памяти соответствующий материал:

- в разделе 2 приведены аксиомы ZFC и комментарии к ним;
- в разделе 3 рассказано, как в ZFC строятся натуральные числа и возникают индукция и рекурсия;
- в разделе 4 рассказано, как в ZFC можно строить целые, рациональные и вещественные числа.

В качестве хорошего введения в классическую теорию множеств рекомендуется [5]. Для глубокого освоения предмета можно использовать [4] и специализированные монографии. Подробное ведение в основные числовые системы можно найти в [3].

Далее, в разделе 5 приводятся аксиомы системы IST (которая расширяет ZFC) и обсуждаются некоторые следствия из них. Наконец, в разделе 6 показывается, как в рамках IST можно моделировать инфинитезимальный анализ.

Пользуясь случаем, я хочу выразить благодарность А. Е. Гутману, чей замечательный курс по IST мне довелось слушать будучи студентом Новосибирского государственного университета.

[3] Некоторые интересные применения IST в теории вероятностей изложены в [7].

2 Аксиомы ZFC

Цель этого раздела — напомнить, как выглядят аксиомы классической теории множеств, а именно системы ZFC.

Пусть σ — сигнатура теории множеств, т.е. $\langle \in^2, =^2 \rangle$. В разделах 2, 3 и 4 под *формулами* мы будем понимать σ-формулы — они строятся из выражений вида

$$x \in y \quad \text{или} \quad x = y,$$

где x и y суть переменные, с помощью символов связок ($\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$) и кванторов ($\forall$ и $\exists$) обычным образом.[4]

В силу знаменитой теоремы о сильной полноте для логики предикатов, σ-формула выводима в ZFC, если и только если она истинна во всех *моделях* ZFC, т.е. при всех интерпретациях символов σ, которые деляют аксиомы ZFC истинными; см., например, [2, раздел 2.5]. Этот факт позволяет нам избежать привязки к конкретной формализации понятия *вывода*. Вместе с тем наши рассуждения будут работать для произвольной модели ZFC, не обязательно «стандартной».

С точки зрения аксиоматической теории множеств отнюдь не все воображаемые совокупности объектов суть множества. Грубо говоря, *множеством* можно называть совокупность объектов, наличие которой гарантируется имеющимися аксиомами. Что до самих аксиом, то, не считая весьма естественной аксиомы экстенсиональности и особой аксиомы регулярности, их можно разделить на две группы:

i. те, что непосредственно постулируют существование некоторых множеств;

ii. те, что позволяют по одним множествам строить другие посредством совершения некоторых манипуляций.

[4] Больше информации о сигнатурах и формулах можно найти в приложении.

Аксиома регулярности вносит определённую стройность в структуру универса всех множеств, а также препятствует построению ряда «патологических множеств».

Наконец, в ZFC абсолютно все объекты суть множества, тогда как натуральные числа и другие традиционные типы объектов моделируются посредством множеств специального вида. То, что классическая математика погружается в ZFC, — эмпирический факт.

Аксиома экстенсиональности

Множество определяется своими элементами:

$$\forall X\,\forall Y\,(\forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y). \tag{Ext}$$

Отметим, что обратное утверждение, а именно

$$\forall X\,\forall Y\,(X = Y \to \forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y)),$$

выглядит интуитивно очевидным, если понимать равенство двух объектов как их совпадение. Подобные утверждения традиционно называются *аксиомами равенства*. Обычно их по умолчанию включают во всякую систему, в языке которой есть символ $=$, и ZF не является исключением.

Далее, введём сокращение

$$x \subseteq y \;:=\; \forall u\,(u \in x \to u \in y).$$

Говорят, что Y *включает* X, или X — *подмножество* Y, если $X \subseteq Y$. Очевидно, $X = Y$ равносильно $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$. Запись $X \subsetneq Y$ будет использоваться как сокращение для $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$.

Аксиома пустого множества

Существует множество, в котором вообще нет элементов:

$$\exists X\,\forall u\,(u \notin X). \tag{Empty}$$

Разумеется, такое X будет единственным, в силу Ext. Его обозначают через $\varnothing$ и называют *пустым множеством.*

Аксиома пары

Если даны X и Y, то можно получить Z, содержащее в точности X и Y:

$$\forall X\,\forall Y\,\exists Z\,\forall u\,(u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \tag{Pair}$$

Такое Z будет единственным (в силу Ext). Полученное Z обозначают через $\{X, Y\}$ и называют *неупорядоченной парой X и Y*. Очевидно,

$$\{X, Y\} \;=\; \{Y, X\}$$

(по Ext). В случае, когда X совпадает с Y, вместо $\{X, X\}$ пишут $\{X\}$; при этом $\{X\}$ называют *синглетоном* X.

Определим *упорядоченную пару X_1 и X_2* как

$$(X_1, X_2) \;:=\; \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}.$$

Нетрудно убедиться, что для любых X_1, X_2, Y_1 и Y_2,

$$(X_1, X_2) \;=\; (Y_1, Y_2) \quad\Longleftrightarrow\quad X_1 = Y_1 \text{ и } X_2 = Y_2. \tag{$\star$}$$

Более того, можно определить *упорядоченные тройки*, *четвёрки* и так далее:

$$\begin{aligned}(X_1, X_2, X_3) \;&:=\; ((X_1, X_2), X_3),\\ (X_1, X_2, X_3, X_4) \;&:=\; ((X_1, X_2, X_3), X_4),\\ &\;\;\vdots\end{aligned}$$

Соответствующие им аналоги $(\star)$ также будут верны.

Схема аксиом выделения

Под *схемами* мы понимаем группы однородных аксиом. Так, каждой формуле $\Phi(x, \overline{z})$ сопоставляется своя *аксиома выделения*:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u, \overline{z}))). \tag{Sep}$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание, т.е. навесить кванторы всеобщности по всем переменным из кортежа $\overline{z}$). Если значения $\overline{z}$ фиксированы, то для данного X соответствующее Y единственно (в силу Ext). Его обозначают через $\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\}$.

Замечание. Формулы суть «метаматематические» объекты по отношению к множествам, а потому данную схему нельзя заменить одной аксиомой путём навешивания квантора всеобщности по формулам.

Вместе с тем выражение $\{u \mid \Phi(u, \overline{z})\}$ может и не задавать множества; однако в случае, когда предварительно установлено, что

$$\exists Z\, \forall u\, (u \in Z \leftrightarrow \Phi(u, \overline{z}))$$

(а таких Z не может быть более одного ввиду Ext), мы будем считать его легитимным.

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Ей соответствует «куча» («класс»)

$$[\![\Phi]\!] \ := \ \{x \mid \Phi(x, \overline{z})\}.$$

Ясно, что $[\![\Phi]\!]$ не обязана быть множеством.[5] Поэтому запись $[\![\Phi]\!] \in X$ не является вполне легитимной. С другой стороны, запись $u \in [\![\Phi]\!]$ мы можем отождествить с $\Phi(u, \overline{z})$. Кроме того, положим

$$[\![\Phi]\!] \subseteq [\![\Psi]\!] \ := \ \forall u\, (\Phi(u, \overline{z}) \to \Psi(u, \overline{z}));$$
$$[\![\Phi]\!] = [\![\Psi]\!] \ := \ \forall u\, (\Phi(u, \overline{z}) \leftrightarrow \Psi(u, \overline{z})).$$

(Здесь $\Phi(x, \overline{z})$ и $\Psi(x, \overline{z})$ суть произвольные формулы.)

[5] Например, рассмотрите $\{x \mid x = x\}$ или $\{x \mid x \notin x\}$.

Аксиома объединения

Эта аксиома позволяет нам собирать элементы элементов данного множества воедино:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow \exists v\, (v \in X \wedge u \in v)). \tag{Union}$$

Таким образом, выражение

$$\bigcup X \;:=\; \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое называют *объединением* X.

Аксиома степени

Она позволяет нам собирать подмножества данного множества воедино:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \tag{Power}$$

Таким образом, выражение

$$\mathcal{P}\,(X) \;:=\; \{u \mid u \subseteq X\}$$

задаёт множество, которое называют *множеством-степенью* X.

Пусть даны X и Y. Легко убедиться, что для всех $x \in X$ и $y \in Y$ мы имеем $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}\,(\mathcal{P}\,(X \cup Y))$. Поэтому выражение

$$\begin{aligned} X \times Y \;&:=\; \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \\ &=\; \{u \mid \exists x\, \exists y\, (u = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y)\} \end{aligned}$$

задаёт подмножество $\mathcal{P}\,(\mathcal{P}\,(X \cup Y))$, которое называется *прямым* (или *дакартовым*) *произведением* X *и* Y.

Аксиома бесконечности

Рассмотрим формулу

$$\mathrm{Ind}\,(x) \;:=\; \varnothing \in x \wedge \forall u\,(u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Говорят, что X *индуктивно*, если $\mathrm{Ind}\,(X)$. Интуитивно всякое индуктивное множество бесконечно. Поэтому *аксиому бесконечности* можно сформулировать так:

$$\exists X\,\mathrm{Ind}\,(X). \tag{Inf}$$

Отсюда легко вывести существование наименьшего по включению индуктивного множества — см. раздел 3.

Схема аксиом подстановки

Каждой формуле $\Phi\,(x, y, \overline{z})$ сопоставляется аксиома

$$\forall x\,\forall y_1\,\forall y_2\,((\Phi\,(x, y_1, \overline{z}) \wedge \Phi\,(x, y_2, \overline{z})) \to y_1 = y_2) \;\;\longrightarrow \\ \forall X\,\exists Y\,\forall y\,(y \in Y \leftrightarrow \exists x\,(x \in X \wedge \Phi\,(x, y, \overline{z}))). \tag{Repl}$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание). Стало быть, если $\Phi\,(x, y)$ удовлетворяет посылке Repl, т.е. в определенном смысле является «функциональной», то для любого X выражение

$$\{y \mid \exists x\,(x \in X \wedge \Phi\,(x, y))\}$$

задаёт множество — как бы «полный образ X относительно Φ».

Замечание. На самом деле, Repl логически влечёт Sep, а потому при наличии Repl традиционное включение Sep в аксиоматику ZFC оказывается излишним. Проверка этого простого факта остаётся в качестве упражнения читателю.

Аксиома регулярности/фундированности

Во всяком непустом множестве есть минимальный относительно $\in$ элемент:

$$\forall X\,(X \neq \varnothing \to \exists u\,(u \in X \wedge X \cap u = \varnothing)). \qquad (\mathsf{Reg})$$

Эта аксиома оказывает существенное влияние на структуру универса всех множеств. В частности, она играет ключевую роль в доказательстве теоремы о кумулятивной иехархии; см. [5, глава 14].

Аксиома выбора

Под *отношениями между* X *и* Y понимаются произвольные подмножества $X \times Y$; при $X = Y$ их ещё называют *бинарными* (или *двухместным*) *отношениями на* X. В рамках теории множеств функции из X в Y интуитивно отождествляются с их графиками, которые являются особого рода отношения между X и Y.

Пусть $R \subseteq X \times Y$. Далее мы будем часто прибегать к «инфиксной нотации» и писать xRy вместо $(x, y) \in R$. Под *областью определения* R понимают

$$\mathrm{dom}\,(R) \;:=\; \{u \in X \mid \exists v\, uRv\}$$

(которое существует ввиду Sep). Рассмотрим условие

$$\mathrm{Func}\,(x) \;:=\; \forall u\, \forall v_1\, \forall v_2\, ((u, v_1) \in x \wedge (u, v_2) \in x \to v_1 = v_2).$$

Говорят, что $R \subseteq X \times Y$ *функционально*, если $\mathrm{Func}\,(R)$. Обозначим

$$Y^X \;:=\; \{f \in \mathcal{P}\,(X \times Y) \mid \mathrm{dom}\,(f) = X \wedge \mathrm{Func}\,(f)\}.$$

Элементы Y^X называют *функциями из* X *в* Y; вместо $f \in Y^X$ обычно пишут $f : X \to Y$. Пусть $f : X \to Y$. Ясно, что если $x \in X$, то существует единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называют *значением* f *в* x и обозначают через $f\,(x)$.

Наконец, *аксиома выбора* утверждает, что для всякого множества непустых множеств существует «функция выбора», которая выбирает элемент в каждом его элементе:

$$\forall X \left(\varnothing \notin X \to \exists f \left(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X \left(f\left(u\right) \in u \right) \right) \right). \tag{C}$$

Эта аксиома необходима, в частности, для получения важных результатов в комбинаторике бесконечного. Она также часто используется в универсальной алгебре и топологии.

3 Натуральные числа

Теперь приступим к моделированию натуральных чисел в теории множеств. Заметим, что из Inf с помощью Sep легко получить:

Утверждение 3.1.

$$\exists X \left(\mathrm{Ind}\left(X\right) \wedge \forall Y \left(\mathrm{Ind}\left(Y\right) \to X \subseteq Y \right) \right). \tag{Nat}$$

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь индуктивное множество X_0. Возьмём

$$\mathbb{N} \ := \ \{ x \in X_0 \mid \forall X \left(\mathrm{Ind}\left(X\right) \to x \in X \right) \}.$$

По построению $\forall X \left(\mathrm{Ind}\left(X\right) \to \mathbb{N} \subseteq X \right)$. Кроме того, легко проверить, что $\mathrm{Ind}\left(\mathbb{N}\right)$. □

Итак, существует наименьшее по включению индуктивное множество; его обозначают через $\mathbb{N}$. Элементы $\mathbb{N}$ называют *натуральными числами.* Определим *функцию последователя* из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ как

$$\mathsf{s} \ := \ \{ (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\} \}.$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то вместо $\mathsf{s}(n)$ нередко пишут $n+1$.[6] С полуформальной точки зрения $\mathbb{N}$ содержит в точности

$$\begin{aligned} 0 &:= \varnothing, \\ 1 &:= 0+1 = \{0\}, \\ 2 &:= 1+1 = \{0,1\}, \\ 3 &:= 2+1 = \{0,1,2\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Под (*естественным*) *порядком* на $\mathbb{N}$ мы будем понимать отношение

$$< \; := \; \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in m\}.$$

Очевидно, для всех $n, m \in \mathbb{N}$:

i. $\neg n < 0$;

ii. $m < n+1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$.

Для вывода более сложных утверждений используется:

Утверждение 3.2 (принцип индукции)**.** *Пусть множество X удовлетворяет условию*

$$0 \in X \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\,(n \in X \to n+1 \in X).$$

Тогда $(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \in X)$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$.

Доказательство. Ясно, что $X \cap \mathbb{N}$ индуктивно, а потому $\mathbb{N} \subseteq X \cap \mathbb{N}$, откуда $\mathbb{N} \subseteq X$. □

[6] Поскольку функция сложения на натуральных числах ещё не определена, мы формально не можем пока интерпретировать запись «$n+1$» как результат применения $+$ к n и 1.

Замечание. В роли X могут выступать множества вида

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n, \overline{z})\},$$

где $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Поэтому в формулировке принципа индукции мы можем заменить «$n \in X$» на «$\Phi(n, \overline{z})$».

Для иллюстрации докажем следующее.

Утверждение 3.3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $n \subseteq \mathbb{N}$, т.е.*

$$n \ = \ \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}.$$

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\Phi(x) \ := \ x \subseteq \mathbb{N}.$$

Установим по индукции, что $(\forall n \in \mathbb{N})\, \Phi(n)$.

База индукции: Разумеется, $0 \subseteq \mathbb{N}$.

Шаг индукции: Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $n \subseteq \mathbb{N}$. Очевидно, тогда $n + 1 \subseteq \mathbb{N}$. □

По индукции нетрудно установить основные свойства $<$. Отметим, что соответствующие рассуждения имеют некоторую специфику, связанную с интерпретацией $<$ как $\in$.

Утверждение 3.4. *Для любых $n, m, k \in \mathbb{N}$:*

i. $n \not< n$;

ii. $k < m \wedge m < n \to k < n$;

iii. $n \neq m \to n < m \vee m < n$.

Таким образом, $<$ — строгий линейный порядок на $\mathbb{N}$.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

Утверждение 3.5. *Любое непустое подмножество* $\mathbb{N}$ *содержит наименьший относительно* $<$ *элемент, т.е.*

$$(\forall X \subseteq \mathbb{N})\,(X \neq \varnothing \to (\exists n \in X)\,(\forall m \in X)\,(n \leqslant m)).$$

В частности, 0 *окажется наименьшим в* $\mathbb{N}$*, а для любого* $n \in \mathbb{N}$ *его последователь* $n+1$ *— наименьшим в* $\{m \in \mathbb{N} \mid n < m\}$*.*

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

Далее, корректность рекурсивных определений гарантирует:

Теорема 3.6 (о рекурсии)**.** *Пусть* $y_0 \in Y$ *и* $h : Y \to Y$*. Тогда существует единственная* $f : \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$f\,(n) \;=\; \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h\,(f\,(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases} \tag{†}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Будем называть функцию f из $k+1$ в Y *правильной*, если (†) верно для всех $n \in k+1$. Возьмём

$$S \;:=\; \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k+1 \to Y\}.$$

Если $k \in S$, то через f_k мы обозначаем соответствующую (единственную) правильную функцию из $k+1$ в Y.

Установим по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База индукции: Очевидно, синглетон $\{(0, y_0)\}$ будет единственной правильной функцией из $0+1$ $(= \{0\})$ в Y. Стало быть, $0 \in S$.

Шаг индукции: Предположим, что $k \in S$. Возьмём

$$g \;:=\; f_k \cup \{(k+1, h\,(f_k\,(k)))\}.$$

Как нетрудно убедиться, g — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Осталось проверить её единственность. Пусть g' — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y.

a. Разумеется, ограничение g' на $k+1$ окажется правильным, а потому совпадёт с f_k, т.е. с ограничением g на $k+1$;

b. Кроме того, $g'(k+1) = h(g'(k)) = h(g(k)) = g(k+1)$.

Следовательно, $g' = g$. Таким образом, $k+1 \in S$.

В итоге $S = \mathbb{N}$. Обозначим

$$f \ := \ \bigcup \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Можно проверить, что f — искомая функция из $\mathbb{N}$ в Y. □

При желании можно добавить параметры:

Теорема 3.7 (о рекурсии, параметризованная)**.** *Пусть* $g_0 \in Y^X$ *и* $h : X \times Y \to Y$. *Тогда существует единственная* $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ *такая, что для любых* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x,n) \ = \ \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, f(x,m)) & \text{если } n = m+1. \end{cases}$$

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

В частности, параметризованная рекурсия позволяет задать *функцию сложения* из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{cases} +(k,0) & = \ k, \\ +(k, \mathsf{s}(m)) & = \ \mathsf{s}(+(k,m)). \end{cases}$$

Нужные $g_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тут определяются по правилам

$$g_0(k) \ := \ k \quad \text{и} \quad h(k,n) \ := \ \mathsf{s}(n).$$

Разумееся, вместо $+(k,n)$ обычно пишут $k+n$. При этом

$$+(k,1) \ = \ +(k, \mathsf{s}(0)) \ = \ \mathsf{s}(+(k,0)) \ = \ \mathsf{s}(k),$$

а потому данная запись согласуется с обозначением $k+1$ для $\mathsf{s}(k)$. С помощью параметризованной рекурсии задаются и другие арифметические операции, такие как *умножение* и *возведение в степень*:

$$\begin{cases} k \cdot 0 & = \ 0, \\ k \cdot \mathsf{s}(m) & = \ (k \cdot m) + k \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} k^0 & = \ 1, \\ k^{\mathsf{s}(m)} & = \ k^m \cdot k. \end{cases}$$

(Здесь мы считаем $0^0 = 1$.)

По индукции можно установить основные свойства трёх вышеупомянутых операций. В качестве упражнения: убедитесь в том, что для любых $n, m, k \in \mathbb{N}$,

$$n \ = \ m \quad \Longleftrightarrow \quad n + k \ = \ m + k$$

— тут ключевую роль играет случай $k = 1$.

4 Целые, рациональные и вещественные числа

Имея $\mathbb{N}$, нетрудно определить $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и, наконец, $\mathbb{R}$. В этом разделе мы напомним, как это делается.

Целые числа

Определим на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ отношение $\sim$ по правилу

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad n_1 + m_2 \ = \ n_2 + m_1.$$

Ясно, что $\sim$ — эквивалентность на $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Для каждого $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ через $[n, m]$ мы будем обозначать класс эквивалентности (n, m) по $\sim$. Возьмём $\mathbb{Z}$ равным соответствующему фактор-множеству, т.е.

$$\mathbb{Z} \ := \ (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_{\sim}.$$

Элементы $\mathbb{Z}$ условимся называть *целыми числами*. Теперь определим на $\mathbb{Z}$ отношение $<$ следующим образом:

$$[n_1, m_1] < [n_2, m_2] \quad :\Longleftrightarrow \quad n_1 + m_2 < n_2 + m_2.$$

Кроме того, зададим $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ и $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по правилам:

$$\begin{aligned} [n_1, m_1] + [n_2, m_2] \; &:= \; [n_1 + n_2, m_1 + m_2]; \\ [n_1, m_1] \cdot [n_2, m_2] \; &:= \; [n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2, n_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot n_2]. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что такое задание корректно. Более того, читателю рекомендуется проверить, что в соответствующей структуре с носителем $\mathbb{Z}$ верны все аксиомы упорядоченных колец.

К сожалению, формально $\mathbb{N}$ не является подмножеством $\mathbb{Z}$, однако $\mathbb{N}$ вкладывается в $\mathbb{Z}$ посредством функции $\lambda^{\mathbb{N}} n.\,([n, 0])$, которая отображает каждое $n \in \mathbb{N}$ в $[n, 0]$, т.е. в $\{(n + m, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$.

Замечание. Выше мы использовали так называемую «λ-нотацию». В общем случае выражение $\lambda^X u.\,(\_\_u\_\_)$ будет означать функцию, которая отображает каждое $u \in X$ в $\_\_u\_\_$.

Рациональные числа

Для удобства обозначим $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ через $\mathbb{Z}'$. Определим на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ отношение $\sim$ по правилу

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad n_1 \cdot m_2 \; = \; n_2 \cdot m_1.$$

Ясно, что $\sim$ будет эквивалентностью на $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$. Для каждого $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'$ через $[n, m]$ мы будем обозначать класс эквивалентности (n, m) по $\sim$. Возьмём

$$\mathbb{Q} \; := \; \big(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}'\big)/_{\sim}.$$

Элементы $\mathbb{Q}$ условимся называть *рациональными числами*. Теперь определим на $\mathbb{Q}$ отношение $<$ следующим образом:

$$\begin{aligned}[n_1, m_1] < [n_2, m_2] \quad :\Longleftrightarrow \quad & (m_1 \cdot m_2 > 0 \wedge n_1 \cdot m_2 < n_2 \cdot m_2) \\ & \vee (m_1 \cdot m_2 < 0 \wedge n_1 \cdot m_2 > n_2 \cdot m_2).\end{aligned}$$

Кроме того, зададим $+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ и $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ по правилам:

$$\begin{aligned}[n_1, m_1] + [n_2, m_2] &:= [n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1, m_1 \cdot m_2]; \\ [n_1, m_1] \cdot [n_2, m_2] &:= [n_1 \cdot n_2, m_1 \cdot m_2].\end{aligned}$$

Легко убедиться, что такое задание корректно. Более того, читателю рекомендуется проверить, что в соответствующей структуре с носителем $\mathbb{Q}$ верны все аксиомы упорядоченных полей.

Замечание. Разумеется, на $\mathbb{Q}$ можно без труда определить и другие известные функции, например взятие модуля.

Формально $\mathbb{Z}$ не является подмножеством $\mathbb{Q}$, однако $\mathbb{Z}$ вкладывается в $\mathbb{Q}$ посредством функции $\lambda^{\mathbb{Z}} n.\,([n, 1])$, которая отображает каждое $n \in \mathbb{Z}$ в $[n, 1]$, т.е. в $\{(n \cdot m, m) \mid m \in \mathbb{Z}'\}$.

Вещественные числа

Хотя существуют различные подходы к определению $\mathbb{R}$, все они в известном смысле эквивалентны друг другу. Среди них весьма удобным с алгебраической точки зрения является тот, в котором используются фундаментальные последовательности.

Напоминаю, что $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ называют *фундаментальной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, k \in \mathbb{N}$,

$$m, k \;\geqslant\; N \quad \Longrightarrow \quad |f(m) - f(k)| \;<\; \frac{1}{2^n}.$$[7]

Обозначим через $\mathscr{Q}$ множество всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел, т.е.

$$\mathscr{Q} \ := \ \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid f \text{ фундаментальна}\}.$$

Определим на $\mathscr{Q}$ отношение $\sim$ по правилу: $f \sim g$, если и только если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m \in \mathbb{N}$,

$$m \ \geqslant \ N \quad \Longrightarrow \quad |f(m) - g(m)| \ < \ \frac{1}{2^n}.$$

Нетрудно проверить, что $\sim$ — эквивалентность на $\mathscr{Q}$. Для каждой $f \in \mathscr{Q}$ через $[f]$ мы будем обозначать класс эквивалентности f по $\sim$. Это приводит нас к

$$\mathbb{R} \ := \ \mathscr{Q}/_{\sim}.$$

Элементы $\mathbb{R}$ условимся называть *вещественными* (или *действительными*) *числами*. В качестве упражнения: определите $<$ на $\mathbb{R}$, а также задайте $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; проверьте, что получившаяся структура с носителем $\mathbb{R}$ является упорядоченным полем.

Очевидно, $\mathbb{Q}$ вкладывается в $\mathbb{R}$ посредством функции, отображающей каждое $q \in \mathbb{Q}$ в $[(q, q, \ldots)]$.

5 Аксиомы IST

Цель этого раздела — познакомить читателя с аксиомами теории внутренних множеств, т.е. системы IST.

Пусть σ — сигнатура теории множеств, обогащённая специальным одноместным предикатным символом $\mathtt{St}$, т.е. $\langle \in^2, =^2, \mathtt{St}^1 \rangle$. В разделах 5 и 6 под *формулами* мы будем понимать σ-формулы. Интуитивно $\mathtt{St}$ соответствует предикату «быть стандартным», «быть заданным» или «быть конкретным». По природе $\mathtt{St}$ сильно отличается от $\in$ и $=$: его интерпретация как будто требует выхода на метауровень.

[7] Разумеется, функцию модуля на $\mathbb{Q}$ можно легко определить.

Формулу называют *внутренней*, если она не содержит вхождений $\mathtt{St}$, и *внешней* иначе.

Помимо аксиом классической теории множеств, IST включает три новые схемы, назывемые «принципами»:

- *принцип переноса*, который явно намекает на консервативность IST над ZFC, хотя настоящее обоснование консервативности требует дополнительных усилий (см. теорему 5.16);
- *принцип идеализации*, который гарантирует существование достаточно большого количества нестандратных объектов;
- *принцип стандартизации*, который в определённом смысле позволяет возвращаться в «стандартный мир» (в частности, см. утверждение 5.12).

Значит, у каждой из новых схем имеется своя задача. Ниже мы явно выпишем аксиомы IST и обсудим некоторые их следствия.

Принцип расширения

Система IST включает ZFC. В частности, для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, \overline{z})$ имеется своя аксиома выделения:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u, \overline{z}))).$$

Однако для внешних формул таких аксиом нет ни в ZFC, ни в IST — иначе в IST можно было бы вывести противоречие.

Принцип переноса

Для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, \overline{z})$ мы имеем свою *аксиому переноса*:

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \big(\exists u\, \Phi(u, \overline{z}) \to \exists^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, \overline{z})\big) \qquad (\mathsf{T})$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание, т.е. навесить кванторы всеобщности по всем переменным из $\overline{z}$). Очевидно, здесь можно заменить вторую «$\rightarrow$» на «$\leftrightarrow$». Кроме того, данную схему можно переформулировать в терминах $\forall$:

$$\mathtt{St}\,(\overline{z}) \rightarrow \bigl(\forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi\,(u, \overline{z}) \rightarrow \forall u\, \Phi\,(u, \overline{z})\bigr).$$

При применении T важно помнить, что все параметры должны быть стандартными.

Замечание. Выражение $\exists^{\mathtt{St}} u$ читается как «существует стандартное u», а $\forall^{\mathtt{St}} u$ — как «для любого стандартного u».

Утверждение 5.1. *Для каждой внутренней формулы* $\Phi\,(x, \overline{z})$,

$$\mathtt{St}\,(\overline{z}) \wedge \exists! u\, \Phi\,(u, \overline{z}) \wedge \Phi\,(x, \overline{z}) \rightarrow \mathtt{St}\,(x),$$

где ! *указывает на единственность.* □

Значит, если внутренней $\Phi\,(x, \overline{z})$ удовлетворяет единственное x при данных стандартных $\overline{z}$, то соответствующее x является стандартным. В частности, отсюда следует выводимость $\mathtt{St}\,(\mathbb{N})$, а также

$$\mathtt{St}\,(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\,(\mathtt{St}\,(n) \rightarrow \mathtt{St}\,(n+1)). \qquad (*)$$

При этом из $(*)$ нельзя вывести $(\forall n \in \mathbb{N})\, \mathtt{St}\,(n)$, применяя принцип индукции, так как $\mathtt{St}\,(x)$ — внешняя формула.

Утверждение 5.2. *Для каждой внутренней формулы* $\Phi\,(\overline{z})$,

$$\mathtt{St}\,(\overline{z}) \rightarrow \bigl(\Phi\,(\overline{z}) \leftrightarrow \Phi^{\mathtt{St}}\,(\overline{z})\bigr),$$

где $\Phi^{\mathtt{St}}\,(\overline{z})$ *— релятивизация* $\Phi\,(\overline{z})$ *на* $\mathtt{St}$, *т.е.* $\Phi^{\mathtt{St}}\,(\overline{z})$ *получается из* $\Phi\,(\overline{z})$ *путём замены всех* $\forall$ *и* $\exists$ *на* $\forall^{\mathtt{St}}$ *и* $\exists^{\mathtt{St}}$ *соответственно.*

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что $\Phi(\overline{z})$ имеет вид

$$\mathrm{Q}_1 u_1 \, \ldots \, \mathrm{Q}_n u_n \, \Psi(u_1, \ldots, u_n, \overline{z}),$$

где $\{\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n\} \subseteq \{\forall, \exists\}$ и $\Psi(u_1, \ldots, u_n, \overline{z})$ — бескванторная формула. Далее идёт простая индукция по n. $\square$

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Обозначим

$$^\circ[\![\Phi]\!] \;:=\; \{x \mid \Phi(x, \overline{z}) \wedge \mathtt{St}(x)\}.$$

Эту кучу называют *ядром (кучи)* $[\![\Phi]\!]$. Если в качестве Φ взять $x \in X$, мы получим $[\![\Phi]\!] = X$, однако $^\circ X$ останется кучей (которая не обязана быть множеством).

Утверждение 5.3. *i.* $\forall^{\mathtt{St}} X \, \forall^{\mathtt{St}} Y \, (X \subseteq Y \leftrightarrow {}^\circ X \subseteq {}^\circ Y)$*;*

ii. $\forall^{\mathtt{St}} X \, \forall^{\mathtt{St}} Y \, (X = Y \leftrightarrow {}^\circ X = {}^\circ Y)$*.*

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Пусть X и Y стандартны. Очевидно, $X \subseteq Y$ влечёт $^\circ X \subseteq {}^\circ Y$ (для любых X и Y, не обязательно стандартных). Если же $\forall^{\mathtt{St}} u \, (u \in X \to u \in Y)$, то $\forall u \, (u \in X \to u \in Y)$ ввиду T.

$\boxed{\text{ii}}$ Следует из (i). $\square$

Значит, для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$ существует не более одного стандартного X такого, что $^\circ X = {}^\circ[\![\Phi]\!]$ — такое X (при его наличии) называют *стандартизацией* $[\![\Phi]\!]$ и обозначают через $^*[\![\Phi]\!]$.

Принцип идеализации

Напомним одно из наиболее удобных определений свойства «быть конечным» в теории множеств. Рассмотрим

$$\mathtt{Fin}(X) \;:=\; (\exists n \in \mathbb{N}) \, \exists f \text{ «} f \text{ — биекция между } X \text{ и } n\text{»}.$$

Говорят, что X *конечно*, если $\mathtt{Fin}\,(X)$. При этом $\mathbb{N}$ задаётся обычным образом, т.е. так же, как в разделе 3.

Для каждой внутренней формулы $\Phi\,(x, y, \overline{z})$ имеется своя *аксиома идеализации*:

$$\forall^{\mathtt{St\ Fin}} X\, \exists y\, (\forall u \in X)\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \to \exists y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \tag{I}$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание). В [6] вместо «$\to$» стоит «$\leftrightarrow$», но «$\leftarrow$» окажется выводима в описанной нами версии IST.

В приложениях полезным оказывается:

Утверждение 5.4. *Для каждой внутренней формулы* $\Phi\,(x, y, \overline{z})$,

$$\begin{gathered}\left(\forall^{\mathtt{Fin}} X \subseteq Y\right) (\exists y \in Y)\, (\forall u \in X)\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \quad \longrightarrow \\ (\exists y \in Y)\, \left(\forall^{\mathtt{St}} u \in Y\right) \Phi\,(u, y, \overline{z}).\end{gathered} \tag{I'}$$

Доказательство. Для удобства представим I в виде

$$\forall^{\mathtt{St\ Fin}} X\, \exists y\, (\forall u \in X)\, \Theta\,(u, y, \overline{z}, Y) \to \exists y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, \Theta\,(u, y, \overline{z}, Y). \tag{$\ddagger$}$$

Возьмём

$$\Theta\,(u, y, \overline{z}, Y) \;:=\; y \in Y \wedge (u \in Y \to \Phi\,(u, y, \overline{z})).$$

Тогда заключение ($\ddagger$) превратится в заключение I', а посылка ($\ddagger$) — в

$$\left(\forall^{\mathtt{St\ Fin}} X\right) (\exists y \in Y)\, (\forall u \in X \cap Y)\, \Phi\,(u, y, \overline{z}).$$

Легко видеть, что полученное условие (даже с $\forall^{\mathtt{St}} X$ вместо $\forall^{\mathtt{St\ Fin}} X$) следует из посылки I', что даёт нужный результат. $\square$

Покажем, что куча ${}^\circ\mathbb{N}$, состоящая из всех стандартных натуральных чисел, имеет (нестандартную) верхнюю грань в $\mathbb{N}$:

Следствие 5.5. $(\exists n \in \mathbb{N})\, \left(\forall^{\mathtt{St}} k \in \mathbb{N}\right) (k < n)$.

Доказательство. Подставляя $x \in y$ и $\mathbb{N}$ вместо $\Phi(x, y, \overline{z})$ и Y в I', мы получаем

$$\left(\forall^{\mathtt{Fin}} X \subseteq \mathbb{N}\right) (\exists y \in \mathbb{N}) (\forall u \in X) (u \in y) \quad \longrightarrow \\ (\exists y \in \mathbb{N}) \left(\forall^{\mathtt{St}} u \in \mathbb{N}\right) (u \in y).$$

Осталось заметить, что посылка этой импликации истинна. □

Следствие 5.6. $\neg \exists X \, (X = {}^\circ\mathbb{N})$, *т.е.* ${}^\circ\mathbb{N}$ *не является множеством.*

Доказательство. Предположим, что ${}^\circ\mathbb{N}$ — множество. Значит, $\mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$ — снова множество, причём непустое. Обозначим через n наименьший элемент в $\mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$. Очевидно, $n \neq 0$. Тогда $n - 1 \in {}^\circ\mathbb{N}$, а потому $n = (n-1) + 1 \in {}^\circ\mathbb{N}$ — противоречие. □

Вместо утверждения 5.4 иногда удобно использовать:

Утверждение 5.7. *Для каждой внутренней формулы* $\Phi(x, y, \overline{z})$,

$$\mathtt{St}(Y) \wedge \left(\forall^{\mathtt{St\ Fin}} X \subseteq Y\right) (\exists y \in Y) (\forall u \in X) \, \Phi(u, y, \overline{z}) \quad \longrightarrow \\ (\exists y \in Y) \left(\forall^{\mathtt{St}} u \in Y\right) \Phi(u, y, \overline{z}). \qquad (\mathsf{I}'')$$

Доказательство. Аналогично предыдущему, однако тут нужно будет учесть, что пересечение двух стандартных множеств (одним из которых будет Y) стандартно. □

Замечание. Естественно возникает вопрос:

Что случится, если мы удалим из I'' *условие «*$\mathtt{St}(Y)$*»?*

Разумеется, мы получим схему, которая сильнее, чем I' и I''. На самом деле, она тоже окажется выводима в IST, но здесь понадобится принцип стандартизации S, который мы рассмотрим чуть позже.

Кроме того, I гарантирует существование (нестандартного) конечного множества, содержащего все стандартные множества:

Утверждение 5.8. $\exists^{\mathtt{Fin}} F\, \forall^{\mathtt{St}} u\, (u \in F)$.

Доказательство. Подставляя $u \in y \wedge \mathtt{Fin}\,(y)$ вместо $\Phi\,(u, y, \overline{z})$ в I, мы получаем

$$\forall^{\mathtt{St}\ \mathtt{Fin}} X\, \exists y\, (\forall u \in X)\, (u \in y \wedge \mathtt{Fin}\,(y)) \to \exists y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, (u \in y \wedge \mathtt{Fin}\,(y)),$$

что равносильно

$$\forall^{\mathtt{St}\ \mathtt{Fin}} X\, \exists^{\mathtt{Fin}} y\, (X \subseteq y) \to \exists^{\mathtt{Fin}} y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, (u \in y).$$

Очевидно, посылка этой импликации истинна. □

Замечание. Соответствующее F должно быть нестандартным, а его ядро ${}^{\circ}F$ не может быть множеством (так как иначе ${}^{\circ}\mathbb{N} = {}^{\circ}F \cap \mathbb{N}$ было бы множеством). Вместе с тем конечность F означает существование биекции между F и некоторым $n \in \mathbb{N}$, причём n будет нестандартным ввиду нестандартности F.

Поэтому всякое бесконечное множество должно содержать нестандартный элемент:

Следствие 5.9. $\forall X\, (\neg \mathtt{Fin}\,(X) \to X \neq {}^{\circ}X)$.

Доказательство. Предположим, что $X = {}^{\circ}X$. Тогда $X = X \cap F \subseteq F$, а потому X конечно. □

Принцип стандартизации

Для каждой формулы $\Phi\,(x, \overline{z})$ (не обязательно внутренней) имеется своя *аксиома стандартизации*:

$$\forall^{\mathtt{St}} X\, \exists^{\mathtt{St}} Y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, (u \in X \wedge \Phi\,(u, \overline{z}) \leftrightarrow u \in Y), \tag{S}$$

т.е. для любого стандартного X найдётся стандартное Y такое, что

$$^{\circ}\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} \;=\; ^{\circ}Y,$$

т.е. Y — стандартизация $\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} = [\![x \in X \wedge \Phi(x, \overline{z})]\!]$.

Утверждение 5.10. *Принцип стандартизации логически эквивалентен следующей схеме: для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$,*

$$\exists^{\mathtt{St}} X\, (^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X) \to \exists^{\mathtt{St}} Y\, (^{\circ}[\![\Phi]\!] = {}^{\circ}Y).$$

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Ясно, что если у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация, то

$$^{\circ}[\![\Phi]\!] \;=\; ^{\circ*}[\![\Phi]\!] \;\subseteq\; ^{*}[\![\Phi]\!] \;=\; ^{*\circ}[\![\Phi]\!].$$

В частности, $^{*}[\![\Phi]\!]$ включает $^{\circ}[\![\Phi]\!]$. Более того, имеет место:

Теорема 5.11. *Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула, причём у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация. Тогда*

$$\forall^{\mathtt{St}} X\, (^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X \to {}^{*}[\![\Phi]\!] \subseteq X).$$

Таким образом, $^{*}[\![\Phi]\!]$ является наименьшим по включению стандартным множеством, включающим $^{\circ}[\![\Phi]\!]$.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

Замечание. В формулировке теоремы выше нельзя заменить $\forall^{\mathtt{St}}$ на $\forall$: например, $^{*}\mathbb{N} = {}^{*\circ}\mathbb{N} = \mathbb{N}$, но $^{\circ}\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{n\} \subsetneq \mathbb{N}$, где n — некоторое нестандартное натуральное число.

Замечание. Может случиться так, что $[\![\Phi]\!] \not\subseteq {}^{*}[\![\Phi]\!]$, или $^{*}[\![\Phi]\!] \not\subseteq [\![\Phi]\!]$, или даже оба включения нарушаются. Например, рассмотрим

$$\Phi(x) \;:=\; (\exists n \in \mathbb{N})\, (\mathtt{St}(n) \wedge x = 2n) \vee x = 2m + 1,$$

где m — какое-нибудь нестандартное натуральное число. Разумеется, ${}^*[\![\Phi]\!]$ совпадает с $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Стало быть,

$$2m+1 \ \in\ [\![\Phi]\!] \setminus {}^*[\![\Phi]\!] \quad \text{и} \quad 2m \ \in\ {}^*[\![\Phi]\!] \setminus [\![\Phi]\!].$$

Ранее было отмечено, что принцип индукции нельзя применять к внешним формулам. Тем не менее, с помощью S можно получить:

Утверждение 5.12 (принцип внешней индукции)**.** *Для каждой формулы* $\Phi(x, \overline{z})$ *(не обязательно внутренней),*

$$\Phi(0, \overline{z}) \wedge \left(\forall^{\mathtt{St}} n \in \mathbb{N}\right) (\Phi(n, \overline{z}) \to \Phi(n+1, \overline{z})) \to \left(\forall^{\mathtt{St}} n \in \mathbb{N}\right) \Phi(n, \overline{z}).$$

Доказательство. Предположим, что посылка импликации верна, однако существует $m \in {}^\circ\mathbb{N}$ такое, что $\neg\Phi(m, \overline{z})$. Возьмём

$$X \ :=\ {}^*\{n \in {}^\circ\mathbb{N} \mid \neg\Phi(n, \overline{z})\}.$$

Ясно, что $X \neq \varnothing$. Пусть k — наименьший элемент в X. Заметим, что $k \in {}^\circ\mathbb{N}$, а значит, $\neg\Phi(k, \overline{z})$. Очевидно, $k \neq 0$. При этом $k-1 \notin X$, что даёт $\Phi(k-1, \overline{z})$, откуда $\Phi(k, \overline{z})$ — противоречие. □

Простой пример применения:

Утверждение 5.13. $\forall X\, (\mathtt{St}(X) \wedge \mathtt{Fin}(X) \to X = {}^\circ X)$.

Доказательство. Рассмотрим (внешнюю) формулу

$$\Phi(n) \ :=\ \forall^{\mathtt{St}} X\, (X \sim n \to X = {}^\circ X.)$$

Используя принцип внешней индукции, легко вывести, что

$$\left(\forall^{\mathtt{St}} n \in \mathbb{N}\right) \Phi(n).^8$$

Поскольку мощность стандартного множества всегда стандартна, это равносильно $(\forall n \in \mathbb{N})\, \Phi(n)$. □

Замечание. С помощью утверждения 5.13 легко получить

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \big(\neg \mathtt{St}\,(n) \to \big(\forall^{\mathtt{St}} k \in \mathbb{N}\big)\,(n \not< k)\big).$$

Стало быть, натуральное число нестандартно, если и только если оно больше всех стандартных, т.е.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \big(\neg \mathtt{St}\,(n) \leftrightarrow \big(\forall^{\mathtt{St}} k \in \mathbb{N}\big)\,(k < n)\big).$$

Кроме того, утверждение 5.13 позволяет заменить «$\to$» в I на «$\leftrightarrow$».

Обратное тоже верно:

Утверждение 5.14. $\forall X\,(X = {}^{\circ}X \to \mathtt{St}\,(X) \wedge \mathtt{Fin}\,(X))$.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. □

В итоге мы получили полезный критерий: множество совпадает со своим ядром, если и только если оно стандартно и конечно.

Утверждение 5.15. $\forall X\,(\mathtt{St}\,(X) \wedge \mathtt{Fin}\,(X) \to \forall U\,(U \subseteq X \to \mathtt{St}\,(U)))$.

Доказательство. Пусть X стандартно и конечно. Тогда $\mathcal{P}\,(X)$ также стандартно и конечно. Осталось применить утверждение 5.13. □

Замечание. Легко понять, что утверждение 5.15 позволяет удалить из I'' условие «$\mathtt{St}\,(Y)$», усилив тем самым утверждение 5.7.

С точки зрения классической математики легитимность IST гарантирует следующий результат.

Теорема 5.16 (Поуэлла). *Для любого внутреннего предложения Φ,*

$$\mathsf{IST} \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{ZFC} \vdash \Phi,$$

где $\vdash$ обозначает отношение выводимости в логике предикатов.

[8]Один тонкий момент: если X стандартно и непусто, то $\exists^{\mathtt{St}} x\,(x \in X)$ ввиду T.

Доказательство. К сожалению, изложение нужной техники потребовало бы написания отдельной брошюры, однако заинтересованный читатель может обратиться к [6, раздел 8] или [1, раздел 3.3]. □

Иными словами, IST — консервативное расширения ZFC, а потому её можно использовать для доказательства внутренних утверждений. Интересные примеры применения IST приведены в [7].

Замечание. В рамках теоретико-модельного подхода Робинсона (см. [8]) в носитель стандартной модели анализа добавляются бесконечно большие и малые (по сравнению с обычными числами) элементы; при этом сигнатура не меняется и в расширенной структуре оказываются истинны те же самые предложения — здесь можно было бы провести аналогию с консервативностью IST над ZFC.

6 Анализ бесконечно малых в IST

Теперь, освоившись с принципами IST, перейдём к моделированию аналитических рассуждений в духе Лейбница и Ньютона. Поскольку IST включает ZFC, мы не теряем ничего из обычной математики. При этом $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ определяются так же, как в ZFC, т.е. «внутренним» образом (см. разделы 3 и 4). Вместе с тем аксиомы IST гарантируют наличие нестандартных элементов в $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Грубо говоря, такая ситуация возникает из-за того, что рассуждения в IST соответствуют рассуждениям внутри нестандартной модели ZFC.

Ключевые роли в дальнейшем будут играть кучи

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &:= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\exists^{\mathtt{St}} r \in \mathbb{R}\right)(|x| < r)\right\} \quad \text{и} \\ \mathbb{I} &:= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\forall^{\mathtt{St}} r \in \mathbb{R}\right)(r > 0 \to |x| < r)\right\}. \end{aligned}$$

Элементы $\mathbb{O}$ называются *ограниченными*, а $\mathbb{I}$ — *бесконечно малыми*, или *инфинитезималями*. Очевидно, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{O}$ и ${}^{\circ}\mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$.

Разумеется, $\mathbb{I} \cap {}^\circ\mathbb{R} = \{0\}$. Кроме того, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{O} \neq \varnothing$ по построению, т.е. неограниченные элементы существуют, причём среди них есть как положительные, так и отрицательные.

Утверждение 6.1. *Пусть* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{O}$. *Тогда* $1/x \in \mathbb{I}$.

Доказательство. Пусть r — положительный элемент ${}^\circ\mathbb{R}$. По условию $|x| \not< 2/r$, т.е. $|x| \geqslant 2/r$, откуда $|1/x| = 1/|x| \leqslant r/2 < r$. □

Утверждение 6.2. *i.* $\mathbb{O}$ *замкнуто относительно* $+$, $-$ *и* $\cdot$.

ii. $\mathbb{I}$ *замкнуто относительно* $+$ *и* $-$. *Кроме того,*

$$x \cdot y \ \in \ \mathbb{I} \quad \textit{для всех } x \in \mathbb{I} \textit{ и } y \in \mathbb{O}.$$

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Пусть $x, y \in \mathbb{O}$, т.е. $|x| < r$ и $|y| < s$ для некоторых $r, s \in {}^\circ\mathbb{R}$. Тогда

$$|x \pm y| \ \leqslant \ |x| + |y| \ < \ r + s \quad \text{и} \quad |x \cdot y| \ \leqslant \ |x| \cdot |y| \ < \ r \cdot s.$$

Вместе с тем утверждение 5.1 гарантирует, что сумма и произведение стандартных чисел стандартны. Стало быть, $x \pm y \in \mathbb{O}$ и $x \cdot y \in \mathbb{O}$.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $x, y \in \mathbb{I}$. Для любого положительного $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ мы имеем $|x| < r/2$ и $|y| < r/2$, а потому

$$|x \pm y| \ < \ r/2 + r/2 \ = \ r.$$

Значит, $x \pm y \in \mathbb{I}$.

Пусть $x \in \mathbb{I}$ и $y \in \mathbb{O}$. Зафиксируем $s \in {}^\circ\mathbb{R}$ такое, что $|y| < s$. Тогда для любого положительного $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ верно $|x| < r/s$, а потому

$$|x \cdot y| \ < \ r/s \cdot s \ = \ r.$$

Значит, $x \cdot y \in \mathbb{I}$. □

Говорят, что x и y *бесконечно близки*, и пишут $x \approx y$, если их разность бесконечно мала, т.е. $x - y \in \mathbb{I}$.

Утверждение 6.3. $\approx$ *является «эквивалентностью» на* $\mathbb{R}$.[9]

Доказательство. Рефлексивность очевидна. Симметричность и транзитивность легко получить с помощью утверждения 6.2 (ii). $\square$

Замечание. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$:

i. если $x \approx y$ и $x \in \mathbb{O}$, то $y \in \mathbb{O}$;

ii. если $x \approx y$ и $x \in \mathbb{I}$, то $y \in \mathbb{I}$.

Далее, $\approx$ согласовано с $+$, $-$ и $\cdot$ в естественном смысле:

Утверждение 6.4. *Для любых* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$*:*

i. если $x \approx y$ *и* $u \approx v$*, то* $x \pm u \approx y \pm v$*;*

ii. если $x \approx y$ *и* $u \approx v$*, причём* $\{x, y, u, v\} \subseteq \mathbb{O}$*, то* $x \cdot u \approx y \cdot v$*.*

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Пусть $x \approx y$ и $u \approx v$. Тогда

$$(x \pm u) - (y \pm v) \;=\; (x - y) \pm (u - v) \;\in\; \mathbb{I},$$

т.е. $x \pm u \approx y \pm v$.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $x \approx y$ и $u \approx v$, причём $\{x, y, u, v\} \subseteq \mathbb{O}$. Тогда

$$\begin{aligned} (x \cdot u) - (y \cdot v) \;&=\\ (x \cdot u) + (x \cdot v) - (x \cdot v) - (y \cdot v) \;&=\\ x \cdot (u - v) + (x - y) \cdot v \;&\in\; \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $x \cdot u \approx y \cdot v$. $\square$

[9] Кавычки обусловлены тем, что $\approx$, строго говоря, не является подмножеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а лишь его подкучей.

Теорема 6.5. *Для любого $x \in \mathbb{O}$ существует единственное $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ такое, что $x \approx r$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{O}$. Рассмотрим

$$Y \ := \ {}^*\{s \in {}^\circ\mathbb{R} \mid s \leqslant x\}$$

(чьё существование гарантирует принцип стандартизации). Нетрудно понять, что Y имеет верхнюю грань в $\mathbb{R}$. Возьмём

$$r \ := \ \sup Y,$$

т.е. r — наименьшая верхняя грань Y в $\mathbb{R}$. Ясно, что r стандартно (в силу утверждения 5.1). Более того, можно проверить, что $x \approx r$. □

Значит, всякое $x \in \mathbb{O}$ однозначно представляется в виде

$$r + \varepsilon,$$

где $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{I}$; при этом r называют *стандартной частью* x, или *тенью* x, и обозначают через $\mathrm{st}\,(x)$.

Утверждение 6.6. *i.* st *является «сюръекцией» из $\mathbb{O}$ на ${}^\circ\mathbb{R}$;*

ii. для любого $x \in \mathbb{O}$,

$$\mathrm{st}\,(x) \ = \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ \in \ \mathbb{I};$$

iii. для любых $x, y \in \mathbb{O}$,

$$\mathrm{st}\,(x+y) \ = \ \mathrm{st}\,(x) + \mathrm{st}\,(y) \quad \textit{и} \quad \mathrm{st}\,(x \cdot y) \ = \ \mathrm{st}\,(x) \cdot \mathrm{st}\,(y).$$[10]

[10] Кавычки в (i) обусловлены тем, что st, строго говоря, не является функцией, а лишь куча-функцией.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Очевидно, $\mathrm{st}\,(r) = r$ для всех $r \in {}^\circ\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $x \in \mathbb{O}$. Ясно, что $x \in \mathbb{I}$ равносильно $x \approx 0$, т.е. $\mathrm{st}\,(x) = 0$.

$\boxed{\text{iii}}$ Пусть $x, y \in \mathbb{O}$. Так как $\mathrm{st}\,(x) \approx x$ и $\mathrm{st}\,(y) \approx y$, мы получаем

$$\mathrm{st}\,(x) + \mathrm{st}\,(y) \;\approx\; x + y \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(x) \cdot \mathrm{st}\,(y) \;\approx\; x \cdot y$$

(ввиду согласованности $\approx$ с $+$, $-$ и $\cdot$). Стало быть,

$$\mathrm{st}\,(x + y) \;=\; \mathrm{st}\,(x) + \mathrm{st}\,(y) \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(x \cdot y) \;=\; \mathrm{st}\,(x) \cdot \mathrm{st}\,(y).$$

$\square$

По поводу распределения стандартных вещественных чисел среди ограниченных на общей оси:

Утверждение 6.7. *i.* $(\forall x, y \in \mathbb{O})\,(x < y \to \mathrm{st}\,(x) \leqslant \mathrm{st}\,(y))$;

ii. $(\forall x, y \in \mathbb{O})\,\big(x < y \wedge x \not\approx y \to \big(\exists^{\mathtt{St}} r \in \mathbb{R}\big)\,(x < r < y)\big)$.

Доказательство. $\boxed{\text{i}}$ Мы уже знаем, что для любого $u \in \mathbb{O}$,

$$\mathrm{st}\,(u) \;:=\; \sup{}^*\,\{r \in {}^\circ\mathbb{R} \mid r \leqslant u\}.$$

(см. доказательство теоремы 6.5). Стало быть, для любых $x, y \in \mathbb{O}$,

$$\begin{aligned} x \;<\; y \quad &\Longrightarrow\quad \{r \in {}^\circ\mathbb{R} \mid r \leqslant x\} \;\subseteq\; \{r \in {}^\circ\mathbb{R} \mid r \leqslant y\} \\ &\Longrightarrow\quad {}^*\{r \in {}^\circ\mathbb{R} \mid r \leqslant x\} \;\subseteq\; {}^*\{r \in {}^\circ\mathbb{R} \mid r \leqslant y\} \\ &\Longrightarrow\quad \mathrm{st}\,(x) \;\leqslant\; \mathrm{st}\,(y). \end{aligned}$$

При этом возможны ситуации, когда $x < y$ и $\mathrm{st}\,(x) = \mathrm{st}\,(y)$.

$\boxed{\text{ii}}$ Заметим, что для любых $x, y \in \mathbb{O}$,

$$\begin{aligned} x < y \wedge \neg\big(\exists^{\mathtt{St}} r \in \mathbb{R}\big)\,(x < r < y) \quad &\Longrightarrow\quad \big(\forall^{\mathtt{St}} r \in \mathbb{R}\big)\,(r \leqslant x \leftrightarrow r \leqslant y) \\ &\Longrightarrow\quad \mathrm{st}\,(x) \;=\; \mathrm{st}\,(y) \\ &\Longrightarrow\quad x \;\approx\; y. \end{aligned}$$

$\square$

Разумеется, в $\mathbb{R}$ каждому $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ соответствует

$$\begin{aligned}[r] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \approx r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{st}\,(x) = r\},\end{aligned}$$

своего рода *монада* r, состоящая из чисел вида

$$r + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{I}$. С помощью бесконечно близких можно развить, например, теорию предела (в духе Лейбница и Ньютона). Понятия вроде «быть непрерывной в точке» при этом становятся более локальными.

Утверждение 6.8. *Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i. f сходится к s в обычном смысле;

ii. для любого неограниченного $N \in \mathbb{N}$ верно $f\,(N) \approx s$.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Утверждение 6.9. *Пусть $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ сходятся к соответственно $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ (в обычном смысле). Тогда*

$$f_1 + f_2 \ := \ \lambda^{\mathbb{N}} n.\,(f_1\,(n) + f_2\,(n)) \quad и \quad f_1 \cdot f_2 \ := \ \lambda^{\mathbb{N}} n.\,(f_1\,(n) \cdot f_2\,(n))$$

сходятся к соответственно $s_1 + s_2$ и $s_1 \cdot s_2$.

Доказательство. Очевидно, доказываемое утверждение можно представить в виде

$$\forall f_1\,\forall f_2\,\forall s_1\,\forall s_2\,\Phi\,(f_1, f_2, s_1, s_2),$$

где Φ — внутренняя формула. Значит, в силу принципа переноса, мы можем считать f_1, f_2, s_1, s_2 стандартными. Кроме того, утверждение 6.8 позволяет нам использовать «внешнее» определение сходимости.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ неограничено. Тогда $f_1(N) \approx s_1$ и $f_2(N) \approx s_2$, откуда

$$f_1(N) + f_2(N) \;\approx\; s_1 + s_2 \quad \text{и} \quad f_1(N) \cdot f_2(N) \;\approx\; s_1 \cdot s_2$$

(здесь в случае умножения нужно учесть, что $f_1(N)$ и $f_2(N)$ ограничены, поскольку они бесконечно близки к s_1 и s_2). $\square$

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ стандартны. Говорят, что f *сходится в r к s*, если для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$ из $x \approx r$ следует $f(x) \approx s$.

Утверждение 6.10. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i. f сходится в r к s в смысле эпсилон-дельта определения;

ii. f сходится в r к s в смысле определения выше.

Доказательство. Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Замечание. Может случиться так, что стандартная f не сходится в стандартном r ни к какому s. Тем не менее, если f сходится в r к некоторому s, то соответствующее s определяется однозначно как

$$s \;=\; \operatorname{st}(f(r + \varepsilon)),$$

где ε — произвольная ненулевая инфинитезималь; это s традиционно обозначают как $\lim_{x \to r} f(x)$.

Замечание. Требование $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ является излишним. Для частичных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ достаточно было бы потребовать следующего:

найдётся $x \in \operatorname{dom} f$ *такое, что* $x \approx r$ *и* $x \neq r$.

Тем не менее, для наглядности мы ограничимся рассмотрением всюду определенных функций.

Следствие 6.11 (о непрерывности в точке)**.** *Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $r \in \mathbb{R}$ *стандартны. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i. f *непрерывна в* r *в обычном смысле;*

ii. для любого $x \in \mathbb{R}$, *если* $x \approx r$, *то* $f(x) \approx f(r)$.[11] $\square$

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда под *производной* f *в* r понимается

$$f'(r) \;:=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h},$$

если lim в правой части существует. Значит, для каждого стандартного $s \in \mathbb{R}$: $f'(r) = s$ тогда и только тогда, когда для всякой ненулевой инфинитезимали dx,

$$\frac{f(r+dx) - f(r)}{dx} \;\approx\; s,$$

где для числителя дроби в левой части нередко используют обозначение df. В частности, если $f'(r)$ существует, то

$$f'(r) \;=\; \operatorname{st}(df/dx),$$

где dx — произвольная ненулевая инфинитезималь, а df/dx — результат непосредственно *деления*, а не предел в обычном смысле.

Пример. Рассмотрим $f := \lambda^{\mathbb{R}} x.\,(x^2)$, которая отображает каждое $x \in \mathbb{R}$ в x^2. Разумеется, f стандартна. Пусть r — стандартный элемент $\mathbb{R}$. Ясно, что для всякой ненулевой инфинитезимали dx,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} \;&=\; \frac{(r+dx)^2 - r^2}{dx} \\ &=\; \frac{r^2 + 2r(dx) + (dx)^2 - r^2}{dx} \\ &=\; \frac{2r(dx) + (dx)^2}{dx} \\ &=\; 2r + dx \;\approx\; 2r. \end{aligned}$$

[11] Можно ещё переписать (ii) как «f сходится в r к $f(r)$».

Стало быть, $f'(r) = 2r$. Поэтому, в силу утверждения 6.10 и принципа переноса T, мы имеем

$$f'(r) \;=\; 2r \quad \text{для всех } \; r \in \mathbb{R},$$

где $f'(r)$ понимается «внутренним» образом, т.е. в обычном смысле.

Пример. Рассмотрим $f := \lambda^{\mathbb{R}} x.\,(x^3)$. Пусть r — стандартный элемент $\mathbb{R}$. Ясно, что для всякой ненулевой инфинитезимали dx,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{(r+dx)^3 - r^3}{dx} \\
&= \frac{r^3 + 3r^2\,(dx) + 3r(dx)^2 + (dx)^3 - r^3}{dx} \\
&= \frac{3r^2\,(dx) + 3r(dx)^2 + (dx)^3}{dx} \\
&= 3r^2 + 3r\,(dx) + (dx)^2 \;\approx\; 3r^2.
\end{aligned}$$

Стало быть, $f'(r) = 3r^2$. Отсюда мы имеем

$$f'(r) \;=\; 3r^2 \quad \text{для всех } \; r \in \mathbb{R},$$

где $f'(r)$ понимается в обычном смысле.

Пример. Обобщим предыдущие два примера. По теореме 3.7 для любого $m \in \mathbb{N}$ существует единственная

$$f_m \;:=\; \lambda^{\mathbb{R}} x.(x^m).$$

Значит, если m стандартно, то и f_m стандартна. Кроме того, как и в ZFC, для любого $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (не обязательно стандартного),

$$(x+y)^m \;=\; \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} y^k \;=\; x^m + m x^{m-1} y + \ldots + y^m.$$

Здесь само равенство доказывается индукцией по m, а сумма определяется посредством теоремы 3.7 (остаётся читателю как упражнение).

Наконец, зафиксируем произвольное $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Тогда, как можно легко убедиться, для каждого $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ имеет место $f'_n(r) = nr^{n-1}$. Отсюда

$$f'_m(r) \;=\; mr^{m-1} \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N} \text{ и } r \in \mathbb{R},$$

где $f'_m(r)$ понимается в обычном смысле.

Утверждение 6.12. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$. Предположим, что $f'(r)$ существует (в обычном смысле). Тогда f непрерывна в r.*

Доказательство. В силу T, мы можем считать f и r стандартными, а утверждение 6.10 позволяет нам использовать «внешнее» определение сходимости.

Рассмотрим теперь произвольную ненулевую инфинитезималь dx. По условию

$$\frac{f(r+dx) - f(r)}{dx} \;\approx\; f'(r).$$

Очевидно, в правой части стоит стандартное число, а потому в левой — как минимум конечное. Домножив обе части на dx, получим

$$f(r+dx) - f(r) \;\approx\; f'(r) \cdot dx \;\in\; \mathbb{I}.$$

Стало быть, $f(r+dx) \approx f(r)$. $\square$

Напомним, что в теории множеств для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ под *композицией R и Q* понимают

$$R \circ Q \;:=\; \{(x,z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)\,(xRy \wedge yQz)\}.$$

В частности, если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то $f \circ g : X \to Z$, причём

$$(f \circ g)(x) \;=\; g(f(x))$$

для всякого $x \in X$. Стоит отметить, что в анализе композицию функций обычно задают в обратном порядке.

Утверждение 6.13. *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$. Предположим, что $f'(r)$ и $g'(f(r))$ существуют. Тогда $(f \circ g)'(r)$ существует и равняется $g'(f(r)) \cdot f'(r)$.*

Доказательство. В силу T, можно считать f, g и r стандартными.

Рассмотрим теперь произвольную ненулевую инфинитезималь dx. Положим

$$\begin{aligned} df &:= f(r+dx) - f(r) \\ d(f \circ g) &:= (f \circ g)(r+dx) - (f \circ g)(r) \\ &= g(f(r+dx)) - g(f(r)) \\ &= g(f(r) + df) - g(f(r)). \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, f непрерывна в r; поэтому df — инфинитезималь. Нам нужно показать, что

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} \approx g'(f(r)) \cdot f'(r).$$

Возможны два случая.

- Пусть $df = 0$. Тогда $d(f \circ g) = 0$; кроме того, $f'(r) \approx df/dx = 0$, а значит, $f'(r) = 0$. В итоге

  $$\frac{d(f \circ g)}{dx} = 0 = g'(f(r)) \cdot f'(r).$$

- Пусть $df \neq 0$. Тогда

  $$\frac{d(f \circ g)}{df} = \frac{g(f(r) + df) - g(f(r))}{df} \approx g'(f(r)).$$

  Стало быть,

  $$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{d(f \circ g)}{df} \cdot \frac{df}{dx} \approx g'(f(r)) \cdot f'(r).$$

$\square$

Выше было приведено лишь несколько простейших примеров применения метода бесконечно малых. На самом деле, применения этого метода выходят далеко за пределы *элементарного анализа*. В частности, он успешно использовался в функциональном анализе и теории меры. Многие результаты классического математического анализа изначально были получены с помощью бесконечно малых, хотя, разумеется, сам метод в те времена был куда менее обоснован.

Приложение: сигнатуры и формулы

Для простоты мы ограничимся рассмотрением «предикатных сигнатур». Тогда под *сигнатурой* понимают пару вида

$$\sigma \;=\; \langle \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где Pred_σ — непустое множество, arity_σ — функция из Pred в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Элементы Pred называют *предикатными символами* σ. Для каждого $P \in \mathrm{Pred}$ число $\mathrm{arity}\,(P)$ называют *местностью* P, или *его арностью*. Если $\mathrm{Pred} = \{P_0, \ldots, P_n\}$, то σ удобно представить как

$$\langle P_0^{k_0}, \ldots, P_n^{k_n} \rangle,$$

где k_0, …, k_n суть местности P_0, …, P_n соответственно. Например, в сигнатуре обычной теории множеств имеется два двухместных предикатных символа, а именно $\in$ и $=$; поэтому её можно представить как $\langle \in^2, =^2 \rangle$. Сигнатура теории внутренних множество — $\langle \in^2, =^2, \mathtt{St}^1 \rangle$.

Зафиксируем какое-нибудь счётное множество Var. Элементы Var будут называться *переменными*. Язык логики предикатов над данной сигнатурой σ состоит из элементов $\mathrm{Var} \cup \mathrm{Pred}_\sigma$, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- $\forall$ и $\exists$ (символы кванторов);
- (,) и , (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \mathrm{Var}$ выражения $\forall x$ и $\exists x$ называют *кванторами по* x.

Обозначим через At_σ множество всех выражений вида

$$P\,(x_1, \ldots, x_n),$$

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ и $\{x_1, \ldots x_n\} \subseteq \mathrm{Var}$. Элементы At_σ называют *атомарными* σ*-формулами*. В теории множеств вместо $\in (x, y)$ и $= (x, y)$ пишут $x \in y$ и $x = y$, разумеется.

Далее, обозначим через Form_σ наименьшее множество выражений, включающее At_σ и замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ и $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, то $(\Phi \circ \Psi) \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, то $\neg\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то $\{\forall x\, \Phi, \exists x\, \Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$.

Элементы Form_σ называются *σ-формулами*. Выражение $\Phi \leftrightarrow \Psi$ — сокращение для $(\Phi \to \Psi) \wedge (\Psi \to \Phi)$. В теории множеств вместо $\neg x \in y$, $\neg x = y$ и $\neg x \subseteq y$ обычно пишут $x \notin y$, $x \neq y$ и $x \nsubseteq y$, а также используют следующие сокращения:

$$\begin{aligned}
(\forall x \in X)\, \Phi &:= \forall u\, (u \in X \to \Phi);\\
(\exists u \in X)\, \Phi &:= \exists u\, (u \in X \wedge \Phi);\\
(\forall U \subseteq X)\, \Phi &:= \forall U\, (U \subseteq X \to \Phi);\\
(\exists U \subseteq X)\, \Phi &:= \exists U\, (U \subseteq X \wedge \Phi).
\end{aligned}$$

В теории внутренних множеств к ним добавляются сокращения вроде $\big(\forall^{\mathtt{St}} x \in X\big)\, \Phi$ и $\big(\exists^{\mathtt{St}} x \in X\big)\, \Phi$.[12]

Запись $\Phi\,(x_1, \ldots, x_n)$ означает, что для любой $x \in \mathrm{Var}$, если некоторые вхождения x в Φ являются «свободными» (т.е. не находятся в области действия кванторов по x), то x лежит в $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Под *σ-предложениями* понимают σ-формулы, не содержащие свободных вхождений переменных.

[12] В качестве упражнения читателю предлагается самостоятельно расшифровать эти и другие сокращения, участвующие в записи аксиом IST.

Список литературы

[1] Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе. *Инфинитезимальный анализ: Избранные темы.* Москва: Наука, 2011.

[2] H. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* Academic Press, 2001.

[3] S. Feferman. *The Number Systems: Foundations of Algebra and Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, 1964. На русском: *Числовые системы: Основания алгебры и анализа.* Пер. с. англ. А. И. Мальцева. Москва: Наука, 1971.

[4] T. Jech. *Set Theory.* 3rd edition. Springer, 2002.

[5] K. Hrbacek, T. Jech. *Introduction to Set Theory.* 3rd edition. Marcel Dekker, Inc., 1999.

[6] E. Nelson. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 3, № 3. P. 1165–1198.

[7] E. Nelson. *Radically Elementary Probability Theory.* Princeton University Press, 1987. На русском: *Радикально элементарная теория вероятностей.* Пер. с англ. А. А. Рубана и С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1995.

[8] A. Robinson. *Non-Standard Analysis.* Revised Edition. Princeton University Press, 1996.