

# Действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-24 июля 2024 года

## Задачи к занятию 1

**Задача 1.** Приведите пример группы  $G$  и двух таких ее подгрупп  $H_2 \subseteq H_1 \subseteq G$ , что подгруппа  $H_2$  нормальна в  $H_1$ , подгруппа  $H_1$  нормальна в  $G$ , но подгруппа  $H_2$  не нормальна в  $G$ .

**Задача 2.** Приведите пример такой конечной группы  $G$  и такого делителя  $d$  числа  $|G|$ , что в группе  $G$  нет подгруппы из  $d$  элементов.

**Задача 3.** Пусть  $G$  – группа, все элементы которой имеют порядок не больше двух. Докажите, что  $G$  коммутативна. Более того,  $G$  изоморфна группе  $(V, +)$ , где  $V$  – некоторое векторное пространство над полем  $\mathbb{Z}_2$ .

**Задача 4.** Приведите пример двух элементов порядка два в некоторой группе  $G$ , произведения которых имеет бесконечный порядок.

**Задача 5.** Найдите центры групп  $S_n$ ,  $A_n$ ,  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  и  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ .

**Задача 6.** Верно ли, что центр факторгруппы  $G/Z(G)$  всегда тривиален?

**Задача 7.** Докажите, что для любого действия группы  $G$  на множестве  $X$  и для любой нормальной подгруппы  $N$  в группе  $G$  действие любого элемента группы  $G$  на  $X$  переставляет  $N$ -орбиты на  $X$ .

**Задача 8.** Найдите нормализаторы подгруппы диагональных матриц  $T_n$  и подгруппы верхнетреугольных матриц  $B_n$  в группе  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Задача 9.** Для действия группы  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  на себе сопряжениями найдите стабилизатор матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Задача 10.** Классифицируйте с точностью до изоморфизма все действия группы порядка 5 на множестве из 9 элементов.

**Задача 11.** Приведите пример транзитивного действия группы  $S_4$  на множестве из 3 элементов. Может ли при  $n > 4$  группа  $S_n$  транзитивно действовать на множестве из  $k$  элементов при  $2 < k < n$ ?

**Задача 12.** Докажите, что для абелевой группы транзитивное и эффективное действие является свободным.

**Задача 13.** Приведите несколько примеров транзитивных, эффективных, но не свободных действий группы подстановок  $S_n$ .

**Задача 14.** Постройте явно биекцию  $G \rightarrow G$ , определяющую изоморфизм действий группы  $G$  на себе левыми и правыми сдвигами.