Действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика”, Дубна, 20-24 июля 2024 года

Задачи к занятию 2

Задача 1. Придумайте действие, орбитами которого являются смежные классы группы G по подгруппе H.

Задача 2. Пусть H — подгруппа в группе G и H действует на некотором множестве X. Всегда ли можно найти такое действие группы G на множестве X, что элементы подгруппы H действуют на X так же, как и при исходном действии?

Задача 3. Приведите пример ненормальной подгруппы H в группе G, которая содержит такую нееденичную подгруппу N, что N нормальна в G.

Задача 4. Приведите пример подгруппы H в группе G и элемента $g \in G$, для которых подгруппа gHg^{-1} является собственным подмножеством в H.

Задача 5. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств X с транзитивным действием группы G, для которых стабилизатор $\mathrm{St}(x)$ точки $x \in X$ действует на множестве $X \setminus \{x\}$ транзитивно. Покажите, что если это свойство выполнено для одной точки $x \in X$, то оно выполнено и для любой другой точки из X.

Задача 6. Пусть G – конечная коммутативная группа. Докажите, что G допускает транзитивное действие на множестве X из m элементов тогда и только тогда, когда число m делит $|G|$. Верно ли это утверждение для некоммутативных конечных групп G?

Задача 7. Приведите пример конечной группы G, которая допускает ровно три неизоморфных транзитивных действия на некотором множестве X.

Задача 8. Докажите, что центр группы — это объединение её одноэлементных классов сопряжённости.

Задача 9. Опишите все конечные группы, в которых один, два или три класса сопряженных элементов.

Задача 10. Для любого простого числа p и любого натурального $n > 2$ приведите пример некоммутативной группы из p^n элементов.

Задача 11. Пусть $|G| = p^n$ и $k < n$. Докажите, что если H — подгруппа в группе G и $|H| = p^k$, то $N_G(H) \neq H$ и подгруппа H лежит в подгруппе порядка p^{k+1}.