Действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-24 июля 2024 года

Задачи к занятию 3

Задача 1. Докажите, что в группе A_n при $n \geq 5$ нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Задача 2. Предположим, что конечная группа G порождается элементами порядка 2. Следует ли из этого, что существует сюрьективный гомоморфизм из G в группу из двух элементов?

Задача 3. Пусть N — максимальная по включению собственная нормальная подгруппа группы G. Докажите, что факторгруппа G/N проста.

Задача 4. Докажите, что свободное действие группы не может быть 2-транзитивным.

Задача 5. Приведите пример транзитивного действия группы $(\mathbb{Z}, +)$ на множестве натуральных чисел. Может ли такое действие быть 2-транзитивным?

Задача 6. Пусть G – группа и H – подгруппа в G. Известно, что действие G на множестве левых смежных классов G/H левыми сдвигами 2-транзитивно. Докажите, что подгруппа H совпадает со своим нормализатором в G.

Задача 7. Пусть $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ и H – подгруппа верхнетреугольных матриц в G. Докажите, что H совпадает со своим нормализатором в G, но действие G на G/H не является 2-транзитивным.

Задача 8. Пусть V – это n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ и $n \geq 2$. Пусть $G = \mathrm{Aff}(V)$ – группа аффинных преобразований и $N \subseteq G$ – (нормальная) подгруппа параллельных переносов. Докажите, что G действует на V 3-транзитивно, но не 4-транзитивно, а N действует на V транзитивно, но не 2-транзитивно. Это показывает, что при переходе к нормальной подгруппе степень транзитивности может падать больше чем на 1.

Задача 9. Пусть группа G эффективно и 2-транзитивно действует на бесконечном множестве X. Докажите, что в G нет нетривиальных нормальных конечных подгрупп.

Задача 10. Приведите пример группы, все элементы которой имеют конечный порядок и которая действует на множестве натуральных чисел бесконечно транзитивно.