

Действия групп

курс И.В.Аржанцева

летняя школа "Современная математика", Дубна, 20-24 июля 2024 года

Задачи к занятию 4

Задача 1. Докажите, что группа $SL_2(\mathbb{R})$ не может эффективно и 2-транзитивно действовать на каком-либо множестве. При этом факторгруппа $PSL_2(\mathbb{R})$ этой группы допускает 2- и даже 3-транзитивное действие.

Задача 2. Пусть K – некоторое поле. Докажите, что при $n \geq 2$ группа $PGL_{n+1}(K)$ действует на проективном пространстве $\mathbb{P}^n(K)$ 2-транзитивно, но не 3-транзитивно.

Задача 3. Пусть K – некоторое поле и $G = (K, +)$ – аддитивная группа поля K . Постройте два таких действия группы G на проективной прямой $\mathbb{P}^1(K)$, что группа, порожденная всеми преобразованиями, соответствующими этим действиям, действует на $\mathbb{P}^1(K)$ 3-транзитивно.

Задача 4. Покажите, что группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ аффинной прямой \mathbb{A}^1 состоит из автоморфизмов вида $x \rightarrow ax + b$, $a \neq 0$. Докажите, что группа $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ действует на \mathbb{A}^1 2-транзитивно, но не 3-транзитивно.

Задача 5. Пусть K – бесконечное поле. Докажите, что при $n \geq 2$ группа полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ действует на аффинном пространстве \mathbb{A}^n бесконечно транзитивно.

Задача 6. Приведите примеры нетривиальных нормальных подгрупп в группах полиномиальных автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{A}^1)$ и $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ при $n \geq 2$.

Задача 7. Пусть K – некоторое поле. Приведите несколько примеров пар H_1, H_2 различных подгрупп группы $GL_n(K)$, которые при естественном действии на K^n имеют одни и те же орбиты.

Задача 8. Найдите все подгруппы группы $GL_4(\mathbb{C})$, которые содержат подгруппу диагональных матриц. Сколько орбит у действия каждой из этих подгрупп на \mathbb{C}^4 ?

Задача 9. Найдите все подгруппы группы $GL_n(\mathbb{C})$, которые содержат подгруппу верхнетреугольных матриц. Сколько орбит у действия каждой из этих подгрупп на \mathbb{C}^n ?

Задача 10. Пусть K – некоторое поле. Докажите, что группа $GL_n(K)$ действует на множестве X полных флагов подпространств в пространстве K^n транзитивно. Сколько орбит у действия подгруппы верхнетреугольных матриц на этом же множестве X ?