Арифметика и геометрия дробей Фарея.

Расширенная версия
одноименного мини-курса,
прочитанного в Летней школе
"Современная математика"
в июле 2024 года

Глава I. Первое знакомство с дробями Фарея

§ 1. Ряды Фарея и их простейшие свойства

Начнём, как водится, с определений.

Определение 1. Пусть $Q \geq 1$ – фиксированное число (не обязательно целое). Рядом Фарея $\Phi(Q)$ порядка Q назовём множество упорядоченных по возрастанию несократимых дробей a/q с условиями $0 \leq a \leq q \leq Q$.

Например,

$$\Phi(1) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} = \{0, 1\}, \quad \Phi(2) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\},$$

$$\Phi(3) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\} \quad \text{и т. д.}$$

Очевидно, что $\Phi(Q) = \Phi([Q])$ для любого $Q \geq 1$.*

* здесь и далее через $[x]$ обозначается целая часть x, т.е. наибольшее целое, не превосходящее x:
$[3,14] = 3, \quad [0,21] = 0, \quad [-5,3] = -6$ и т.д.

Это определение безупречно с формальной точки зрения, но мало пригодно с точки зрения практики: попробуйте-ка с его помощью построить ряд Фарея десятого порядка! К счастью, ряды Фарея можно строить с помощью итеративной процедуры.

Определение 2. Обозначим через $\Phi^*(1)$ следующее множество из двух дробей, упорядоченных по возрастанию: $\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$. Пусть, далее, $Q \geq 2$ – целое число. Если множество $\Phi^*(Q-1)$ уже построено, то $\Phi^*(Q)$ образуем из него с помощью следующей процедуры. Если $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ – соседние дроби в $\Phi^*(Q-1)$, то добавим их в $\Phi^*(Q)$ (с соблюдением порядка) и составим из них медианту – дробь $\frac{a+c}{b+d}$. Если $b+d \leq Q$, то включаем медианту в $\Phi^*(Q)$. В противном случае дроби $\frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b}$ остаются соседними и в множестве $\Phi^*(Q)$. Процесс добавления медиант продолжается до тех пор, пока это возможно.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Ряды $\Phi(Q)$ и $\Phi^*(Q)$ совпадают при любом Q.

Чтобы доказать теорему 1, установим одно утверждение, которым мы не раз будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть $Q \geq 1$ — произвольное число, и пусть $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ — соседние дроби ряда $\Phi^*(Q)$. Тогда справедливо равенство $ad - bc = 1$. (1)

Док-во. Для ряда $\Phi^*(1)$ это утверждение, очевидно, справедливо. Докажем, что оно остаётся верным при добавлении медианты между соседними дробями. Действительно, для тройки

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$$

имеем:

$$(a+c)d - (b+d)c = ad + cd - bc - cd = ad - bc = 1,$$

$$a(b+d) - b(a+c) = ab + ad - ab - bc = ad - bc = 1. \qquad \square$$

Замечание. По ряду причин, объяснить которые мы здесь не берёмся, равенство (1) часто именуется модулярным соотношением. Мы также будем пользоваться этим названием.

Докажем теперь теорему 1. Отметим сперва очевидный факт: все дроби ряда $\Phi^*(Q)$ несократимы (это следует из модулярного соотношения).

Предположим, что некоторая дробь u/v ряда $\Phi(Q)$ не вошла в $\Phi^*(Q)$ в ходе описанной выше процедуры. Тогда, обозначая через c/d и a/b ближайшие к ней слева и справа дроби ряда $\Phi^*(Q)$, будем иметь:

$$\frac{c}{d} < \frac{u}{v} < \frac{a}{b}. \qquad (2)$$

Очевидно, c/d и a/b — соседи в $\Phi^*(Q)$: в противном случае их медианта была бы ближе к u/v, чем одна из этих дробей. Значит, $b+d > Q$. Неравенства (2) — строгие, так что $av - bu \geq 1$, $du - cv \geq 1$. Замечая, наконец, что $v \leq Q$, будем иметь:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\left(\frac{a}{b}-\frac{u}{v}\right)+\left(\frac{u}{v}-\frac{c}{d}\right)=\frac{av-bu}{bv}+\frac{du-cv}{dv}\geq\frac{1}{bv}+\frac{1}{dv}=$$

$$=\frac{b+d}{bdv}>\frac{Q}{bdv}\geq\frac{1}{bd}. \qquad (3)$$

В то же время, в силу леммы 1,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}=\frac{1}{bd}. \qquad (4)$$

Противоречие между (3) и (4) доказывает Теорему 1.

Упражнение 1.1 Построить ряды Фарея порядка Q для $4\leq Q\leq 9$.

Обозначим через $N(Q)$ количество дробей в ряде Фарея порядка Q. Если q – целое число, $1\leq q\leq Q$, то количество (положительных) дробей в $\Phi(Q)$, имеющих q своим знаменателем, равно количеству положительных чисел a, не превосходящих q и взаимно простых с q. Эту величину принято обозначать $\varphi(q)$. Арифметическая функция φ называется функцией Эйлера.

Таким образом,

$$N(Q)=\sum_{1\leq q\leq Q}\varphi(q)+1,$$

где единичка отвечает вкладу дроби $0/1$.

Вот как выглядит табличка значений величины $N(Q)$ при небольших Q:

Q	N(Q)	Q	N(Q)
1	2	20	129
2	3	30	279
3	5	40	491
4	7	50	775
5	11	60	1103
6	13	70	1495
7	19	80	1967
8	23	90	2481
9	29	99	3005
10	33	100	3045

Как видно, длина ряда Фарея растёт с увеличением Q достаточно быстро. Если расположить ряды $\Phi(Q)$, $Q=1,2,3,4,\dots$ один под другим, то их концы довольно точно лягут на некоторую параболу. Строгая же формулировка этого утверждения такова.

<u>Теорема 2</u> При неограниченном возрастании Q справедлива следующая асимптотическая формула:

$$N(Q) = \frac{3}{\pi^2} Q^2 + R(Q), \quad \text{где } |R(Q)| \leq Q \ln Q.$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

<u>Лемма 2</u>. Функция Эйлера мультипликативна.

<u>Упражнение 1.2</u>. Докажите лемму 2.

<u>Следствие</u>. При любом $n>1$ справедлива формула*:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad (5)$$

<u>Док-во</u>. Пусть $n = p^\alpha$, где p — простое, $\alpha \geq 1$. Числа m, не превосходящие n и не взаимно простые с ним, имеют вид $m = pk$, так что их количество равно $p^{\alpha-1}$. Следовательно, $\varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Теперь искомая формула получается из леммы 2.

<u>Определение 3</u>. Функцию Мёбиуса $\mu(n)$ положим равной единице, если $n=1$, нулю, если n делится на квадрат простого числа, и равной $(-1)^k$, если n есть произведение k различных простых сомножителей.

Несложно проверить, что функция Мёбиуса мультипликативна (проделайте это). С её помощью формула (5) после раскрытия скобок примет следующий вид:

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \qquad (6)$$

<u>Лемма 3</u> Справедливо тождество:

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

* Здесь и далее запись $\prod_{p|n}$ означает произведение по всем различным простым делителям числа n. Запись же $\sum_{d|n}$ означает суммирование по всем положительным делителям n, включая $d=1$ и $d=n$.

Набросок доказательства. Воспользуемся следующей замечательной формулой, установленной Леонардом Эйлером (1707 – 1783):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \prod_p \left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\dots\right) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1},$$

где произведение берётся по всем подряд идущим простым числам.*

* по сути, это равенство – иллюстрация к основной теореме арифметики: при раскрытии скобок в правой части мы получим все дроби $1/n^2$, $n=1,2,3,\dots$, причём каждую – ровно один раз.

Но тогда

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2},$$

что и требовалось.

Доказательство теоремы 2. Применив формулу (6), получим:

$$N(Q) = 1 + \sum_{n\le Q} n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = 1 + \sum_{d\le Q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{n\le Q \\ n\equiv 0 (\mathrm{mod}\ d)}} n.$$

Сумма по n легко вычисляется: она равна

$$d \sum_{1\le m\le \frac{Q}{d}} m = \frac{d}{2}\left[\frac{Q}{d}\right]\left(\left[\frac{Q}{d}\right]+1\right) = \frac{d}{2}\left(\frac{Q}{d}-\left\{\frac{Q}{d}\right\}\right)\left(\frac{Q}{d}+1-\left\{\frac{Q}{d}\right\}\right)$$

$$= \frac{Q^2}{2d} + Q\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{Q}{d}\right\}\right) - \frac{d}{2}\left\{\frac{Q}{d}\right\}\left(1-\left\{\frac{Q}{d}\right\}\right),$$

где символом $\{x\}$ обозначена дробная доля x: $\{x\} = x - [x]$. Оценим по модулю вклад в $N(Q)$ от двух последних слагаемых. Он не превосходит величины

$$R_1 = \sum_{d\le Q} \frac{1}{d}\left(\frac{Q}{2}+\frac{d}{8}\right) \le \frac{Q}{2}\sum_{d\le Q}\frac{1}{d} + \frac{Q}{8} \le \frac{Q}{2}(\ln Q+1) + \frac{Q}{8}$$

$$= \frac{Q}{2}\left(\ln Q + \frac{5}{8}\right).$$

Вклад от первого слагаемого имеет вид

$$\sum_{d\le Q}\frac{\mu(d)}{2d^2}\cdot Q^2=\frac{Q^2}{2}\left(\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d>Q}\frac{\mu(d)}{d^2}\right).$$

"хвост", т.е. сумму по $d>Q$, оценим сверху как

$$\sum_{d>Q}\frac{1}{d^2}\le\frac{1}{Q^2}+\int_{Q}^{+\infty}\frac{du}{u^2}=\frac{1}{Q}+\frac{1}{Q^2}.$$

Суммируя полученные оценки и пользуясь тождеством леммы 3, окончательно находим:

$$N(Q)=\frac{Q^2}{2}\cdot\frac{6}{\pi^2}+R,$$

$$|R|\le\frac{Q}{2}\left(\ln Q+\frac{5}{8}\right)+\frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{Q^2}\right)<\frac{Q}{2}(\ln Q+3)\le Q\ln Q$$

(в предположении, что $Q\ge e^3$). Теорема доказана. $\square$.

Упражнение 1.3. Пусть заданы целое число Q (порядок ряда Фарея) и несократимая дробь a/q с условиями $1 \le a \le q \le Q$, $0 < a/q < 1 - 1/Q$. Как найти дробь ряда Фарея $\Phi(Q)$, ближайшую к a/q справа?

Упражнение 1.4. Пусть заданы целое число Q (порядок ряда Фарея) и знаменатели q_1 и q_2 соседних дробей ряда $\Phi(Q)$ (так что $1 \le q_1, q_2 \le Q$, Н.О.Д. $(q_1, q_2) = 1$). Как найти числители этих дробей?

Упражнение 1.5. Известно, что две несократимые дроби $a_1/q_1 < a_2/q_2$ являются соседними в ряде Фарея $\Phi(Q)$. Что можно сказать о величине Q?

§2. Немного истории.

Дроби Фарея — прекрасная иллюстрация к «принципу В.И. Арнольда»: если какое-либо понятие имеет персональное имя, то это — не имя первооткрывателя[1]. В 1816 году английский геолог и публицист Джон Фарей (1766-1826) поместил в 47 томе «Философского журнала» — старейшего научного журнала Великобритании — заметку в полторы страницы. В ней он сообщал редактору журнала, сэру Александеру Тиллоху, о замеченном им свойстве обыкновенных дробей, очень похожем на утверждение леммы 1. Рассмотрим все правильные несократимые дроби, знаменатели которых не превосходят заданного числа Q, расположенные по возрастанию. Тогда любая дробь из такого набора, кроме первой и последней, является медиантой своих соседей. Скажем, для ряда

$$\frac{1}{5},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{4},\quad \frac{4}{5},$$

отвечающего $Q = 5$, справедливы равенства

$$\frac{1}{4} = \frac{1+1}{5+3},\quad \frac{1}{3} = \frac{1+2}{4+5},\quad \frac{2}{5} = \frac{1+1}{3+2},\quad \frac{1}{2} = \frac{2+3}{5+5}\quad \text{и т. д.}$$

Это свойство было проверено им и для некоторых других случаев.

Свою единственную математическую публикацию Фарей завершил словами о том, что он не знает, был ли этот факт отмечен кем-либо ранее и можно ли дать его общее (т.е. годящееся для любого Q) доказательство, а также выразил надежду на получение откликов от читателей.

Вскоре заметка Фарея попалась на глаза Огюстену Луи Коши (1789-1857), который в том же 1816 году дал полное доказательство этого свойства и вдобавок обнаружил, что числители и знаменатели соседних дробей удовлетворяют модулярному соотношению.

Название «ряд Фарея» вошло в научный обиход благодаря английскому математику Джеймсу Джозефу Сильвестру (1814-1897), который в 1883 году опубликовал таблицу, содержащую значения величин $\varphi(Q)$ и $N(Q)$ для натуральных чисел Q, не превосходящих 500.

Между тем, таким свойством обыкновенных дробей лет за пятнадцать до выхода в свет заметки Фарея успешно пользовался французский математик Шарль Аро, сотрудник Парижского Бюро кадастра[2]. Как известно, в конце XVIII столетия Франция пережила целый ряд потрясений, которые повлекли за собой перемены в различных сферах общественной жизни.

Одним из новшеств стал постепенный переход Франции на метрическую систему мер. Как водится, не обошлось без перегибов: поначалу десятичная система измерений распространялась буквально на все. Прямой угол делился на 100 градусов

[1] Владимир Игоревич Арнольд (1937-2010) — советский и российский математик, автор работ в области топологии, теории дифференциальных уравнений, теории особенностей гладких отображений и теоретической механики.

[2] Увы, в доступных мне источниках не удалось обнаружить дат его жизни. Известно лишь, что он скончался не позднее 1809 г.

1.8

вместо прежних девяноста, сутки делились на 10 часов, час - на 100 минут, минута - на 100 секунд. Вскоре, однако, пыл реформаторов несколько поугас: нововведения причиняли массу неудобств, и бóльшая часть из них вскоре была отменена. Тем не менее, новые единицы измерения веса и расстояния было решено оставить. Такой переход сопровождался частичным отказом от использования обыкновенных дробей и заменой их десятичными.

Аро было поручено составление таблиц перевода, содержащих все положительные правильные дроби со знаменателями, меньшими сотни, вместе с их десятичными приближениями. Так вот, чтобы не пропустить ни одной дроби (что было непростой задачей, ибо их число превышало три тысячи - см. таблицу 1), Аро как раз и пользовался построением медиант - возможно, не имея общего обоснования этого правила. Как бы то ни было, в 1802 году результаты кропотливого труда Аро увидели свет в четвёртом томе «Журнала Эколь политехник».

Хотя о таблицах Аро в туманном Альбионе вспоминали нечасто, первенство Фарея на его родине стало оспариваться уже в последней четверти XIX столетия. В своей краткой заметке Фарей упомянул о том, что свое наблюдение он смог сделать благодаря таблицам «Полных десятичных дробей», составленным сэром Генри Годвином (1745-1824), эсквайром Блэкхита, выдающимся вычислителем своего времени. Но штука заключается в том, что в первом издании таблиц Годвина (1816) дроби не были упорядочены по возрастанию! Такое упорядочение появилось только в последующих изданиях, которые увидели свет в 1818 и 1823 годах. Во втором, кстати, были, отчетливо сформулированы свойства дробей, доказанные Коши. Всё это дало повод Джеймсу Глейшеру[3)], знатоку научного наследия Годвина, предположить, что Фарей был знаком с черновиками второго издания таблиц Годвина задолго до их публикации. Однако на вопросы о том, открыл ли Фарей «правило медиант» самостоятельно, или же Годвин поделился с ним частным наблюдением, за которым Фарей увидел общую закономерность, дать ответ Глейшер затруднялся.

Имя Генри Годвина сейчас основательно забыто, но страсти вокруг этой истории не утихали вплоть до середины XX столетия. Так, рецензент книги «Ряд Фарея порядка 1025», изданной в Кэмбридже в 1950 году под редакцией Нэвилла[4)] при участии четырёх десятков помощников, публично посетовал на то, что выделенный вычислителям грант был бы использован с гораздо большей пользой, если бы свой труд они озаглавили «Ряд Аро порядка 1025» или «Ряд Годвина порядка 1025».

Впрочем, не будет отнимать хлеб у историков науки. Читателей, которых заинтересовала полная драматизма история открытия дробей Фарея, мы отсылаем к замечательной книге Скотта Гаттери «Математический мотив: История и приложения медиант и рядов Фарея»[5)]. Отметим напоследок лишь следующий факт:

[3)]Джеймс Уайтбрэд Ли Глейшер (1848-1928) - английский математик и астроном.

[4)]Эрик Гарольд Нэвилл (1889-1961) - английский математик, специалист по теории эллиптических функций. Кстати, именно к нему, читавшему в 1913 году лекции в Мадрасе (Индия) обратился Харди с просьбой повлиять на Рамануджана и уговорить его приехать в Кэмбридж. Современная реконструкция таблиц Нэвилла доступна по ссылке: `https://locomat.loria.fr/neville1950/neville1950doc.pdf`

[5)]S.B. Guthery, *A Motif of Mathematics: History and Application of the Mediant and the Farey Sequence.* Docent Press, Boston, Massachusets, USA, 2011.

1.9

оказывается, правило построения медианты двух дробей было известно по крайней мере уже в конце XV столетия! Оно встречается под названием «правила средних чисел» в рукописи «Наука о числах в трёх частях» французского учёного Николя Шюке. Она увидела свет (правда, под чужим именем) в 1520 году, спустя несколько десятилетий после смерти автора.

1.10

Ответы и решения к Упражнениям главы I.

Упражнение 1.1

$$\Phi(4) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi(5) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi(6) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi(7) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi(8) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\right\};$$

$$\Phi(9) = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{7}{9}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1}{1}\right\}.$$

Упражнение 1.2

Пусть $m, n > 1$ и Н.О.Д.$(m,n) = 1$. Рассмотрим остатки от деления на mn чисел вида $nx + my$, где x и y независимо друг от друга пробегают приведенные системы вычетов по модулям m и n соответственно. Все они различные: если

$$nx_1 + my_1 \equiv nx_2 + my_2 \pmod{mn},$$

то необходимо $nx_1 \equiv nx_2 \pmod{m}$, $my_1 \equiv my_2 \pmod{n}$ и, следовательно, $x_1 \equiv x_2 \pmod{m}$, $y_1 \equiv y_2 \pmod{n}$. Поэтому общее число таких остатков равно $\varphi(m)\varphi(n)$. С другой стороны, всякое число k, взаимно простое с mn, представимо в виде $nx+my$. Действительно, из условия Н.О.Д.$(m,n) = 1$ следует существование целых чисел u, v таких, что

$$nu + mv = 1.$$

Домножая обе части на k и полагая $x = ku$, $y = kv$ и убеждаясь, что Н.О.Д.$(x,m) =$ Н.О.Д.$(y,n) = 1$, легко получаем требуемое. Поскольку все такие числа k принимают ровно $\varphi(mn)$ значений по модулю mn, получаем:

$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. $\square$

Упражнение 1.3. Пусть $\frac{a_1}{q_1}$ — искомая дробь. Тогда

(1) $a_1 q - a q_1 = 1$, откуда $a q_1 \equiv -1 \pmod{q}$ и $q_1 \equiv -a^* \pmod{q}$ (символом a^* обозначается вычет, обратный к a по модулю q: $a a^* \equiv 1 \pmod{q}$). Из неравенств $q_1 \leq Q$ и $q + q_1 > Q$ заключаем: $Q - q < q_1 \leq Q$. (2)

Условия же (1) и (2) однозначно определяют q_1. Числитель a_1 находится затем из равенства (1).

Упражнение 1.4. Пусть $\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}$ — искомые дроби. Но тогда $a_2 \equiv -q_1^* \pmod{q_2}$ и $1 \leq a_2 \leq q_2$. Этими соотношениями a_2 определяется однозначно. Числитель a_1 находится затем из равенства $a_2 q_1 - a_1 q_2 = 1$.

Упражнение 1.5. Так как $q_1, q_2 \leq Q$, то необходимо $Q \geq \max(q_1, q_2)$. Поскольку дроби $\frac{a_1}{q_1}$ и $\frac{a_2}{q_2}$ — соседние в $\Phi(Q)$, для них выполнено неравенство: $q_1 + q_2 > Q$. Следовательно,

$$\max(q_1, q_2) \leq Q \leq q_1 + q_2 - 1. \qquad (3)$$

Примеры с $Q = 2m$, $\frac{a_1}{q_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{a_2}{q_2} = \frac{m}{2m-1}$ и с $Q = 2m+1$, $\frac{a_1}{q_1} = \frac{1}{2}$, $\frac{a_2}{q_2} = \frac{m+1}{2m+1}$ показывают, что обе границы в (3) достижимы.