Глава II. Дроби Фарея и гипотеза Римана

§1. Дзета-функция Римана.

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексное число, причём $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Определим дзета-функцию Римана $\zeta(s)$ равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

Это определение корректно: для таких s ряд сходится абсолютно. Более этого, при любом $\delta > 0$ ряд (1) будет сходиться в полуплоскости $\sigma > 1+\delta$ и равномерно. Следовательно, так определенная функция $\zeta(s)$ аналитична во всей полуплоскости $\sigma > 1$.

В этой полуплоскости $\zeta(s)$ удовлетворяет замечательному тождеству, открытому Эйлером:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \qquad (2)$$

Частный случай этого тождества уже встречался нам выше, при выводе формулы для величины $N(Q)$.

Равенство (2) указывает на тесную связь дзета-функции Римана с чисто арифметическими объектами — простыми числами. Раскрытие такой связи — плод трудов многих математиков прошлого, настоящего и будущего

Методы теории функций комплексного переменного позволяют построить продолжение дзета-функции на всю комплексную плоскость — правда, за исключением точки $s = 1$. Иными словами, можно подобрать функцию $f(s)$, которая а) будет аналитична всюду в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ и б) будет совпадать с $\zeta(s)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

Оказывается, что у так продолженной дзета-функции имеется два бесконечных семейства нулей. Во-первых, это так называемые вещественные (или тривиальные) нули в точках $s = -2n$,

$n = 1, 2, 3, \ldots$. О них всё известно и проблем для теоретико-числовиков они не создают.

Во-вторых, это комплексные (или нетривиальные) нули вида $s = \beta + i\gamma$. Теперь мы знаем о них гораздо больше, чем, скажем, столетие назад, но мы не имеем ответа на самый главный вопрос, связанный с ними.

Известно, что все нетривиальные нули "живут" в узкой вертикальной полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Нужно заметить следующее: не так сложно доказать, что эти нули лежат в полосе $0 \le \operatorname{Re} s \le 1$. Но вот заменить неравенства строгими — задача не из лёгких. Дело в том, что отсутствие у $\zeta(s)$ нулей на вертикальных прямых $\operatorname{Re} s = 0, 1$ равносильно асимптотическому закону распределения простых чисел (или, короче, а.з.р.п.ч.) в его простейшей форме:

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1 = (1 + \bar{o}(1)) \frac{x}{\ln x}.$$

Кроме того, нули расположены симметрично относительно вещественной оси $\operatorname{Im} s = 0$ и прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Иначе говоря, если $s = \beta + i\gamma$ — нуль $\zeta(s)$, то нулями будут и числа $\bar{s} = \beta - i\gamma$, $1 - s = 1 - \beta - i\gamma$ и $1 - \bar{s} = 1 - \beta + i\gamma$.

Немецкий математик Георг Фридрих Бернхард Риман (1826 - 1866) был первым из людей, кто увидел глубинную связь нетривиальных нулей с распределением простых чисел. Он предположил, что все нули $\beta + i\gamma$ в действительности лежат на одной прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Это предположение, известное с тех пор как гипотеза Римана, в настоящее время не доказано. Обширные вычисления, охватившие уже десять триллионов нулей $\zeta(s)$ (Х. Гордон, П. Демишель, 2004), подтверждают эту гипотезу.

Доказательство гипотезы Римана повлекло бы за собой существенные продвижения во многих задачах теории чисел. В их числе — асимптотический закон распределения простых чисел в форме

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + R(x), \qquad (3)$$

$$|R(x)| \le c\sqrt{x}\ln x.$$

Первое слагаемое в (3) имеет порядок $\frac{x}{\ln x}$, так что асимптотика (3) весьма точна; остаток в ней (если не обращать внимания на логарифмы) имеет порядок корня квадратного из главного члена. Для сравнения: лучшее, что известно сейчас — это оценка вида

$$|R(x)| \le c_1 x \exp\left(-c_0 \frac{(\ln x)^{3/5}}{(\ln\ln x)^{1/5}}\right),$$

где $c_0, c_1 > 0$ — некоторые абсолютные постоянные.

Завершая краткий экскурс в теорию $\zeta(s)$, отметим, что сейчас имеется множество эквивалентов этого утверждения. С некоторыми из них мы познакомимся в следующем разделе.

§ 2. Дроби Фарея и "равномерная сетка".

Пусть Q – достаточно большое положительное число, и пусть $N = N(Q)$ – количество дробей ряда $\Phi(Q)$. Элементы этого ряда, упорядоченные по возрастанию, условимся обозначать через $r_n = \frac{a_n}{q_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, так что, например,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{[Q]}, \quad r_3 = \frac{1}{[Q]-1}, \ldots, r_{N-1} = 1 - \frac{1}{[Q]}, \quad r_N = 1.$$

Далее, обозначим символом δ_n "отклонение" дроби r_n от "равномерной сетки" с шагом $\frac{1}{N}$, т.е. положим

$$\delta_n = r_n - \frac{n}{N}, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Например, в случае $Q = 5$ получим значения

$$\delta_1 = -\frac{1}{5} = -0.2$$

$$\delta_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{11} = \frac{6}{55} = 0.10909\ldots$$

$$\delta_3 = \frac{1}{4} - \frac{2}{11} = \frac{3}{44} = 0.06818\ldots$$

$$\delta_4 = \frac{1}{3} - \frac{3}{11} = \frac{2}{33} = 0.06060\ldots$$

$$\delta_5 = \frac{2}{5} - \frac{4}{11} = \frac{2}{55} = 0.03636\ldots$$

$$\delta_6 = \frac{1}{2} - \frac{5}{11} = \frac{1}{22} = 0.04545\ldots$$

$$\delta_7 = \frac{3}{5} - \frac{7}{11} = -\frac{2}{55} = -0.03636\ldots$$

$$\delta_8 = \frac{2}{3} - \frac{8}{11} = -\frac{2}{33} = -0.0606\ldots$$

$$\delta_9 = \frac{3}{4} - \frac{9}{11} = -\frac{3}{44} = -0.06818\ldots$$

$$\delta_{10} = \frac{4}{5} - \frac{10}{11} = -\frac{6}{55} = -0.10909\ldots$$

$$\delta_{11} = 1 - \frac{11}{11} = 0$$

Мистическим образом разного рода средние значения величин $|\delta_n|$ оказываются связанными с нулями дзета-функции Римана. Цель настоящей главы – доказать следующие утверждения

<u>Теорема 3</u> (Франэль*, 1924) Гипотеза Римана справедлива в том, и только том случае, когда для любого сколь угодно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого Q выполняется неравенство:

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 \ll Q^{-1+\varepsilon} \quad (N = N(Q)). \qquad (4)$$

* [см. след. лист]

Теорема 4 (Ландау*, 1924). Гипотеза Римана справедлива в том и только том случае, когда для любого сколь угодно малого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого Q выполняется неравенство:

$$\sum_{n=1}^{N} |\delta_n| \ll Q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (N = N(Q)) . \qquad (5)$$

---

* Жером Франель (1859-1939) – швейцарский математик, специалист по аналитической теории чисел. Эдмунд Георг Герман Ландау (1877–1938) – немецкий математик, специалист по теории чисел и комплексному анализу. Интересно отметить, что их работы, содержащие доказательства теорем 3 и 4, были опубликованы в одном номере "Сообщений Гёттингенского научного общества".

Несложно заметить, что оценка (5) сразу следует из оценки (4) и теоремы 1. Действительно, применив неравенство Коши, будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{N} |\delta_n| \le \sqrt{N \sum_{n=1}^{N} \delta_n^2} \ll \sqrt{Q^2 \cdot Q^{-1+\varepsilon}} \ll Q^{1/2+\varepsilon/2} .$$

Таким образом, достаточно: а) вывести гипотезу Римана из оценки (5) и b) вывести оценку (4) из гипотезы Римана.

Как уже говорилось, за долгие годы гипотеза Римана обрела большое количество разнообразных эквивалентов. Поэтому нам можно выбрать какой-то из них, и доказывать его равносильность с (4) и (5). Для наших целей наиболее подходит следующий.

Рассмотрим величину $M(Q)$, определенную равенством

$$M(Q) = \sum_{q \le Q} \mu(q) . \qquad (6)$$

(иногда о M говорят как о сумматорной функции последовательности $\mu(q)$, $q = 1, 2, 3, \ldots$ Интуитивно ясно, что ненулевые слагаемые в сумме (6) должны взаимно погашать друг друга*, так что абсолютные значения

$M(Q)$ должно быть небольшим.

---

* Говоря о взаимном погашении слагаемых в той или иной теоретико-числовой сумме, иногда используют такие термины, как "интерференция" или "осцилляция".

Это действительно так, но вот увидеть такое погашение не так-то просто. Например, доказать оценку $M(Q) = \bar{o}(Q)$ при $Q \to +\infty$ – то же самое, что доказать асимптотический закон распределения простых чисел в простейшей форме

$$\pi(x) = (1+\bar{o}(1))\frac{x}{\ln x}, \quad x \to +\infty.$$

Неудивительно потому, что оценка

$$M(Q) \ll Q^{1/2+\varepsilon} \qquad (7)$$

(где $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное число) равносильна гипотезе Римана. Именно этим эквивалентом мы и воспользуемся.

Отметим попутно, что вывести гипотезу Римана из (7) несложно, в то время как обратное утверждение требует определенных усилий. Заинтересованные читатели могут обратиться к классической монографии английского математика Эдварда Чарльза Титчмарша (1899-1963) "Теория дзета-функции Римана". Глава XIV этой монографии так и называется – "Следствия из гипотезы Римана".

§ 3. Дроби Фарея и функция Мёбиуса

Чтобы вывести оценку (7) из неравенства (5), нам потребуются две вспомогательные леммы, представляющие и самостоятельный интерес.

Лемма 4 (основное свойство функции Мёбиуса)
Пусть $n \geq 1$ — целое число. Тогда

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Док-во. Пусть $s = \sigma + it$ — комплексное число, причём $\sigma > 1$. В силу тождества Эйлера, для таких s имеем:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Раскрывая скобки, в правой части получим сумму вида

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p_1 < \ldots < p_k} \frac{(-1)^k}{(p_1 \cdots p_k)^s} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Перемножим теперь почленно равенства

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^s};$$

получим:

$$1 = \zeta(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{m,d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{(md)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=dm} \mu(d) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left(\sum_{d|n} \mu(d) \right).$$

Замечая напоследок, что

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \text{ где } a(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и сравнивая коэффициенты при $\frac{1}{n^s}$, получим требуемое. □

Спору нет: это доказательство далеко не безупречно. Во-первых неясно, почему в выражении для $1/\zeta(s)$ знаменатель не обращается в нуль. Во-вторых, непонятно, на каком основании мы приравняли коэффициенты у двух рядов*, представляющих

---

* Такие ряды, кстати, называются рядами Дирихле.

одну и ту же функцию.

С одной стороны, всем этим рассуждениям можно придать строгость: доказать отсутствие нулей у дзета-функции в полуплоскости $\sigma > 1$, установить теорему единственности для рядов Дирихле. Но все это потребовало бы от нас некоторых усилий и, главное, увело бы разговор далеко в сторону от основной темы — дробей Фарея.

С другой стороны, основное свойство функции Мёбиуса можно вывести совершенно элементарно, и этот вывод предлагается для ревнителей математической строгости в качестве упражнения.

К трюку, основанному на сравнении коэффициентов у двух рядов Дирихле, мы — ввиду его наглядности — вернёмся еще раз в § 7.

<u>Лемма 5</u> Пусть $q \geq 1$ — целое число. Тогда

$$\mu(q) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}} \qquad (8).$$

Док-во. Воспользуемся основным свойством функции Мёбиуса в следующей форме:

$$\sum_{d\mid(m,n)} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \text{ и } n \text{ взаимно просты}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Применяя его к правой части (8), будем иметь:

$$\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}} = \sum_{a=1}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}}\Big(\sum_{d\mid(a,q)}\mu(d)\Big) =$$

$$= \sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{\substack{a=1\\a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}^{q} e^{2\pi i\frac{a}{q}} = \sum_{d\mid q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q/d} e^{2\pi i\frac{b}{q/d}}. \quad (9)$$

Несложно видеть, что при целом $m \geq 1$ сумма

$$\sum_{b=1}^{m} e^{2\pi i\frac{b}{m}}$$

принимает всего два значения: 1, если $m=1$, и 0 в остальных случаях. Следовательно, сумма по b в (9) отлична от нуля лишь при $q/d=1$, т.е. при $d=q$. Отсюда получается искомое соотношение для $\mu(q)$. □

Замечание. Сумма (8) является частным случаем сумм Рамануджана $c_q(n)$, определенных равенством

$$c_q(n) = \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i\frac{an}{q}}.$$

Они обладают целым рядом замечательных свойств. В частности, при любых q и n число $c_q(n)$ — вещественное, и его можно вычислить с помощью формулы

$$c_q(n) = \mu\left(\frac{q}{D}\right)\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\frac{q}{D}\right)}, \text{ где } D=(q,n).$$

В частности, для взаимно простых q и n находим:
$c_q(n) = \mu(q)$.

Замечая, что дроби в показателях экспонент суммы (8) — дроби Фарея с заданным знаменателем q, приходим к такому утверждению:

Следствие. Для любого $Q \geq 1$ справедливы равенства:

$$M(Q) = \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} e^{2\pi i \frac{a}{q}} = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \tau_n}, \quad (10)$$

где, как и выше, $N = N(Q)$.

Формула (10) — ключевой компонент в доказательстве теоремы Ландау.

§4. Вывод гипотезы Римана из оценки (4). Заменяя τ_n на $\frac{n}{N} + \delta_n$ в формуле (10), будем иметь:

$$M(Q) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \left(\frac{n}{N} + \delta_n\right)} = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \left(1 + e^{2\pi i \delta_n} - 1\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} + \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \cdot \left(e^{2\pi i \delta_n} - 1\right).$$

Первая из сумм равна нулю. Слагаемые второй суммы преобразуем с помощью формулы Эйлера:

$$M(Q) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \cdot e^{\pi i \delta_n} \left(e^{\pi i \delta_n} - e^{-\pi i \delta_n}\right) =$$

$$= 2i \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \frac{n}{N}} \cdot e^{\pi i \delta_n} \sin(\pi \delta_n).$$

Перейдем теперь к оценкам, пользуясь неравенством $|\sin \pi x| \leq \pi x$. Получим:

$$|M(Q)| \leq 2\pi \sum_{n=1}^{N} |\delta_n|.$$

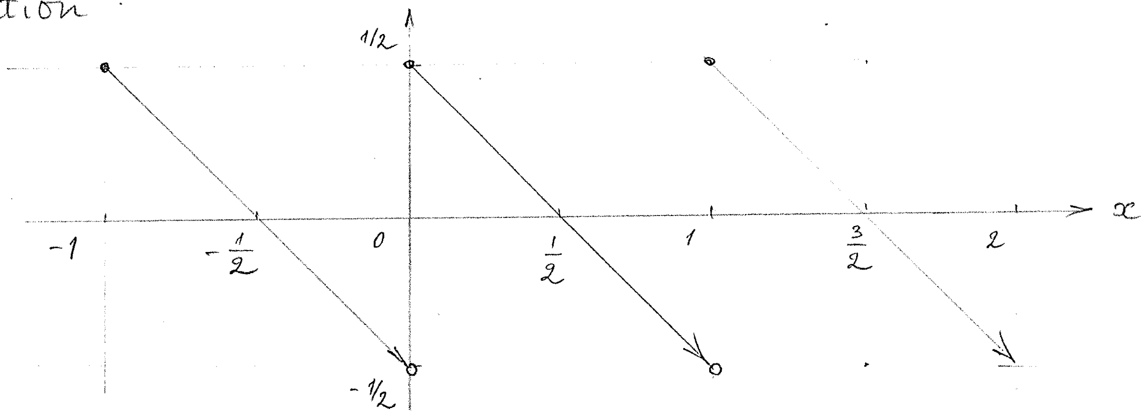
В силу предположения,

$$\sum_{n=1}^{N} |\delta_n| \ll Q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

при любом $\varepsilon > 0$. Значит, $M(Q) \ll Q^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$. Но эта оценка, как отмечалось выше, влечет гипотезу Римана.

§ 5. Пилообразная функция и формула Клювера

Вывод оценки (3) из неравенства (7) уже не столь прост и требует ряда вспомогательных лемм. Важнейшую роль в них играет функция $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Её график, изображённый на рис. 1, вполне объясняет её название: "saw-teeth function".



Она периодична с периодом 1 и имеет разрывы в целых точках.

<u>Лемма 6</u>. Для любого целого $q \geq 1$ и любого вещественного x справедливо тождество

$$\sum_{a=0}^{q-1} \rho\left(x + \frac{a}{q}\right) = \rho(qx). \qquad (11)$$

<u>Док-во</u> заметим, что в обеих частях равенства (11) стоят функции, не меняющиеся от замены x на $x + \frac{1}{q}$. Следовательно, искомое тождество достаточно проверить лишь для $0 \leq x < \frac{1}{q}$. Но для таких x имеем:

$$\sum_{a=0}^{q-1} \rho\left(x + \frac{a}{q}\right) = \sum_{a=0}^{q-1} \left(\frac{1}{2} - \left(x + \frac{a}{q}\right)\right) = \frac{q}{2} - qx - \frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} a =$$

$$= \frac{q}{2} - qx - \frac{q-1}{2} = \frac{1}{2} - qx = \rho(qx).$$

Лемма доказана. □

Следующая формула, связывающая анализ и арифметику, была найдена в 1903 г. датским математиком Яном Корнелисом Клювером (1860-1929).

Лемма 7. Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\int_0^1 \rho(ax)\rho(bx)\,dx = \frac{(a,b)^2}{12ab}.$$

Док-во формулы Клювера проведем сначала для случая, когда a и b взаимно простые.
Пусть $\frac{n}{a} \le x < \frac{n+1}{a}$, где n - целое число, положив $x = \frac{n}{a} + y$, будем иметь:

$$\rho(ax) = \rho(ay), \quad \rho(bx) = \rho\left(by + \frac{bn}{a}\right),$$

так что

$$\int_{\frac{n}{a}}^{\frac{n+1}{a}} \rho(ax)\rho(bx)\,dx = \int_0^{\frac{1}{a}} \rho(ay)\rho\left(by + \frac{bn}{a}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^1 \rho(w)\,\rho\left(\frac{b}{a}w + \frac{bn}{a}\right)dw. \qquad (12)$$

Обозначим исходный интеграл через $I(a,b)$. Тогда, суммируя обе части (12) по n, получим:

$$I(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^1 \rho(w) \sum_{n=0}^{a-1} \rho\left(\frac{b}{a}w + \frac{bn}{a}\right)dw$$

В силу взаимной простоты a и b, сумма по n совпадает с суммой

$$\sum_{n=0}^{a-1} \rho\left(\frac{b}{a}w + \frac{n}{a}\right).$$

последняя, согласно лемме 5, равна $\rho\left(a\cdot\frac{bw}{a}\right) = \rho(bw)$.
Таким образом,

$$I(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^1 \rho(w)\rho(bw)\,dw = \frac{1}{a} I(1,b).$$

Но числа 1 и b, очевидно, взаимно просты; применив аналогичные рассуждения к интегралу $I(1,b)$, будем иметь:

$$I(1,b) = \frac{1}{b} I(1,1), \quad I(a,b) = \frac{1}{ab} I(1,1).$$

Последний интеграл легко вычисляется:

$$I(1,1) = \int_0^1 \rho^2(x)\,dx = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}-x\right)^2 dx = 2\int_0^{1/2} y^2\,dy = \frac{1}{12}.$$

Следовательно,
$$I(a,b) = \frac{1}{12ab}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $(a,b)=c>1$. Положив $a=c\alpha$, $b=c\beta$, где $(\alpha,\beta)=1$, и вновь пользуясь периодичностью ρ, находим:

$$I(a,b) = \int_0^1 \rho(\alpha c x)\,\rho(\beta c x)\,dx = \frac{1}{c}\int_0^c \rho(\alpha x)\rho(\beta x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{c}\cdot c\int_0^1 \rho(\alpha x)\rho(\beta x)\,dx = I(\alpha,\beta) = \frac{1}{12\alpha\beta} = \frac{c^2}{12ab}.$$

Лемма доказана. □

§6. "Считающая функция" дробей Фарея

Пусть $0\le x\le 1$. Определим величину $g(x;Q)$ как количество дробей из ряда $\Phi(Q)$, не превосходящих x. В частности, $g(0;Q)=1$, $g(1;Q)=N(Q)$. Следующее утверждение устанавливает связь между функциями $g(x;Q)$ и $M(Q)$.

Лемма 8 Справедливо тождество:
$$g(x;Q) = \sum_{m\le Q} [mx]\, M\left(\frac{Q}{m}\right).$$

Док-во Вновь воспользуемся основным свойством функции Мёбиуса:

$$g(x;Q) = \sum_{q\le Q}\ \sum_{\substack{1\le a\le qx\\ (a,q)=1}} 1 = \sum_{q\le Q}\ \sum_{1\le a\le qx}\ \sum_{\delta\mid(a,q)} \mu(\delta) =$$

$$= \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta) \sum_{q\le Q}\ \sum_{\substack{1\le a\le qx\\ q,a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ \delta)}} 1 = \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{m\le \frac{Q}{\delta}}\ \sum_{1\le b\le mx} 1 =$$

$$= \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{m\le\frac{Q}{\delta}} [mx].$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$g(x;Q) = \sum_{m\le Q} [mx] \sum_{\delta \le \frac{Q}{m}} \mu(\delta) = \sum_{m \le Q} [mx] M\left(\frac{Q}{m}\right).$$

Лемма доказана. □

Несложно сообразить, что величина Nx служит хорошим приближением для числа узлов равномерной сетки n/N, $n=1,2,\dots,N$, попавших на отрезок $[0;x]$. Следующая лемма даёт явное выражение для разности между $g(x;Q)$ и Nx.

Лемма 9. Определим функцию $G(x;Q)$ равенством:

$$G(x;Q) = g(x;Q) - Nx + \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$G(x;Q) = \sum_{m\le Q} \rho(mx) M\left(\frac{Q}{m}\right).$$

Док-во. Заменим в формуле леммы 8 целую часть $[mx]$ разностью $mx - \{mx\} = mx - \frac{1}{2} + \rho(mx)$.

Получим:

$$g(x;Q) = \sum_{m\le Q} \left(mx - \frac{1}{2} + \rho(mx)\right) M\left(\frac{Q}{m}\right) =$$

$$= x \sum_{m \le Q} m M\left(\frac{Q}{m}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m\le Q} M\left(\frac{Q}{m}\right) + \sum_{m\le Q} \rho(mx) M\left(\frac{Q}{m}\right).$$

Теперь заметим, что первое слагаемое совпадает с $x g(1;Q) = xN$. Второе также легко вычисляется:

$$\sum_{m\le Q} M\left(\frac{Q}{m}\right) = \sum_{m \le Q} \sum_{n \le \frac{Q}{m}} \mu(n) = \sum_{mn\le Q} \mu(n) = \sum_{k \le Q} \sum_{n | k} \mu(n)$$

$= 1$. Лемма доказана. □.

Функция $G(x;Q)$ "отвечает" за уклонения дробей r_n, $r_n \le x$, от равномерной сетки. Последняя из вспомогательных лемм связывает среднеквадратичное значение $G(x,Q)$, $0\le x \le 1$, с величинами δ_n.

Лемма 10. При любом $Q > 1$ справедливо равенство:

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 = \frac{1}{N}\left(I(Q) - \frac{1}{12}\right),$$

в котором $I(Q) = \int_0^1 G^2(x;Q)\,dx$.

Док-во. Воспользуемся тем, что на всяком промежутке $\tau_n \le x < \tau_{n+1}$ функция $g(x;Q)$ сохраняет значение: $g(x;Q) \equiv n$. Получим:

$$I(Q) = \int_0^1 \left(g(x;Q) - Nx + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \left(n - Nx + \frac{1}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{3N} \sum_{n=1}^{N-1} \left(n - Nx + \frac{1}{2}\right)^3 \Bigg|_{\tau_{n+1}}^{\tau_n} =$$

$$= \frac{1}{3N} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\left(n - N\tau_n + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(n - N\tau_{n+1} + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3N} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left(n + \frac{1}{2} - N\tau_n\right)^3 - \sum_{n=2}^{N} \left(n - \frac{1}{2} - N\tau_n\right)^3\right) =$$

$$= \frac{N^2}{3} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{2N} - \delta_n\right)^3 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{2N} + \delta_n\right)^3\right).$$

Заметим теперь, что $\delta_1 = -\frac{1}{N}$, $\delta_N = 0$. Дополняя области суммирования в обеих суммах до $1 \le n \le N$, найдем:

$$I(Q) = \frac{N^2}{3} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2N} - \delta_n\right)^3 - \frac{1}{(2N)^3} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2N} + \delta_n\right)^3 + \frac{1}{(2N)^3}\right)$$

$$= \frac{N^2}{3} \sum_{n=1}^{N} \left(\left(\frac{1}{2N} - \delta_n\right)^3 + \left(\frac{1}{2N} + \delta_n\right)^3\right) =$$

$$= \frac{N^2}{3} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{4N^3} + \frac{3\delta_n^2}{N}\right) = N \sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 + \frac{1}{12}.$$

Лемма доказана. □

§7. Завершение доказательства.

Теперь у нас все готово для вывода оценки (3) из неравенства (7).

Так, пользуясь формулой леммы 9, находим:

$$I(Q) = \int_0^1 \Big(\sum_{m \le Q} \rho(mx) M\Big(\frac{Q}{m}\Big)\Big)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{m,n \le Q} \rho(mx)\rho(nx) M\Big(\frac{Q}{m}\Big) M\Big(\frac{Q}{n}\Big) dx =$$

$$= \sum_{m,n \le Q} M\Big(\frac{Q}{m}\Big) M\Big(\frac{Q}{n}\Big) \int_0^1 \rho(mx)\rho(nx)\,dx.$$

Интегралы, содержащие функцию ρ, вычисляются с помощью формулы Клювера:

$$I(Q) = \frac{1}{12} \sum_{m,n \le Q} \frac{(m,n)^2}{mn} M\Big(\frac{Q}{m}\Big) M\Big(\frac{Q}{n}\Big).$$

Далее, в силу неравенства (7), при любом $\varepsilon > 0$ и надлежащем выборе постоянной $c(\varepsilon)$ будем иметь:

$$I(Q) \le \frac{1}{12} \sum_{m,n \le Q} \frac{(m,n)^2}{mn} c(\varepsilon)\Big(\frac{Q}{m}\Big)^{1/2+\varepsilon} \cdot c(\varepsilon)\Big(\frac{Q}{n}\Big)^{1/2+\varepsilon} =$$

$$= \frac{c^2(\varepsilon)}{12} Q^{1+2\varepsilon} S(Q), \text{ где } S(Q) = \sum_{m,n \le Q} \frac{(m,n)^2}{(mn)^{3/2+\varepsilon}}.$$

Все, что остается — оценить сумму $S(Q)$:

$$S(Q) = \sum_{\delta \le Q} \delta^2 \sum_{\substack{m,n \le Q \\ (m,n) = \delta}} \frac{1}{(mn)^{3/2+\varepsilon}} \le \sum_{\delta \le Q} \delta^2 \sum_{\substack{m,n \le Q \\ m,n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \delta)}} \frac{1}{(mn)^{3/2+\varepsilon}}$$

$$= \sum_{\delta \le Q} \delta^2 \frac{1}{\delta^{3+2\varepsilon}} \sum_{\mu,\nu \le \frac{Q}{\delta}} \frac{1}{(\mu\nu)^{3/2+\varepsilon}} \le \sum_{\delta \le Q} \frac{1}{\delta^{1+2\varepsilon}} \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{3/2}}\Big)^2$$

$$= \zeta^2(3/2) \sum_{\delta \le Q} \frac{1}{\delta^{1+2\varepsilon}} \le \zeta^2(3/2)\Big(1 + \int_1^Q \frac{du}{u^{1+2\varepsilon}}\Big) < \Big(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\Big)\zeta^2\Big(\frac{3}{2}\Big).$$

Следовательно, $I(Q) \le c_1(\varepsilon) Q^{1+2\varepsilon}$, где

$$c_1(\varepsilon) = \frac{c^2(\varepsilon)}{12}\Big(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\Big)\zeta^2\Big(\frac{3}{2}\Big).$$

Теперь искомое утверждение следует из леммы 10. □

Естественно поставить вопрос о том, каков истинный порядок суммы

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n^2, \quad N = N(Q),$$

при неограниченном возрастании Q? Несложное повторение приведенных выше рассуждений с использованием неравенства

$$|M(Q)| \leq \sqrt{Q}\, f(Q), \tag{12}$$

где $f(Q)$ – некоторая неубывающая функция, приводит к неравенству

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 \ll Q^{-1} f^2(Q) (\ln Q)$$

(в случае $f(Q) = Q^{\varepsilon}$ множитель $(\ln Q)$ мог бы возникнуть, если бы мы действовали более грубо:

$$\sum_{d \leq Q} \frac{d^2}{d^{3+2\varepsilon}} \leq \sum_{d \leq Q} \frac{1}{d} \ll \ln Q).$$

Между тем, гипотеза Римана приводит к неравенствам (12) с функцией f, растущей медленнее любой фиксированной степени Q. Так, в 1924 г. Ландау доказал оценку (12) с

$$f(Q) = \exp\left(c \frac{\ln Q}{\ln \ln Q} \cdot \ln \ln \ln Q\right).$$

Этот результат Ландау не раз уточнялся. Лучшее, что известно на сегодняшний день – это оценка Ханга Буи и Александры Флореа (2023) с

$$f(Q) = \exp\left(\sqrt{\ln Q}\, (\ln \ln Q)^{\frac{7}{8}+\varepsilon}\right)$$

Хотя неравенство для $M(Q)$ допускает, по-видимому, дальнейшее усиление, растущий множитель при Q^{-1} в оценке суммы величин δ_n^2 нельзя: как показал Сергей Борисович Стечкин (1920–1995), при всех достаточно больших Q и надлежащем выборе постоянной c справедливо (независимо от каких бы то ни было гипотез) неравенство*

$$\sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 \geq c \frac{\ln Q}{Q}$$

* [см. след. лист]

§7. Функции Мангольдта и Чебышёва

Неожиданное тождество, связывающее простые числа и дроби Фарея, было открыто в 1996 году японскими математиками Шигеру Канемицу и Масами Йошимото.*

* S. Kanemitsu, M. Yoshimoto, Farey series and the Riemann hypothesis // Acta Arithmetica, 75 (1996), № 4, p. 351-374.

Прежде чем привести его формулировку, нам потребуется ввести пару новых обозначений.
Выше мы видели, что функция Мёбиуса появляется естественным образом при обращении дзета-функции Римана. Под стать ей — функция Мангольдта, которая играет важную роль в теории распределения простых чисел.

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексное число, причем $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$. Прологарифмируем обе части тождества Эйлера:

$$\ln \zeta(s) = \ln \left\{ \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right\} = -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Поскольку $|1/p^s| = 1/p^\sigma < 1/p \le 1/2$, каждый из логарифмов можно разложить в ряд Тейлора:

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Продифференцируем теперь обе части этого равенства по s:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{ks}}.$$

Наконец, заменяя двойную сумму — по p и k — одинарной, получим:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \qquad (13)$$

* Этот результат был опубликован в 1997 г., после смерти автора. См.: С.Б. Стечкин, Ряды Фарея // Матем. заметки, 61 (1997), № 1, с. 91-113.

где коэффициенты ряда, стоящего справа, определяются следующим образом: $\Lambda(n) = \ln p$, если n есть степень простого числа p ($n = p^k$, $k \geq 1$), и $\Lambda(n) = 0$ в противном случае.

Функция $\Lambda(n)$ именуется функцией Мангольдта в честь немецкого математика Ганса Карла Фридриха фон Мангольдта (1854 – 1925).

Одна из основных задач в теории распределения простых чисел – исследовать поведение величины

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

Как уже отмечалось в § 2.1, асимптотический закон распределения простых чисел в его простейшей форме утверждает, что

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x} + \bar{o}\left(\frac{x}{\ln x}\right)$$

при $x \to +\infty$.

Как и у гипотезы Римана, у а.з.р.п.ч. есть много эквивалентов. Один из них использует так называемую функцию Чебышёва $\psi(x)$, которая определяется равенством

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Впервые она появилась в мемуаре Пафнутия Львовича Чебышёва (1820 – 1894) "О простых числах" (1850). Он

Оказывается, с "технической" точки зрения изучать $\psi(x)$ несколько проще, чем $\pi(x)$. Это находит отражение и в формулировке а.з.р.п.ч. в терминах функции Чебышёва:

$$\psi(x) = x + \bar{o}(x).$$

Главный член в таком равенстве — простейшая линейная функция x.

Из формул (1), (), (13) следует одно равенство, необходимое нам для дальнейшего. Так, дифференцируя (1) по s, получим:

$$\zeta'(s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln m}{m^s}.$$

Далее, умножая это равенство почленно на (·), будем иметь:

$$-\zeta'(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln m}{m^s} \right)\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^s} \right) =$$

$$= \sum_{md=1}^{\infty} \frac{(\ln m)\mu(d)}{(md)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{n=md} (\ln m)\mu(d),$$

приравнивая коэффициент при $\frac{1}{n^s}$ к $\Lambda(n)$, окончательно находим:

$$\Lambda(n) = \sum_{n=md} \mu(d) \ln m = \sum_{d|n} \mu(d) \ln \frac{n}{d}. \quad (14).$$

§ 8. Тождество Канемицу - Йошимото

Познакомившись с функцией Чебышёва, мы можем сформулировать тождество, связывающее дроби Фарея и $\psi(x)$.

<u>Теорема 5</u> (Канемицу, Йошимото, 1996). При любом $Q \geq 3$ справедливо равенство:

$$\sum_{\substack{r_n \in \Phi(Q) \\ r_n \neq 0,1}} \ln(2\sin \pi r_n) = \psi(Q).$$

Для доказательства теоремы 5 нам потребуются несложные вспомогательные утверждения.

<u>Лемма 10</u> Для любого $n \geq 2$ выполнено тождество:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(2\sin\frac{\pi k}{n}\right) = \ln n.$$

<u>Док-во</u> Пусть n - нечётное число, $n = 2m+1$, $m \geq 1$. Замечая, что числа $e^{2\pi i k/n}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ являются корнями полинома

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

находим:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x - e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{m}\left(x - e^{2\pi i \frac{k}{n}}\right) \cdot \left(x - e^{-2\pi i \frac{k}{n}}\right) = \prod_{k=1}^{m}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi k}{n} + 1\right).$$

Полагая в этом равенстве $x = 1$, будем иметь:

$$n = \prod_{k=1}^{m} 2\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{m}\left(2\sin\frac{\pi k}{n}\right)^2 =$$

$$= \prod_{k=1}^{m}\left(2\sin\frac{\pi k}{n}\right)\left(2\sin\frac{\pi(n-k)}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin\frac{\pi k}{n}\right),$$

откуда легко следует искомое утверждение.

Случай, когда n — четное, рассматривается аналогично. $\square$

Перейдем, наконец, к доказательству тождества Канемицу-Цашимото. Обозначая сумму из условия теоремы 5 через $S(Q)$ и пользуясь основным свойством функции Мебиуса, получим:

$$S(Q) = \sum_{1<q\leq Q} \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q-1} \ln\left(2\sin\frac{\pi a}{q}\right) =$$

$$= \sum_{1<q\leq Q} \sum_{a=1}^{q-1} \left(\sum_{d\,|\,(a,q)} \mu(d)\right) \ln\left(2\sin\frac{\pi a}{q}\right) =$$

$$= \sum_{1\leq d\leq Q} \mu(d) \sum_{\substack{1<q\leq Q\\ q\equiv 0 \pmod d}} \sum_{\substack{1\leq a<q\\ a\equiv 0 \pmod d}} \ln\left(2\sin\frac{\pi a}{q}\right).$$

Заменим q и a на md и bd соответственно. Тогда, применяя ко внутренней сумме лемму 10, будем иметь:

$$\sum_{\substack{1\leq a<q\\ a\equiv 0 \pmod d}} \ln\left(2\sin\frac{\pi a}{q}\right) = \sum_{b=1}^{m-1} \ln\left(2\sin\frac{\pi b}{m}\right) = \ln m.$$

Пользуясь формулой (14), окончательно находим

$$S(Q) = \sum_{1\leq d\leq Q} \mu(d) \sum_{1<md\leq Q} \ln m = \sum_{1\leq md\leq Q} \mu(d)\ln m =$$

$$= \sum_{n\leq Q} \left(\sum_{d|n} \mu(d)\ln\frac{n}{d}\right) = \sum_{n\leq Q} \Lambda(n) = \psi(Q).$$

Теорема 5 доказана. $\square$

Упражнения к главе II.

(2.1) Выразите с помощью функции $g(x;Q) = g(x)$ следующие суммы:

(a) $\sum\limits_{0<r_n\le x} r_n$; (b) $\sum\limits_{0<r_n\le x} r_n^2$; (c) $\sum\limits_{0\le r_n\le x} n$; (d) $\sum\limits_{0\le r_n\le x} n r_n$.

Указание. Воспользуйтесь следующей версией формулы суммирования Абеля. Пусть $\{\lambda_n\}$ – произвольная неубывающая последовательность вещественных чисел, причем $a<\lambda_n\le b$ для любого n. Пусть, далее, функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел $\{c_n\}$ справедливо равенство:

$$\sum_{a<\lambda_n\le b} c_n f(\lambda_n) = \mathbb{C}(b) f(b) - \int_a^b \mathbb{C}(u) f'(u)\,du,$$

в котором $\mathbb{C}(u) = \sum\limits_{a<\lambda_n\le u} c_n$.

(2.2) Вычислите интеграл $\int_0^1 g(x)\,dx$.

(2.3)* Вычислите интеграл $\int_0^1 x\,g(x)\,dx$

(2.4) Докажите основное свойство функции Мёбиуса, не пользуясь формулой (2).

(2.5) Докажите тождество (14) без использования рядов Дирихле.

(2.6) Докажите ещё одно тождество, установленное Ш. Канемицу и М. Йошимото:

$$2\sum_{\substack{r_n\in\Phi(Q)\\ 0<r_n<1/2}} \ln(\operatorname{tg}\pi r_n) = \psi(Q) - \psi\left(\frac{Q}{2}\right) - \ln 2,$$

Решения упражнений к главе $\underline{II}$.

(1) a) Полагая $\lambda_n = r_n$, $f(u) = u$, $a = 0$, $b = x$, $c_n \equiv 1$ и замечая, что

$$C(u) = \sum_{0<r_n\le u} 1 = g(u) - 1,$$

получим:

$$\sum_{0<r_n\le x} r_n = (g(x)-1)x - \int_0^x (g(u)-1)\,du = x g(x) - \int_0^x g(u)\,du.$$

b) Выбор $f(u) = u^2$ (при тех же λ_n, a, b и c_n) приводит к равенствам

$$\sum_{0<r_n\le x} r_n^2 = (g(x)-1)x^2 - 2\int_0^x (g(u)-1)u\,du = x^2 g(x) - \int_0^x u\, g(u)\,du.$$

c) Имеем:

$$\sum_{0\le r_n\le x} n = \sum_{0\le r_n\le x} \sum_{0\le r_m\le r_n} 1 = \sum_{0\le r_m\le r_n\le x} 1 = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{0\le r_m, r_n\le x} 1 + \sum_{0\le r_n\le x} 1\Bigg) = \frac{g^2(x)+g(x)}{2},$$

d) Полагая $c_n = n$, $\lambda_n = r_n$, $f(u) = u$ (и пользуясь результатом п. (c)), будем иметь:

$$\sum_{0<r_n\le x} n r_n = C(x)x - \int_0^x C(u)\,du;$$ где $C(u) = \sum_{0<r_n\le x} n = \sum_{0\le r_n\le x} n - 1 = \frac{1}{2}\left(g^2(x)+g(x)\right) - 1.$

Окончательно находим:

$$\sum_{0\le r_n\le x} n r_n = \frac{x}{2}\left(g^2(x)+g(x)\right) - \frac{1}{2}\int_0^x \left(g^2(u)+g(u)\right)du.$$

(2) Положив $x = 1$ в равенстве п. (1a), найдем:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = g(1) - \sum_{0<r_n\le 1} r_n.$$

Вместе с дробью r_n в ряд Фарея $\Phi(Q)$ входит, очевидно, и дробь $1-r_n$, причём в случае $r_n \ne \frac{1}{2}$ эти дроби различны. Следовательно,

$$2\sum_{r_n\ne\frac{1}{2}} r_n = \sum_{r_n\ne\frac{1}{2}} \left(r_n + (1-r_n)\right) = N-1,$$ откуда $\sum_{n=1}^{N} r_n = \frac{N-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$.

Замечая, что $g(1) = N$, окончательно находим: $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{N}{2}$.

(3*) <u>Ответ</u>: $\frac{2}{3}N - \frac{1}{2} - \sum\limits_{1\le n\le Q} \frac{(-1)^{\omega(n)}\varphi(n)}{n^2}\,\mathrm{rad}(n)$, где

$\omega(n)$ — количество различных простых делителей n (без учета кратности), $\mathrm{rad}(n) = \prod\limits_{p|n} p$ — "радикал n"

Положив $x=1$ в равенстве п. (1b), найдем:

$$\int_0^1 u\,g(u)\,du = N - W, \text{ где } W = \sum_{n=1}^{N} r_n^2 .$$

Пользуясь основным свойством функции Мёбиуса, получаем:

$$W = \sum_{q\le Q}\ \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{a^2}{q^2} = \sum_{q\le Q}\frac{1}{q^2}\sum_{a=1}^{q} a^2 \sum_{\delta|(a,q)}\mu(\delta) =$$

$$= \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{\substack{q\le Q\\ q,a\equiv 0 \pmod{\delta}}}\frac{1}{q^2}\sum_{a=1}^{q} a^2 = \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{m\le \frac{Q}{\delta}}\frac{1}{m^2}\sum_{b=1}^{m} b^2 =$$

$$= \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{m\le\frac{Q}{\delta}}\frac{m(m+1)(2m+1)}{6m^2} = \sum_{\delta\le Q}\mu(\delta)\sum_{m\le\frac{Q}{\delta}}\left(\frac{m}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6m}\right)$$

$= W_1 + W_2 + W_3$, где смысл обозначений W_j ясен.

Имеем, далее:

$$W_1 = \frac{1}{3}\sum_{m\delta\le Q} m\mu(\delta) = \frac{1}{3}\sum_{n\le Q}\ \sum_{n=m\delta} m\mu(\delta) =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n\le Q}\ \sum_{\delta|n}\frac{n}{\delta}\mu(\delta) = \frac{1}{3}\sum_{n\le Q} n\sum_{\delta|n}\frac{\mu(\delta)}{\delta} = \frac{1}{3}\sum_{n\le Q}\varphi(n) = \frac{N}{3}.$$

Сумма W_2 была вычислена при доказательстве леммы 8:

$$W_2 = \frac{1}{2}.$$

Наконец,

$$W_3 = \frac{1}{6}\sum_{m\delta\le Q}\frac{\mu(\delta)}{m} = \frac{1}{6}\sum_{n\le Q}\frac{1}{n}\sum_{\delta|n}\delta\mu(\delta) = \frac{1}{6}\sum_{n\le Q}\frac{1}{n}\prod_{p|n}(1-p)$$

$= \frac{1}{6}\sum\limits_{n\le Q}\frac{(-1)^{\omega(n)}}{n}\prod\limits_{p|n}(p-1)$. Осталось заметить, что

$$\prod_{p|n}(p-1) = \frac{\varphi(n)}{n}\cdot\mathrm{rad}(n).$$

(4) Пусть $n > 1$ и $p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение n. Тогда в сумму $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ ненулевой вклад вносят лишь $d=1$ и числа d вида $p_{i_1}\cdots p_{i_m}$, где $1\le m\le k$, $1\le i_1<\dots<i_m\le k$, причем в последнем случае $\mu(d)=(-1)^m$. Замечая, что имеется ровно C_k^m различных наборов $i_1,\dots,i_m$ с указанным свойством, находим выражение для исходной суммы в виде

$$1+\sum_{m=1}^{k} C_k^m(-1)^m = (1-1)^m = 0.$$

(5) Для начала покажем, что

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$$

для любого $n\ge 1$. Пусть $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$. Тогда ненулевой вклад в левую часть вносят делители вида $d=p_i^{\beta_i}$, где $1\le i\le k$, $1\le \beta_i\le\alpha_i$. Для заданного i этот вклад составит $\alpha_i\cdot\ln p_i = \ln(p_i^{\alpha_i})$. Сумма по всем i этих величин и даст $\ln n$.

Далее, преобразуя сумму из (14) с помощью доказанного равенства, будем иметь:

$$\sum_{d|n}\mu(d)\ln\frac{n}{d} = \sum_{md=n}\mu(d)\ln m = \sum_{md=n}\mu(d)\sum_{\delta|m}\Lambda(\delta) =$$

$$= \sum_{d\delta l=n}\mu(d)\Lambda(\delta) = \sum_{\delta|n}\Lambda(\delta)\sum_{dl=\frac{n}{\delta}}\mu(d) = \sum_{\delta|n}\Lambda(\delta)\sum_{d|\frac{n}{\delta}}\mu(d).$$

В силу основного свойства функции Мебиуса, сумма по d отлична от нуля лишь при $\delta=n$.