Глава III. От арифметики к геометрии

§1. Индексы дробей Фарея

Выпишем несколько подряд идущих дробей ряда $\Phi(9)$, скажем

$$\frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2} < \frac{5}{9}.$$

Составим табличку, в колонках которой последовательно поместим а) тройки соседних знаменателей, b) суммы "крайних" знаменателей троек и c) "средние" знаменатели:

(q_0, q_1, q_2)	q_0+q_2	q_1
$(9,4,7)$	16	4
$(4,7,3)$	7	7
$(7,3,8)$	15	3
$(3,8,5)$	8	8
$(8,5,7)$	15	5
$(5,7,9)$	14	7
$(7,9,2)$	9	9
$(9,2,9)$	18	2

Нетрудно заметить, что каждое число второй колонки делится на число из третьей колонки: $8:8=1$, $15:5=3$, $16:4=4$, $7:7=1$, $15:3=5$, $14:7=2$, $9:9=1$, $18:2=9$.

Наша ближайшая цель – понять закономерность, которая стоит за этими соотношениями, и научиться решать некоторые связанные с ней задачи. Начнем со следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть $\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}$ – последовательные дроби ряда Фарея $\Phi(Q)$. Тогда сумма q_0+q_2 делится на q_1, причём частное k от деления можно определить по формуле $k = \left[\frac{Q+q_0}{q_1}\right]$.

Док-во. Сложим почленно модулярные соотношения $a_1q_0 - a_0q_1 = 1$, $a_2q_1 - a_1q_2 = 1$, предварительно умножив первое на q_2, второе – на q_0.

получим цепочку равенств

$$q_0+q_2 = q_0(a_2q_1-a_1q_2)+q_2(a_1q_0-a_0q_1) = q_0q_1a_2-q_0q_2a_1+$$
$$+q_0q_2a_1-q_1q_2a_0 = q_1(q_0a_2-q_2a_0),$$

из которых следует первое утверждение.
Докажем теперь, что частное $k=(q_2+q_0)/q_1$ совпадает с числом $\left[\frac{Q+q_0}{q_1}\right]$. Прежде всего, из неравенства $q_2\le Q$ следует, что

$$k \le \frac{Q+q_0}{q_1}. \qquad (15)$$

В то же время, пользуясь тем, что $q_1+q_2>Q$, находим:

$$k = \frac{q_0+(q_1+q_2)}{q_1}-1 > \frac{q_0+Q}{q_1}-1. \qquad (16)$$

Теперь искомая формула следует из (15) и (16). □

<u>Упражнение 3.1</u> Докажите, что числители трёх последовательных дробей ряда Фарея удовлетворяют аналогичному соотношению: $a_0+a_2=ka_1$.

<u>Определение 4</u>
Число k называется индексом дроби $\frac{a_1}{q_1}$ в ряду Фарея $\Phi(Q)$ и обозначается $k_Q\left(\frac{a_1}{q_1}\right)$. Из теоремы 5 следует, что индекс можно получить перемножением "крест накрест" числителей и знаменателей дробей, окружающих a_1/q_1, с последующим вычитанием:

$$k_Q\left(\frac{a_1}{q_1}\right) = a_2q_0-a_0q_2.$$

Для дробей $0/1$ и $1/1$ индекс мы определять не будем, хотя это можно сделать, устроив этим дробям недостающих соседей приписыванием дробей $-1/[Q]$ (слева от $\frac{0}{1}$) и $([Q]+1)/[Q]$ (справа от $\frac{1}{1}$).

Вычисления, проведенные в начале параграфа для ряда $\Phi(9)$, наводят на мысль, что индекс k дроби в ряду Фарея может быть равным любому натуральному числу — лишь бы порядок Q был достаточно велик. Так это или нет — мы выясним чуть позже.

Важной особенностью формулы Теоремы 5 является то, что в неё не входит q_2. Это позволяет восстановить всю последовательность знаменателей дробей ряда $\Phi(Q)$ по паре чисел q_0 и q_1. Действительно, имея тройку Q, q_0 и q_1, можно вычислить q_2 по формуле $q_2 = k_1 q_1 - q_0$, где $k_1 = \left[\frac{Q+q_0}{q_1}\right]$, затем положить $k_2 = \left[\frac{Q+q_1}{q_2}\right]$ и отыскать $q_3 = k_2 q_2 - q_1$, и так далее. (Заметим, что в силу Упражнения 1 то же верно и для последовательности числителей).

Упражнение 3.2 Подумайте, как, имея в распоряжении числа Q, q_0 и q_1, "двигаться" по последовательности знаменателей влево.
Указание Покажите, что индекс k можно вычислять и по формуле $k = \left[\frac{Q+q_2}{q_1}\right]$.

Упражнение 3.3 Вычислите сумму индексов всех дробей ряда $\Phi(Q)$.*
Указание. Проследите за тем, что происходит с индексами дробей, когда порядок ряда Фарея увеличивается на единицу.

§ 2. Треугольник Фарея

Пусть, как и выше,

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}$$

– соседние дроби ряда Фарея $\Phi(Q)$, перепишем формулу для индекса k средней дроби в виде

$$k = \left[\frac{1+q_0/Q}{q_1/Q}\right].$$

Заметим теперь, что числа $x = \frac{q_0}{Q}$ и $y = \frac{q_1}{Q}$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 < x \le 1,\ 0 < y \le 1,\ x+y > 1. \tag{17}$$

Следовательно, точка с координатами (x, y) лежит в треугольной области, которая ограничена

* Впервые эта сумма была вычислена Р. Холлом и П. Шиу (см.: R.R. Hall, P. Shiu, The index of a Farey sequence // Michigan Math. J., 51 (2003), №1, p. 209–223).

диагональю и двумя сторонами единичного квадрата (рис. 2). Обычно она обозначается буквой Г и именуется треугольником Фарея.

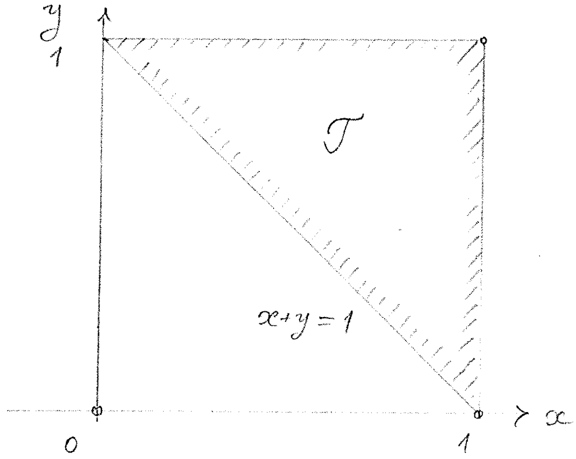


рис. 2.

Идея сопоставления паре соседних знаменателей q_0 и q_1 точки с координатами $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$, принадлежащая Флорину Боку, Кристиану Кобели и Александру Захареску, оказывается чрезвычайно плодотворной. С её помощью многие задачи об арифметических свойствах дробей Фарея удается перевести на геометрический язык. Например, нахождение числа дробей Фарея, чьи знаменатели удовлетворяют тем или иным арифметическим свойствам, можно свести к подсчету целых точек в некоторых выпуклых многоугольных подобластях "раздутого" треугольника Фарея.

В качестве примера мы рассмотрим задачу, решение которой дал в 2001 году Алан Хайнес. Пусть $k \geq 1$ — фиксированное целое число, $Q \geq Q_0(k)$, и пусть $N_k(Q)$ — количество дробей a_1/q_1 ряда $\Phi(Q)$, индекс которых равен k: $k_Q\left(\frac{a_1}{q_1}\right) = k$. Пусть, далее,

$$\nu_k(Q) = \frac{N_k(Q)}{N(Q)-2}$$

— доля таких дробей в общем числе дробей*.

* Имеются в виду дроби, для которых определен индекс.

Как ведёт себя величина $\nu_k(Q)$ с ростом Q?

§3. Индексы и области $\Gamma(k)$

Решение задачи Хайнеса разобьем на несколько шагов. Для начала выясним, как выглядит множество точек треугольника Фарея, координаты которых удовлетворяют условию

$$\left[\frac{1+x}{y}\right] = k. \qquad (18)$$

Обозначим это множество через $\Gamma(k)$. Условие (18), очевидно, равносильно неравенствам

$$k \le \frac{1+x}{y} < k+1$$

или, что то же, неравенствам

$$\frac{1+x}{k+1} < y \le \frac{1+x}{k}. \qquad (19)$$

С учетом неравенств (17) заключаем, что при $k=1$ область $\Gamma(k)$ представляет собой треугольник с вершинами $A_1=(0,1)$, $B_1=(1,1)$ и $D_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, ограниченный прямыми $x+y=1$, $y=\frac{1}{2}(1+x)$ и $y=1$ (при этом отрезок A_1D_1 не включается в $\Gamma(1)$ ввиду строгого неравенства $x+y>1$ (см. рис 3)).

рис. 3

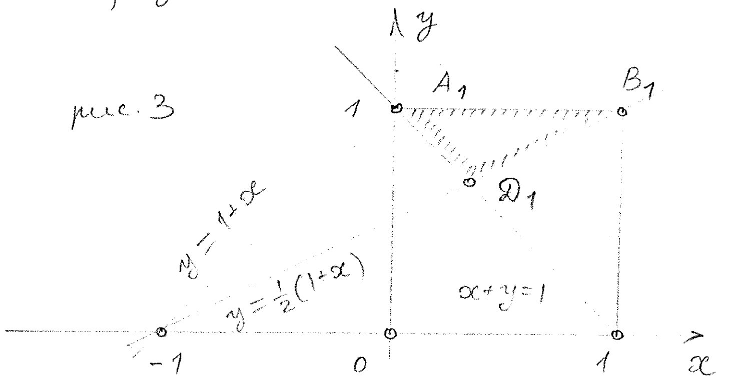
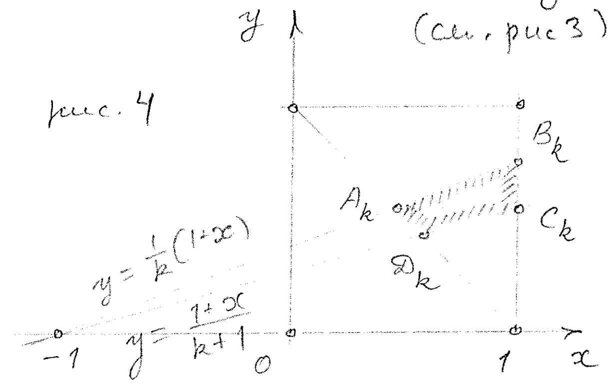


рис. 4



В случае же $k \ge 2$ область $\Gamma(k)$ выпуклым четырехугольником с вершинами

$$A_k=\left(\frac{k-1}{k+1},\frac{2}{k+1}\right),\quad B_k=\left(1,\frac{2}{k}\right),\quad C_k=\left(1,\frac{2}{k+1}\right),\quad D_k=\left(\frac{k}{k+2},\frac{2}{k+2}\right),$$

который ограничен прямыми $x+y=1$, $x=1$, $y=\frac{1}{k}(1+x)$ и $y=\frac{1+x}{k+1}$. При этом отрезок A_kD_k, лежащий на диагонали единичного квадрата, не включается в $\Gamma(k)$ (см. рис. 4).

Упражнение 3.4 Покажите, что площадь области $\mathcal{T}(k)$ определяется равенствами

$$|\mathcal{T}(k)| = \begin{cases} 1/6, & \text{если } k=1, \\ \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}, & \text{если } k \geq 2. \end{cases}$$

Заметим, что ординаты точек A_k и C_k совпадают. Наряду с очевидными равенствами $A_{k+1} = D_k$, $B_{k+1} = C_k$, это дает простой способ последовательного построения четырехугольников $\mathcal{T}(k)$, $k = 2, 3, 4, \ldots$ (рис. 5)

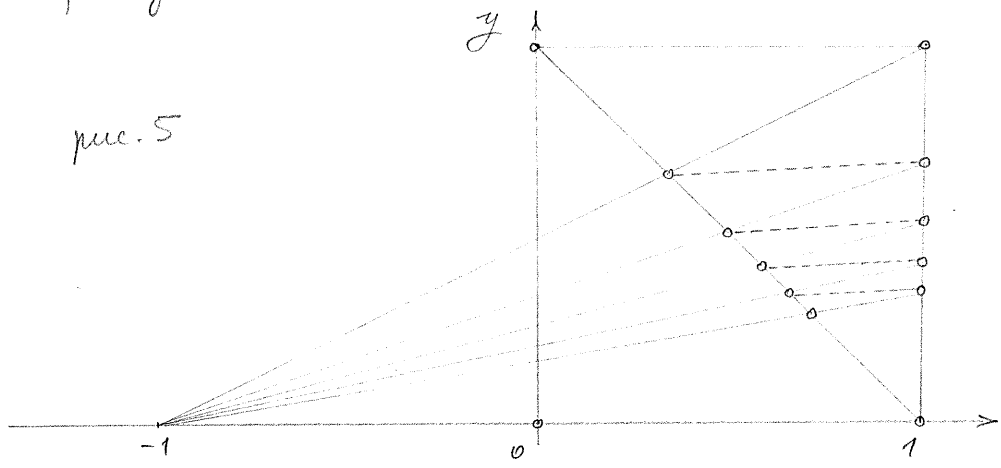


рис. 5

§ 4. Пары знаменателей и примитивные точки

Итак, если q_0, q_1 – пара соседних знаменателей в $\Phi(Q)$, отвечающих условию $\left[\frac{Q+q_0}{q_1}\right] = k$, то точка $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ лежит в области $\mathcal{T}(k)$. Следовательно, (q_0, q_1) – целая точка области $Q \cdot \mathcal{T}(k)$, которая получается из $\mathcal{T}(k)$ раздутием в Q раз.
Но из модулярного соотношения следует, что числа q_0 и q_1 взаимно просты. Следовательно, (q_0, q_1) – примитивная точка* области $Q \cdot \mathcal{T}(k)$.

* Собственно, примитивной точкой на координатной плоскости и называется точка, координаты которой – целые взаимно простые числа.

Оказывается, что между примитивными точками области $Q \cdot \mathcal{T}(k)$ и интересующими нас парами соседних знаменателей имеется взаимнооднозначное соответствие.

Действительно, пусть $(\bar{q}_0, q_1)$ — примитивная точка в $Q \cdot \Gamma(k)$. В силу упражнения к гл. $\underline{I}$, тройке Q, q_0 и q_1 отвечает единственная пара неотрицательных целых чисел a_0 и a_1 таких, что дроби $\frac{a_0}{q_0}$ и $\frac{a_1}{q_1}$ будут соседними в $\Phi(Q)$, причем $\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1}$.

Остается лишь проверить, что индекс дроби $\frac{a_1}{q_1}$ равен k. Но в силу Теоремы 1, этот индекс равен

$$\left[\frac{q_0+Q}{q_1}\right] = \left[\frac{1+q_0/Q}{q_1/Q}\right] = \left[\frac{1+x}{y}\right]$$

и совпадает с k по той причине, что точка $(x,y) = \left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ лежит в $\Gamma(k)$.

Таким образом, величина $N_k(Q)$ равна числу примитивных точек в многоугольнике $Q \cdot \Gamma(k)$. Вопрос в том, как найти это число.

§ 5. Неравенство Ярника

Рассмотрим сперва более простую задачу. Пусть Ω — выпуклая область на координатной плоскости, ограниченная кусочно-гладкой кривой с длиной $|\partial\Omega|$. Сколько целых точек лежит в области Ω?

Угадать ответ несложно. Поставим каждой целой точке в соответствие единичный квадратик целочисленной решетки, для которого эта точка является юго-западной вершиной.

Число квадратиков, целиком лежащих внутри области Ω, должно быть близко к площади $|\Omega|$, а число квадратиков, пересекающихся с границей, — к периметру $|\partial\Omega|$. Следовательно, для числа $n(\Omega)$ целых точек, попавших в Ω, естественно ожидать равенства типа

$$n(\Omega) = |\Omega| + O(|\partial\Omega| + 1)$$

(без единички не обойтись: фигура может быть сколь угодно мала как по площади, так и по периметру, но тем не менее содержать целую точку).

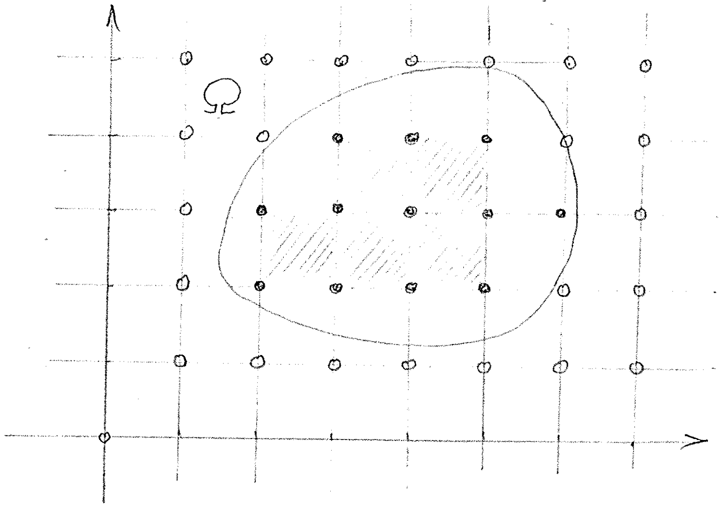


рис. 6

Этим рассуждениям можно придать строгость и вывести следующее утверждение.

Лемма 11 (Ярник*) Справедливо неравенство

$$\left| n(\Omega) - |\Omega| \right| \le 4\left(|\partial\Omega| + 1 \right).$$

* Войцех Ярник (1897 – 1970) – чешский математик, специалист по теории чисел, математическому анализу и математической физике.

Доказательство этой леммы мы не приводим, отсылая заинтересованных читателей к статье А.В. Устинова "Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами" (Математический сборник, 200 (2009), № 4, с. 131–160).

Воспользуемся леммой 10 для нахождения числа примитивных точек в той же области, которое мы обозначим через $n^*(\Omega)$. Так получим:

$$n^*(\Omega) = \sum_{\substack{(a,b)\in\Omega \\ \text{н.о.д.}(a,b)=1}} 1 = \sum_{(a,b)\in\Omega} \ \sum_{\delta \mid \text{н.о.д.}(a,b)} \mu(\delta)$$

Если δ – делитель н.о.д.(a,b), то, очевидно, δ не превосходит наименьшего из чисел $|a|, |b|$. Обозначая через Δ наибольшее возможное значение такого минимума, взятого по всем целым точкам области Ω, будем иметь:

$$n^*(\Omega) = \sum_{\delta\le\Delta} \mu(\delta) \sum_{\substack{(a,b)\in\Omega \\ a,b\equiv 0 \pmod{\delta}}} 1 = \sum_{\delta\le\Delta} \mu(\delta) \sum_{(m,n)\in\frac{1}{\delta}\Omega} 1 .$$

В силу неравенства Ярника, внутренняя сумма может быть записана в виде

$$\left|\frac{1}{\delta}\Omega\right| + 4\theta\left(\left|\partial\left(\frac{1}{\delta}\Omega\right)\right|+1\right) = \frac{|\Omega|}{\delta^2} + 4\theta\left(\frac{1}{\delta}|\partial\Omega|+1\right),$$

где θ - некоторое число с условием $-1 \le \theta \le 1$.
Следовательно,

$$n^*(\Omega) = \sum_{\delta\le\Delta} \mu(\delta)\left(\frac{|\Omega|}{\delta^2} + 4\theta\left(\frac{1}{\delta}|\partial\Omega|+1\right)\right)$$

Вклад от первого слагаемого имеет вид

$$|\Omega|\sum_{\delta\le\Delta}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2} = |\Omega|\left(\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2} - \sum_{\delta>\Delta}\frac{\mu(\delta)}{\delta^2}\right) =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}|\Omega| + \frac{2\theta_1|\Omega|}{\Delta}, \quad |\theta_1| \le 1,$$

в то время как вклад от второго не превосходит по модулю величины

$$4|\partial\Omega|\sum_{\delta\le\Delta}\frac{1}{\delta} + 4\sum_{\delta\le\Delta}1 \le 4|\partial\Omega|(\ln\Delta+1) + 4\Delta.$$

Так мы приходим к следующему утверждению.

<u>Лемма 12.</u> Пусть Ω - выпуклая конечная область на координатной плоскости, ограниченная кусочно-гладкой спрямляемой кривой $\partial\Omega$. Пусть, далее,

$$\Delta = \max_{(a,b)\in\Omega\cap\mathbb{Z}^2} \min\{|a|,|b|\} \ge 2.$$

Тогда для числа $n^*(\Omega)$ примитивных точек области Ω справедлива формула

$$n^*(\Omega) = \frac{6}{\pi^2}|\Omega| + R(\Omega),$$

в которой

$$|R(\Omega)| \le \frac{2|\Omega|}{\Delta} + 4|\partial\Omega|(\ln\Delta+1) + 4\Delta.$$

<u>Упражнение 3.5</u> Пусть α - заданное положительное число. Нарисуйте множество точек (x,y), удовлетворяющих условиям

a) $x>0,\ y>0,\ \min(x,y)=\alpha$; b) $x>0,\ y>0,\ \min(x,y)<\alpha$;

c) $x>0,\ y>0,\ \min(x,y)>\alpha$.

Упражнение 3.6. Пользуясь результатом упражнения 5, дайте геометрическую интерпретацию величины $\Delta = \Delta(\Omega) = \max\limits_{(a,b)\in\Omega\cap\mathbb{Z}^2} \min\{|a|,|b|\}$ из леммы 11.

§ 6. Решение задачи Хайнеса

Вернемся к подсчету величины $N_k(Q)$. Беря в качестве Ω область $Q\cdot T(k)$, несложно проверить, что

$$\frac{c_1 Q^2}{k^3} \le |\Omega| \le \frac{c_2 Q^2}{k^3}, \qquad c_3\frac{Q}{k} \le |\partial\Omega|$$

для некоторых абсолютных постоянных c_1 и c_2, и что

$$\Delta = \Delta(\Omega) = \begin{cases} Q, & \text{если } k=1, \\ \dfrac{2Q}{k}, & \text{если } k\ge 2. \end{cases}$$

Так лемма 11 дает:

$$N_k(Q) = n^*(\Omega) = \frac{6}{\pi^2} Q^2 |T(k)| + R_k(Q), \tag{20}$$

$$\text{где } R_k(Q) \ll \frac{Q^2}{k^3}\cdot\frac{k}{Q} + \frac{Q}{k}\left(\ln\frac{2Q}{k}+1\right) \ll \frac{Q}{k}\ln Q.$$

Пользуясь асимптотикой теоремы 1, находим:

$$\nu_k(Q) = 2|T(k)| + \underline{O}\left(\frac{\ln Q}{kQ}\right),$$

где постоянная в знаке $\underline{O}$ — абсолютная.

Так нами доказана теорема Хайнеса:

Теорема 7 При фиксированном $k\ge 1$ доля дробей ряда Фарея $\Phi(Q)$ с индексом, равным k, в общем числе дробей стремится при возрастании Q к величине

$$2|T(k)| = \begin{cases} 1/3, & \text{если } k=1 \\ \dfrac{8}{k(k+1)(k+2)}, & \text{если } k\ge 2 \end{cases}$$

Из теоремы Хайнеса, в частности, следует, что примерно в одном случае из трех индекс дроби равен единице.

Обратите внимание на то, что во всех наших выкладках зависимость от параметра k указана явно. Или, как принято говорить, все наши оценки равномерны по k.

Это означает что формула (20) правильно описывает поведение величины $N_k(Q)$ и в случае, когда k растет с увеличением Q, и притом достаточно быстро.

Поскольку главный член (20) имеет порядок $\frac{Q^2}{k^3}$, то эта формула остается асимптотической, если

$$\frac{Q}{k}\ln Q = \bar{o}\left(\frac{Q^2}{k^3}\right), \text{ т.е. если } k = \bar{o}\left(\sqrt{\frac{Q}{\ln Q}}\right).$$

Отметим, впрочем, что индекс дроби в ряду $\Phi(Q)$ может принимать и гораздо большие значения. Так, пример дробей

$$\frac{m}{2m+1} < \frac{1}{2} < \frac{m+1}{2m+1},$$

являющихся соседними в $\Phi(Q)$ при $Q = 2m+1$, показывает, что индекс может достигать значения Q.

<u>Упражнение 3.7</u> Попробуйте посчитать индексы у дробей ряда $\Phi(Q)$ с малыми знаменателями: $1/3$, $2/3$, $1/4$, $3/4$.

С некоторой долей условности можно сказать, что индекс дроби характеризует продолжительность её "жизни" в ряде Фарея. Так, у только что добавленных медиант индекс равен единице, у дроби $1/2$, возникшей еще на втором шаге, он огромен – равен Q. Если определить индексы у дробей $0/1$ и $1/1$ (как это предлагалось выше), то у них он окажется ещё больше: $2Q$ (при целом Q).
Подумайте, можно ли как-то формализовать утверждение о связи индекса дроби и её "возрасте".

§ 7. Расстояния между соседними дробями

Сведение подсчета числа дробей из ряда Фарея, обладающих заданными свойствами, к нахождению количества примитивных точек в плоских областях, помогает решить следующую задачу.

Пусть, как и выше, r_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ — упорядоченные по возрастанию дроби ряда $\Phi(Q)$, так что

$$N = N(Q) = \frac{3}{\pi^2} Q^2 + O(Q \ln Q), \quad r_1 = 0, \quad r_N = 1.$$

Пусть l_n — расстояние между $(n+1)$ и n-й дробями, т.е.

$$l_n = r_{n+1} - r_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

поделив обе части равенства

$$\sum_{n=1}^{N-1} l_n = \sum_{n=1}^{N-1} (r_{n+1} - r_n) = 1$$

на число слагаемых, несложно убедиться, что среднее значение величины l_n равно

$$\frac{1}{N-1} = \frac{\pi^2}{3Q^2}\left(1 + O\left(\frac{\ln Q}{Q}\right)\right)$$

Зададимся фиксированным (пока) положительным числом u и обозначим через $\mathcal{N}(Q; u)$ количество тех номеров n, $1 \le n < N$, для которых выполнено неравенство

$$l_n \ge \frac{\pi^2}{3Q^2} u. \tag{21}$$

Как ведет себя величина $\mathcal{N}(Q; u)$ при $Q \to +\infty$?

Попробуем перевести эту задачу на геометрический язык. Пусть $r_n = \frac{a_0}{q_0}$, $r_{n+1} = \frac{a_1}{q_1}$. Тогда

$$l_n = \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_0}{q_0} = \frac{a_1 q_0 - a_0 q_1}{q_0 q_1} = \frac{1}{q_0 q_1},$$

и неравенство (19) принимает вид

$$q_0 q_1 \le \frac{3Q^2}{\pi^2 u}.$$

Теперь самое время перейти к переменным $x = \frac{q_0}{Q}$ и $y = \frac{q_1}{Q}$, в которых наше неравенство принимает совсем простой вид:

$$xy \le \frac{3}{\pi^2 u}.$$

Поскольку установить биекцию между парами соседних знаменателей ряда $\Phi(Q)$ и примитивными точками области $Q \cdot \Gamma$ не составляет труда, наша задача свелась к подсчёту площади и периметра области $\omega(s)$, которая задаётся системой неравенств

$$0 < x, y \le 1, \quad x + y > 1, \quad xy \le s.$$

Здесь мы сделали ещё одно техническое упрощение, введя обозначение

$$s = \frac{3}{\pi^2 u}.$$

В зависимости от того, какому из трёх промежутков — $(1; +\infty)$, $(1/4; 1]$ или $(0; 1/4]$ — принадлежит s, область $\omega(s)$ будет иметь вид, изображённый на рис. 7, 8, 9

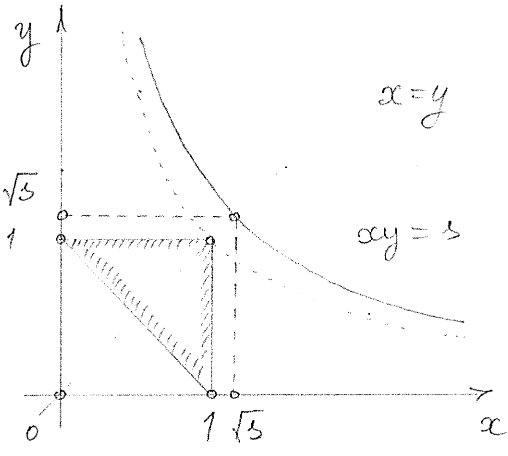


рис. 7

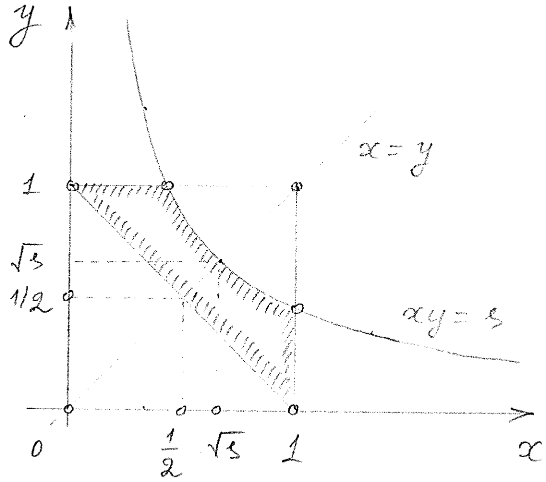


рис. 8

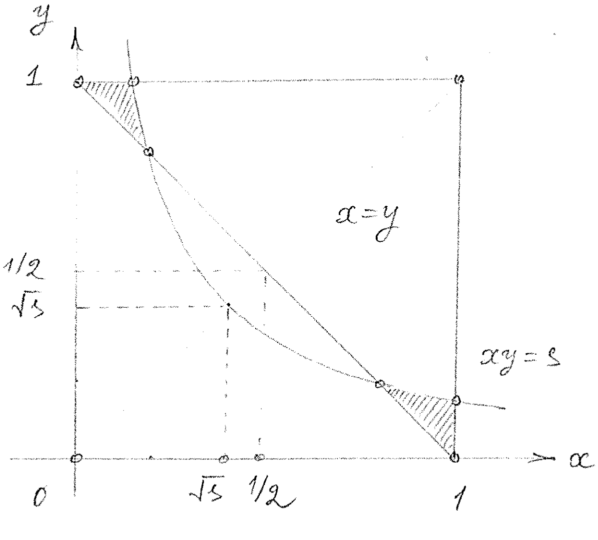


рис. 9

Аккуратный подсчёт площади $|\omega(s)|$ области $\omega(s)$ в каждом из трех случаев приводит к равенствам

$$|\omega(s)| = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } s>1, \\ s-\frac{1}{2}-s\ln s, & \text{если } \frac{1}{4}<s\le 1, \\ s-\frac{1}{2}-2s\ln\frac{1+\sqrt{1-4s}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4s}, & \text{если } 0<s\le\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Из них, в частности, следует оценка $|\omega(s)| = \underline{O}(m^2(s))$, где $m(s) = \min(1,s)$. Также несложно проверить, что периметр области $\omega(s)$ удовлетворяет соотношению $|\partial\omega(s)| = \underline{O}(m(s))$. Наконец, вспоминая геометрическую интерпретацию величины

$$\Delta = \Delta(Q\cdot\omega(s)) = \max_{(a,b)\in Q\cdot\omega(s)\cap\mathbb{Z}^2} \min\{|a|,|b|\},$$

без труда находим: $\Delta = Q\sqrt{m(s)}$.

Теперь лемма 12 даёт:

$$N(Q;u) = \frac{6}{\pi^2}Q^2|\omega(s)| + R, \quad \text{где} \tag{22}$$

$$R \ll \frac{Q^2|\omega(s)|}{\Delta} + Q|\partial\omega(s)|(\ln\Delta+1) + \Delta \ll$$

$$\ll Q m^{3/2}(s) + Q m(s)\left(\ln\left(Q\sqrt{m(s)}\right)+1\right) + Q\sqrt{m(s)} \ll$$

$$\ll Q\left(\sqrt{m(s)} + m(s)\ln\left(Q\sqrt{m(s)}\right)\right). \tag{23}$$

Если $u>0$ – фиксировано, то постоянным является и параметр s. В этом случае асимптотика (22) принимает вид

$$N(Q;u) = \frac{6}{\pi^2}Q^2|\omega(s)| + \underline{O}_s(Q\ln Q).$$

Деля обе части этого равенства на $N(Q)$, находим асимптотику для доли тех номеров n, для которых расстояние $l_n = r_{n+1}-r_n$ превосходит среднее значение не менее чем в u раз:

$$\frac{N(Q;u)}{N(Q)} = F(u) + \underline{O}_s\left(\frac{\ln Q}{Q}\right),$$

где $F(u) = 2|\omega(s)| = 2\left|\omega\left(\frac{3}{\pi^2 u}\right)\right| =$

$$= \begin{cases} 1, \text{ если } 0<u\le \frac{3}{\pi^2}, \\ \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1}{u}\ln\frac{\pi^2 u}{3}+\frac{1}{u}\right)-1, \text{ если } \frac{3}{\pi^2}<u\le\frac{12}{\pi^2}, \\ \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{u}\ln\frac{1}{2}\left\{1+\sqrt{1-\frac{12}{\pi^2 u}}\right\}\right)+\sqrt{1-\frac{12}{\pi^2 u}}-1, \\ \qquad \text{если } u>\frac{12}{\pi^2} \end{cases} \qquad (24)$$

Оценка (23) равномерна по s и позволяет исследовать поведение величины $N(Q;u)$ при u, растущих вместе с Q.

Поскольку $q_0 q_1 > 1$, достаточно ограничиться случаем $s \ge \frac{1}{Q^2}$. Если $\frac{1}{Q^2}\le s\le\frac{1}{Q^{2/3}}$, то первое слагаемое в (20), имеющее порядок $(sQ)^2 = Q\sqrt{s}\cdot(Q^{2/3}s)^{3/2}$, поглощается правой частью (23), и формула для $N(Q;u)$ не будет асимптотической: лучшее, что можно получить для таких s (или, что то же, для $\frac{3}{\pi^2}Q^{2/3}\le u\le\frac{3}{\pi^2}Q^2$ – это оценку вида

$$N(Q;u) \ll Q\sqrt{s} \ll \frac{Q}{\sqrt{u}}.$$

Если же $s\ge\frac{1}{Q^{2/3}}$, то величину $\ln(Q\sqrt{m(s)})$ в (23) можно без ущерба заменить на $\ln Q$, так что оценка величины R примет форму

$$R \ll Q\left(\sqrt{m(s)}+m(s)\ln Q\right) \ll Q\left(\frac{1}{\sqrt{n(u)}}+\frac{\ln Q}{n(u)}\right),$$

где $n(u) = \max(1,u)$.

Так мы приходим к результату, установленному впервые (в гораздо большей общности) Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску в 2001 году.

<u>Теорема 8</u>. Пусть $Q\ge Q_0$ – достаточно большое число, и пусть $0<u\le\frac{3}{\pi^2}Q^{2/3}$. Тогда для числа $M(Q;u)$ дробей τ_n ряда Фарея $\Phi(Q)$, удовлетворяющих условию $\tau_{n+1}-\tau_n \le \frac{\pi^2 u}{3Q^2}$, справедлива асимптотическая фор-

мула: $N(Q;u) = \frac{3}{\pi^2} Q^2 \left(G(u) + \underline{O}\left(\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{n(u)}} + \frac{\ln Q}{n(u)}\right)\right)\right)$,

в которой $n(u) = \max(1, u)$, $G(u) = 1 - F(u)$, а функция $F(u)$ задается равенствами (24).

Пользуясь языком теории вероятностей, функцию $G(u)$ можно назвать предельной функцией распределения длин $l_n = r_{n+1} - r_n$. Отметим характерные особенности функции $G(u)$: она непрерывна, неубывает и стремится к 1 при $u \to +\infty$. Тот факт, что $G(u) \equiv 0$ при $0 \le u \le \frac{3}{\pi^2}$, имеет простое объяснение: для любых соседних дробей $r_n = \frac{a_0}{q_0}$ и $r_{n+1} = \frac{a_1}{q_1}$ ряда $\Phi(Q)$ справедливо неравенство:

$$l_n = r_{n+1} - r_n = \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_0}{q_0} = \frac{1}{q_0 q_1} > \frac{1}{Q^2} = \frac{\pi^2}{3Q^2} \cdot \frac{3}{\pi^2}.$$

Также отметим, что производную $g(u) = G'(u)$, определенную всюду, кроме точек излома графика $G(u)$, принято называть плотностью распределения длин l_n.

Схематические графики распределения $G(u)$ и его плотности $g(u)$ приведены на рис. 10 и 11.

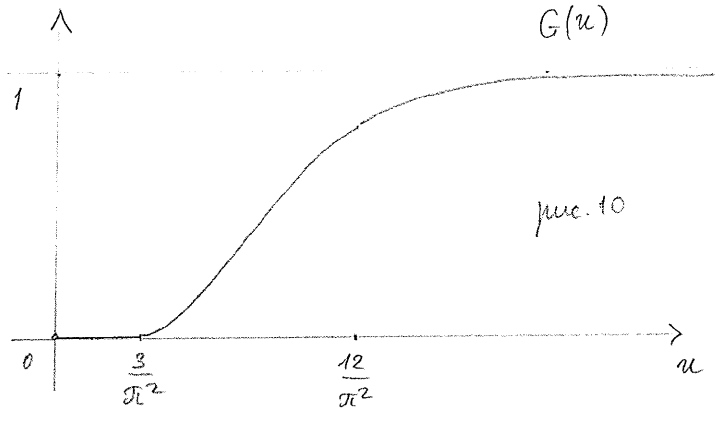


рис. 10

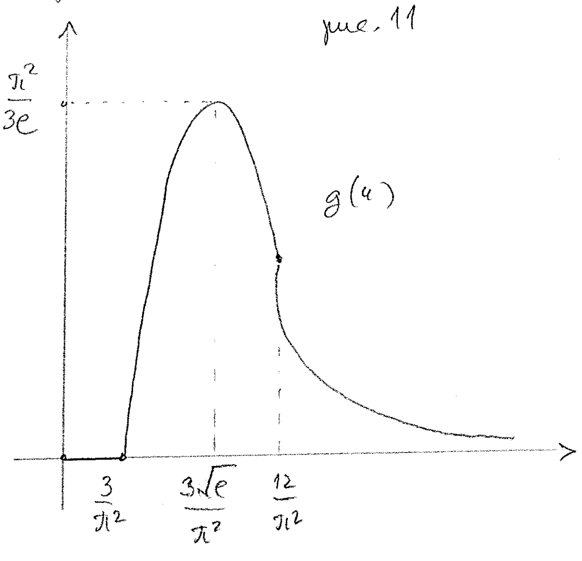


рис. 11

Можно показать, что

$$f(u) = \frac{36}{\pi^4} \cdot \frac{1}{u^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{u^4}\right) \quad \text{при } u \to +\infty,$$