Глава IV. Преобразование Фарея

§ 1. Определение преобразования Фарея

Идея сопоставления парам соседних знаменателей q_0 и q_1 точек в треугольнике Фарея сама по себе оказалась очень успешной. Но её авторы – Бока, Кобели и Захареску – существенно развили её и создали новый метод изучения дробей Фарея.

Этот метод опирается на свойства введенного ими преобразования T, переводящего Треугольник Фарея $\mathcal{T}$ в себя. В разных работах оно встречается под названиями BCZ – преобразования (по начальным буквам фамилий авторов), T-преобразования или же преобразования Фарея.

Пусть $\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}$ – соседние дроби ряда $\Phi(Q)$, и пусть k – индекс a_1/q_1. Тогда $k = \frac{q_0+q_2}{q_1}$ и, следовательно, $q_2 = kq_1 - q_0$. Поделив обе части последнего равенства на Q и заменив индекс k его выражением, которое получается из Теоремы 5, находим:

$$\frac{q_2}{Q} = k\frac{q_1}{Q} - \frac{q_0}{Q} = \left[\frac{1+q_0/Q}{q_1/Q}\right]\frac{q_1}{Q} - \frac{q_0}{Q}$$

или, короче,

$$\frac{q_2}{Q} = \left[\frac{1+x}{y}\right]y - x, \text{ где } x = \frac{q_0}{Q},\ y = \frac{q_1}{Q}. \qquad (25)$$

Формула (25) естественным образом приводит нас к следующему определению.

<u>Определение 5</u> Преобразованием Фарея назовем преобразование T, которое сопоставляет всякой точке (x,y) Треугольника $\mathcal{T}$ точку с координатами (x_1,y_1),

где $x_1 = y$, $y_1 = \left[\frac{1+x}{y}\right]y - x$.

Например, $T(\frac{1}{2},1) = (1,\frac{1}{2})$, $T(\frac{1}{3},\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4},\frac{5}{12})$, $T(x,x) = (x,x)$ для всякого x, $\frac{1}{2} < x \le 1$.

§ 2. Биективность и другие свойства.

Установим несколько простейших свойств преобразования Фарея.

Лемма 13 Преобразование Фарея переводит треугольник $\mathcal{T}$ в себя.

Док-во Пусть (x,y) – произвольная точка $\mathcal{T}$, так что $0 < x, y \le 1$ и $x+y > 1$. Достаточно проверить, что $0 < y_1 \le 1$ и $x_1+y_1 > 1$.

Действительно,

$$y_1 \le \left(\frac{1+x}{y}\right)y - x = 1, \quad y_1 > \left(\frac{1+x}{y} - 1\right)y - x = 1-y \ge 0 \text{ и,}$$

наконец, $x_1+y_1 = y\left(\left[\frac{1+x}{y}\right]+1\right) - x > y\left(\frac{1+x}{y}\right) - x = 1.$ □.

В действительности же преобразование $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ является биекцией. Доказательство этого утверждения мы проведем в два шага.

Лемма 14 Преобразование $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ инъективно.

Док-во. Пусть для двух точек $A = (x_A; y_A)$ и $B = (x_B, y_B)$ треугольника Фарея оказалось: $T(A) = T(B)$. Тогда необходимо

$$y_A = y_B = y,$$

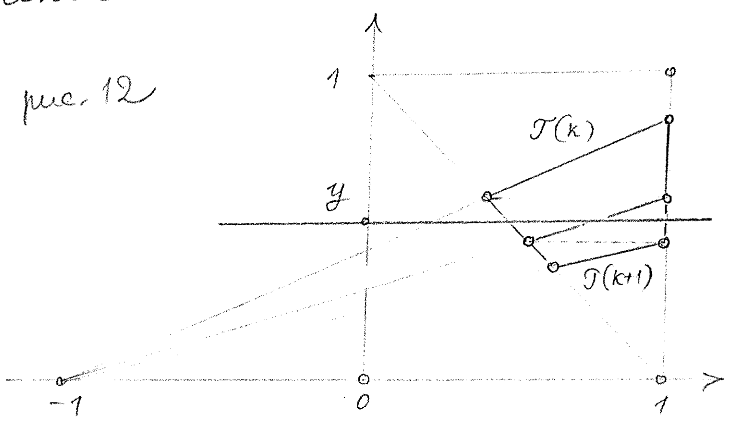
где $0 < y \le 1$, пусть первая из точек лежит в области $\mathcal{T}(k_1)$, а вторая – в области $\mathcal{T}(k_2)$, так что

$$T(A) = (y_A, k_1 y_A - x_A) = (y, k_1 y - x_A),$$
$$T(B) = (y_B, k_2 y_B - x_B) = (y, k_2 y - x_B).$$

Если $k_1 = k_2$, то, $x_A = x_B$, и исходные точки совпадают.

Пусть, для определенности, $k_2 > k_1$. Тогда необходимо $y < 1$. Из рис. 5 и 12 несложно усмотреть тогда, что горизонтальная прямая, проведенная на высоте y, пересечет ровно две из областей $\mathcal{T}(m)$, и притом соседние, скажем, $\mathcal{T}(k)$ и $\mathcal{T}(k+1)$.

рис. 12



Следовательно, $k_1 = k$, $k_2 = k+1$. Но тогда

$$k_1 y - x_A = ky - x_A = k_2 y - x_B = (k+1)y - x_B,$$

откуда

$$x_B - x_A = y. \qquad (26)$$

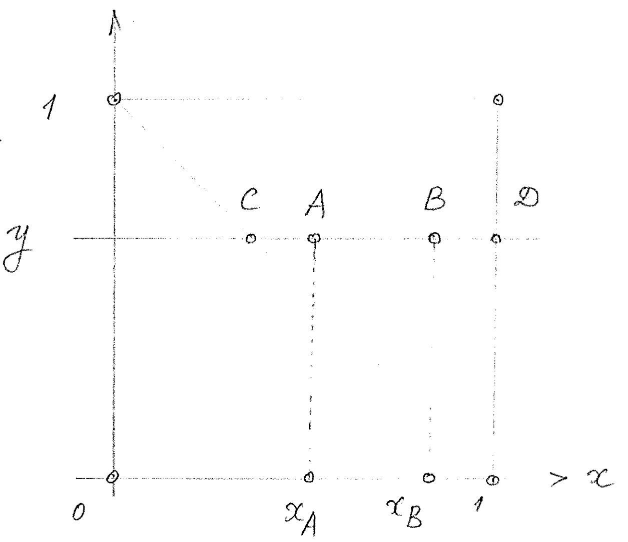


рис. 13

Но $x_B - x_A$ — длина отрезка AB на рис. 13, а y — длина отрезка CD. Таким образом, равенство (24) возможно лишь в случае, когда точка A совпадает с C, а точка B совпадает с D. Но A не может лежать на диагонали единичного квадрата в силу неравенства $x_A + y_A > 1$. Поэтому в случае $k_1 \neq k_2$ равенство $T(A) = T(B)$ невозможно. □

Остается проверить, что у всякой точки в Γ есть прообраз. Мы сделаем это, проследив за тем, что происходит с каждой из областей $\Gamma(k)$ под действием преобразования Фарея.

Для этой цели обозначим через S симметрию относительно прямой $y = x$, а через $\Gamma^\circ(k)$ — внутренность области $\Gamma(k)$. Таким образом, $\Gamma(1)$ получается из $\Gamma^\circ(1)$ добавлением всех точек отрезка AB с концами $A = (0,1)$ и $B = (1,1)$, за исключением точки A. При $k \geq 2$ область $\Gamma(k)$ получим, добавив к $\Gamma^\circ(k)$ все точки отрезков AB, BC, за исключением точек A и C (рис. 14, 15)

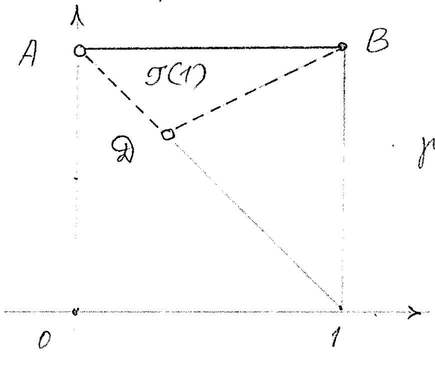


рис. 14

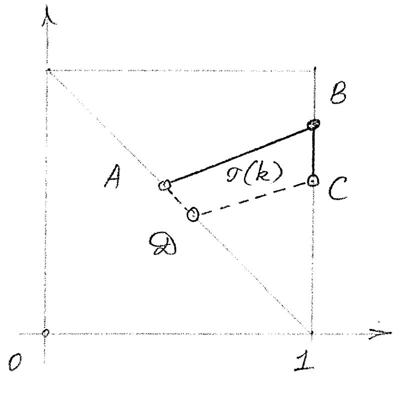


рис. 15

Лемма 15. Образ $\Gamma^0(k)$ при преобразовании Фарея совпадает с образом $\Gamma^0(k)$ при симметрии S. Соответствие границ области $\Gamma(k)$ и её образа показано на рис. 16, 17.*

Замечание. Хотя $T(\Gamma^0(k)) = S(\Gamma^0(k))$, при любом k, но при этом $T \neq S$.

Док-во. Зададимся произвольным $k \geq 2$ и достаточно малым ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(k)$. Выберем точки A_ε, B_ε, C_ε и D_ε так, чтобы они лежали внутри $\Gamma(k)$ (т.е. принадлежали $\Gamma^0(k)$), и были бы близки точкам

$$A = \left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{2}{k+1}\right), \quad B = \left(1, \frac{2}{k}\right), \quad C = \left(1, \frac{2}{k+1}\right) \text{ и } D = \left(\frac{k}{k+2}, \frac{2}{k+2}\right)$$

соответственно (см. рис. 18).

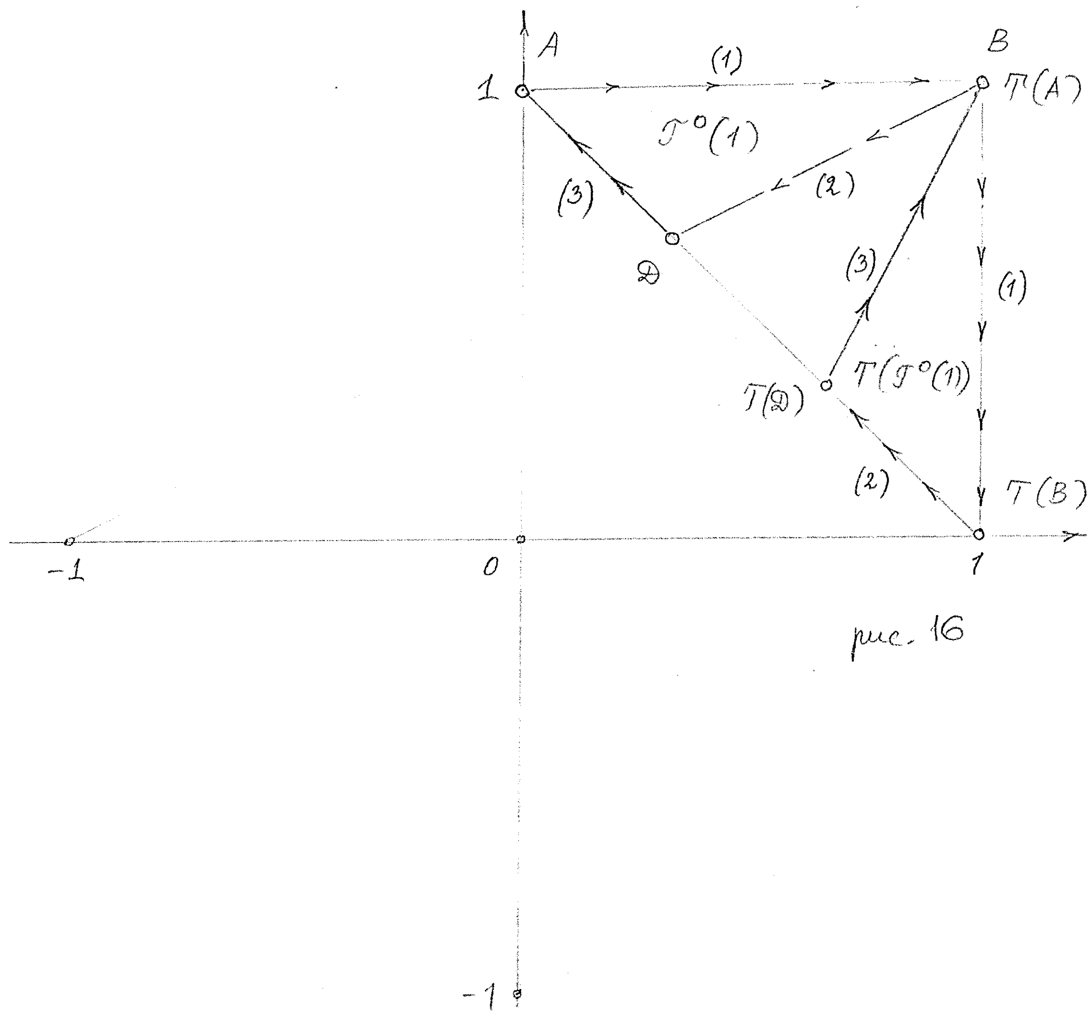
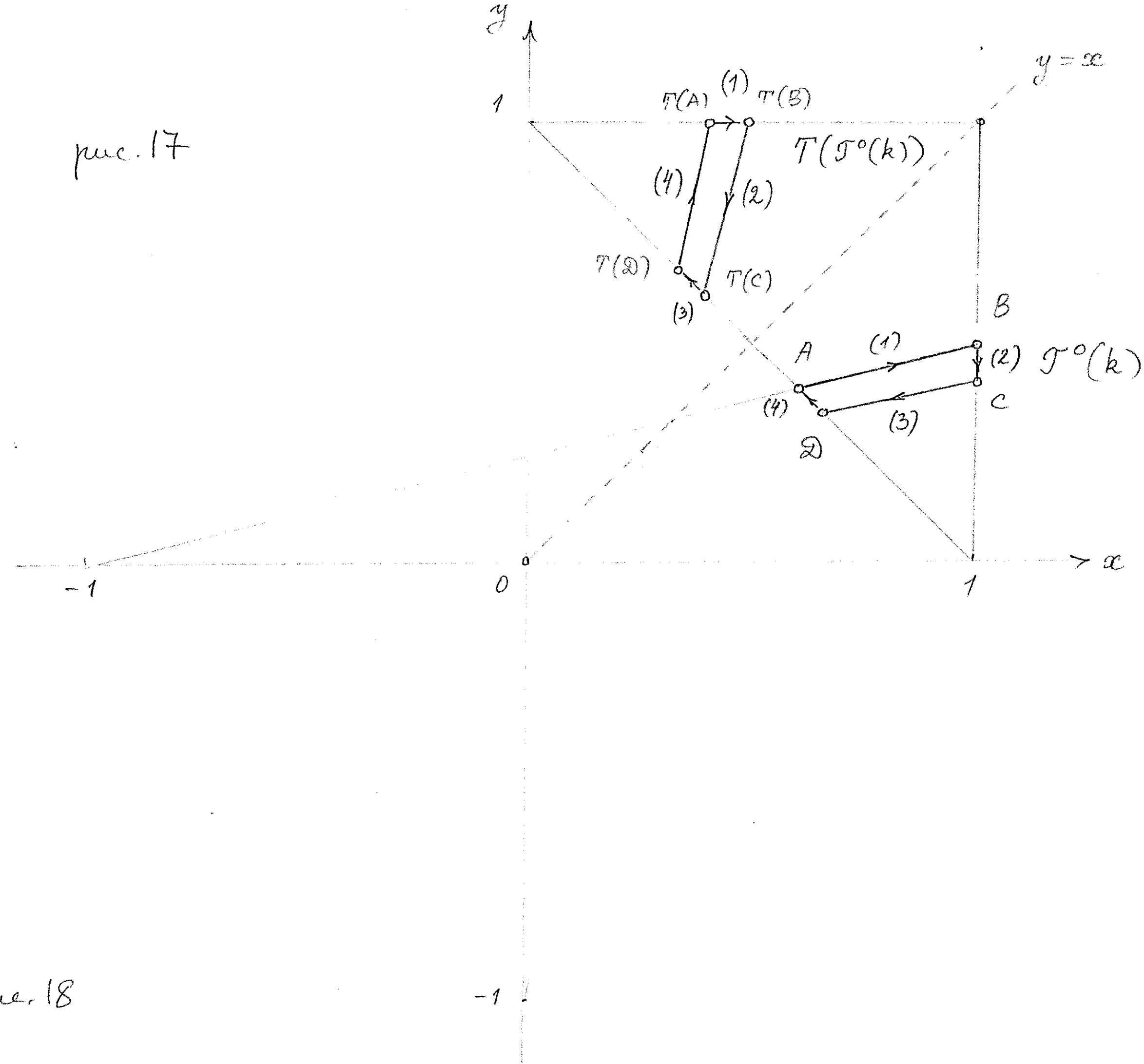


рис. 16

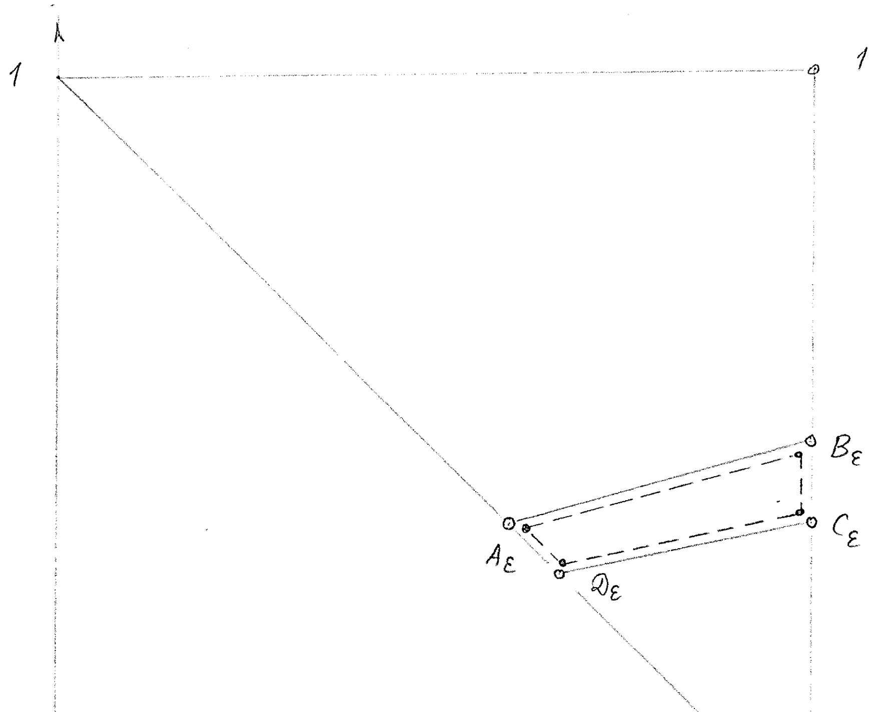
* Для большей наглядности в обозначениях на рис. 16, 17 мы допускаем некоторую вольность, применяя обозначения $T(A)$, $T(D)$: для точек, лежащих на диагонали $x+y=1$, преобразование T не определено. Как будет ясно из доказательства, под $T(A)$ и $T(D)$ понимаются предельные положения образов точек, стремящихся к A и D изнутри области $\Gamma(k)$.

рис. 17



y
y = x
1
T(A)
(1)
T(B)
$T(\mathcal{T}^\circ(k))$
(4)
(2)
T(D)
T(C)
(3)
B
A
(1)
(2)
$\mathcal{T}^\circ(k)$
C
(4)
(3)
D
-1
0
1
x
-1

рис. 18



1
1
B_ε
C_ε
A_ε
D_ε
0
1

Беря, скажем,

$$A_\varepsilon = \left(\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon,\ \frac{2}{k+1}\right),\quad B_\varepsilon = \left(1-\varepsilon,\ \frac{2}{k}-\varepsilon\right),\quad C_\varepsilon = \left(1-\varepsilon,\ \frac{2}{k+1}\right) \text{ и}$$

$$D_\varepsilon = \left(\frac{k}{k+2},\ \frac{2}{k+2}+\varepsilon\right),$$

после несложных вычислений находим:

$$T(A_\varepsilon) = \left(\frac{2}{k+1},\ 1-\varepsilon\right),\quad T(B_\varepsilon) = \left(\frac{2}{k}-\varepsilon,\ 1-(k-1)\varepsilon\right),$$

$$T(C_\varepsilon) = \left(\frac{2}{k+1},\ \frac{k-1}{k+1}+\varepsilon\right),\quad T(D_\varepsilon) = \left(\frac{2}{k+2}+\varepsilon,\ \frac{k}{k+2}\right).$$

Устремляя ε к нулю, заключаем:

$$T(A_\varepsilon) \to S(C),\quad T(B_\varepsilon) \to S(B),\quad T(C_\varepsilon) \to S(A),$$

$$T(D_\varepsilon) \to S(D).$$

Отсюда и следует искомое утверждение. Случай $k=1$ разбирается аналогично. $\square$.

Заметим теперь, что для всякой точки (x,y), принадлежащей внутренности $\Gamma^\circ(k)$ области $\Gamma(k)$, выполнено соотношение:

$$T(x,y) = (y,\ ky-x).$$

Иными словами, на $\Gamma^\circ(k)$ преобразование Фарея линейно. Более того, его якобиан, т.е. определитель

$$\det\left(\frac{\partial T}{\partial(x,y)}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial(ky-x)}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial(ky-x)}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k\end{vmatrix}$$

равен единице. Следовательно, преобразование $T_k : \Gamma^\circ(k) \to S(\Gamma^\circ(k))$ является непрерывным, биективным и сохраняет площади.

Далее, между граничными точками $\Gamma(k)$, входящими в $\Gamma(k)$, и граничными точками образа $\Gamma(k)$ также устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Так, в случае $k=1$ образом всякой точки $(x,1)$, $0<x<1$, лежащей на горизонтальной стороне $\Gamma(1)$, будет точка $(1, 1-x)$ на вертикальной стороне $S\,\Gamma(1)$ (точка $(1,1)$ при этом, очевидно, переходит в себя).

В случае $k \geq 2$ образом точки $\left(x, \frac{1+x}{k}\right)$, $\frac{k-1}{k+1} < x \leq 1$, пробегающей отрезок AB (с выколотой точкой A) будет точка $\left(\frac{1+x}{k}, 1\right)$, которая пробегает отрезок $T(A)T(B)$ (с выколотой точкой $T(A) = \left(\frac{2}{k+1}, 1\right)$) (см. рис. 17). Аналогично, образом точки $(1, y)$, $\frac{2}{k+1} < y \leq \frac{2}{k}$, пробегающей отрезок BC с выколотой точкой C, является точка с координатами $(y, ky-1)$. Она пробегает отрезок $T(B)T(C)$ с выколотой точкой $T(C) = \left(\frac{2}{k+1}, \frac{k-1}{k+1}\right)$.

Учитывая все сделанные замечания вместе с утверждениями лемм 14 и 15, приходим к следующей теореме.

Теорема 9 Преобразование Фарея $T: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ является биективным, не являясь непрерывным, оно сохраняет площади.

На рисунках 19 и 20 изображены треугольник τ с вершинами $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right)$, $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{9}\right)$ и $C = \left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$, и его образ под действием преобразования T. Поскольку ΔABC имеет непустое пересечение с каждой из областей $\mathcal{T}(k)$, $1 \leq k \leq 4$, его образ представляет собой объединение четырех непересекающихся областей τ_k, $1 \leq k \leq 4$.
Непосредственное вычисление показывает, что площади фигур τ_k равны, соответственно,

$$\frac{7}{825}, \quad \frac{343}{11\,000}, \quad \frac{5831}{893\,000} \quad \text{и} \quad \frac{21}{44\,650}.$$

Сумма этих чисел, равная $\frac{7}{150}$, совпадает с площадью ΔABC.

§ 3. И снова индексы

Преобразование T - действенный инструмент для исследования дробей Фарея. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим следующую задачу.

Зафиксируем произвольные целые числа $k_1, k_2 \geq 1$, и зададимся достаточно большим $Q \geq Q_0(k_1, k_2)$. Сколько встретится в ряду $\Phi(Q)$ пар соседних дробей $\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2}$ таких, что индекс первой дроби равен k_1, а второй - k_2? Или, что то же, какова доля таких пар в общем числе пар соседних дробей?

Добавим к искомой паре соседа слева, т.е. рассмотрим тройку последовательных дробей вида

$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} \qquad (27)$$

поскольку индексы a_1/q_1 и a_2/q_2 равны, соответственно, k_1 и k_2, в силу теоремы 5 имеем равенства:

$$k_1 = \left[\frac{Q+q_0}{q_1}\right], \quad k_2 = \left[\frac{Q+q_1}{q_2}\right].$$

Посмотрим теперь, во что перейдет точка $(x,y) = \left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ под действием T. Имеем:

$$T(x,y) = \left(y, \left[\frac{1+x}{y}\right]y - x\right) = (y, k_1 y - x) =$$

$$= \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{k_1 q_1 - q_0}{Q}\right).$$

но знаменатель последней дроби - не что иное, как q_2. Следовательно,

$$T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right). \qquad (28)$$

Иными словами, преобразование T позволяет сдвигаться на один шаг (а значит, и на любое количество шагов) вправо вдоль последовательности знаменателей.

Именно этот замечательный факт лег в основу метода Бока, Кобели и Захареску.
В силу сделанных выше предположений, точка $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ принадлежит области $\Gamma(k_1)$, а точка

$$\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right) = T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$$ — области $\Gamma(k_2)$.

Согласно теореме 8, $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ - единственный прообраз точки $\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right)$. Но тогда точка

$$\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = T^{-1}\left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right)$$

обязано принадлежать и области $T^{-1}\Gamma(k_2)$.
Следовательно, точка $\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right)$ принадлежит

пересечению $\Gamma(k_1) \cap T^{-1}\Gamma(k_2)$. Вводя для него особое обозначение $\Gamma(k_1, k_2)$, заключаем, что (q_0, q_1) — примитивная точка области $Q \cdot \Gamma(k_1, k_2)$.

Несложные рассуждения, подобные приведенным выше, при доказательстве теоремы Хайнеса, показывают, что между примитивными точками $Q\Gamma(k_1, k_2)$ и парами (q_0, q_1) соседних знаменателей, отвечающих интересующим нас тройкам (27), имеется взаимно-однозначное соответствие.

Все, что осталось - это применить формулу леммы 11 для числа примитивных точек. В свою очередь, для этого необходимо оценить величину
$$\Delta = \Delta(\Omega) = \max_{(a,b)\in\Omega\cap\mathbb{Z}^2} \min(|a|, |b|)$$, Однако внимательный читатель наверняка обратил внимание на то, что фактически в формуле теоремы роль Δ может играть любая верхняя оценка - Δ^* величины

$$\max_{(a,b)\in\Omega\cap\mathbb{Z}^2} \text{Н.О.Д.}(|a|, |b|).$$

С одной стороны, $\Omega \subseteq \mathcal{T}(k_1)$, так что н.о.д. (a,b) для всякой точки области не превосходит $2Q/k_1$. С другой стороны, $T\Omega = T\mathcal{T}(k_1) \cap \mathcal{T}(k_2) \subseteq \mathcal{T}(k_2)$, так что точка $QT\left(\frac{a}{Q},\frac{b}{Q}\right) = (a_1, b_1)$, где $a_1 = b$, $b_1 = k_1 b - a$, лежит в $\mathcal{T}(k_2)$, лежит в области $Q\mathcal{T}(k_2)$. Но наибольшие общие делители пар чисел a, b и a_1, b_1 совпадают. Следовательно, н.о.д. $(a_1, b_1) \le \frac{2Q}{k_2}$. Итак, на роль Δ^* подходит любая из величин $\frac{2Q}{k_1}$, $\frac{2Q}{k_2}$. Полагая $\Delta^* = \frac{2Q}{k}$, где k – любое из чисел k_1, k_2, и применяя лемму 1, приходим к следующей формуле для числа $N_{k_1,k_2}(Q)$ искомых пар:

$$N_{k_1,k_2}(Q) = \frac{6}{\pi^2} Q^2 |\mathcal{T}(k_1,k_2)| + R_{k_1,k_2}(Q), \tag{29}$$

где

$$R_{k_1,k_2}(Q) \ll \frac{Q}{k} \ln Q$$

При оценке $R_{k_1,k_2}(Q)$ мы воспользовались неравенствами

$$|\mathcal{T}(k_1,k_2)| \le |\mathcal{T}(k_1)|, \quad |\mathcal{T}(k_1,k_2)| \le |\mathcal{T}(k_2)|,$$

из которых последнее вытекает из утверждения теоремы 8 о сохранении площадей.

Разделив обе части (29) на $N(Q) - 2$ и вновь применяя Теорему 1, получаем следующее утверждение.

<u>Теорема 10</u> Пусть $k_1, k_2 \ge 1$ – произвольные натуральные числа. Тогда при неограниченном возрастании Q для доли $\nu_{k_1,k_2}(Q)$ пар последовательных дробей a_1/q_1, a_2/q_2 ряда Фарея $\Phi(Q)$ $(a_1/q_1 < a_2/q_2)$, с индексами k_1 и k_2, в общем числе пар, справедлива формула

$$\nu_{k_1,k_2}(Q) = 2\,|\mathcal{T}(k_1,k_2)| + O\left(\frac{\ln Q}{kQ}\right),$$

в которой $|\mathcal{T}(k_1,k_2)|$ – площадь области

$$\mathcal{T}(k_1,k_2) = \mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2),$$

постоянная в знаке O – абсолютная, а в качестве k в последнем слагаемом можно взять любую из величин k_1, k_2.

Из теоремы 10, в частности, следует, что при любых фиксированных k_1 и k_2 доля $\nu_{k_1,k_2}(Q)$ при $Q \to +\infty$ стремится к величине $\nu_{k_1,k_2} = 2|T(k_1,k_2)|$. Таблица значений предельных долей при небольших k_1 и k_2 приведена ниже.

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1/30	4/105	1/35	2/105	1/84
2	1/30	1/10	1/35	1/210	0	0
3	4/105	1/35	0	0	0	0
4	1/35	1/210	0	0	0	0
5	2/105	0	0	0	0	0
6	1/84	0	0	0	0	0

§4. Немного о вычислениях

При взгляде на последнюю табличку читатель вправе задать вопрос: как, собственно, были получены эти значения? Чтобы пояснить это, вновь рассмотрим тройку (27) соседних дробей и положим для краткости

$$x = \frac{q_0}{Q}, \quad y = x_1 = \frac{q_1}{Q}, \quad y_1 = \frac{q_2}{Q}.$$

Как было установлено ранее, условие принадлежности точки (x,y) области $T(k_1)$ имеет вид

$$k_1 y \leq 1 + x < (k_1+1)y. \qquad (30)$$

Аналогично, условие принадлежности точки (x_1,y_1) области $T(k_2)$ имеет вид

$$k_2 y \leq 1 + x_1 < (k_2+1)y. \qquad (31)$$

Однако

$$(x_1,y_1) = T(x,y) = (y, k_1 y - x).$$

Заменяя в (31) величины x_1, y_1 на y и $k_1 y - x$ соответственно, после несложных преобразований придём к неравенствам

$$\frac{(k_2+1)x+1}{k_1(k_2+1)-1} < y \leq \frac{k_2 x + 1}{k_1 k_2 + 1}. \qquad (32)$$

Из (30), (32) и условий принадлежности точки (x,y) треугольнику Фарея получаем следующее описание области $\Gamma(k_1,k_2)$ в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ 1-x < y \le 1, \\ \dfrac{x+1}{k_1+1} < y \le \dfrac{x+1}{k_1}, \\ \dfrac{(k_2+1)x+1}{k_1(k_2+1)-1} < y \le \dfrac{k_2x+1}{k_1k_2-1} \end{cases} \qquad (33)$$

или, короче,

$$\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ F(x) < y \le G(x), \end{cases}$$

где
$$F(x) = \max\left\{1-x,\ \frac{x+1}{k_1+1},\ \frac{(k_2+1)x+1}{k_1(k_2+1)-1}\right\},$$
$$G(x) = \min\left\{1,\ \frac{x+1}{k_1},\ \frac{k_2x+1}{k_1k_2-1}\right\}.$$

Вот, собственно, и всё: счёт по этим формулам приводит к значениям, помещенным в таблицу. Впрочем, не лишним будет отметить важное следствие полученного результата. Решение системы линейных неравенств (33) есть пересечение конечного (не более 8) числа полуплоскостей. Поэтому множество $\Gamma(k_1,k_2)$ либо пусто, либо образует выпуклый многоугольник.