Глава V. Дальнейшие обобщения. Решенные и нерешенные задачи.

§1. Кортежи дробей Фарея

Рассмотрим задачу о соседних дробях Фарея, имеющих предписанные индексы, во всей её общности. Пусть $r \geqslant 1$ – фиксированное целое число, и пусть $\overline{k}$ – набор из r фиксированных натуральных чисел: $\overline{k} = (k_1, \dots, k_r)$.

Обозначим через $N_{\overline{k}}(Q)$ количество кортежей из r последовательных дробей ряда $\Phi(Q)$ вида

$$\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \dots < \frac{a_r}{q_r}, \tag{34}$$

таких, что индекс s-й дроби равен k_s для всех s, $1 \leq s \leq r$.

Добавляя к кортежу ближайшую слева к $\frac{a_1}{q_1}$ дробь $\frac{a_0}{q_0}$ и многократно применяя равенство (28), получим:

$$T\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_1}{Q}, \frac{q_2}{Q}\right);$$

$$T^2\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_2}{Q}, \frac{q_3}{Q}\right);$$

$$\dots$$

$$T^{(r-1)}\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = \left(\frac{q_{r-1}}{Q}, \frac{q_r}{Q}\right).$$

Дале, из теоремы 5 при каждом $s = 1, 2, \dots, r$ выводим равенства

$$k_s = \left[\frac{Q + q_{s-1}}{q_s}\right] = \left[\frac{1 + q_{s-1}/Q}{q_s/Q}\right],$$

из которых следует, что точка $\left(\frac{q_{s-1}}{Q}, \frac{q_s}{Q}\right)$ принадлежит области $\mathcal{T}(k_s)$.

Наконец, пользуясь тем, что преобразование Фарея биективно, заключаем:

$$\left(\frac{q_0}{Q}, \frac{q_1}{Q}\right) = T^{-(s-1)}\left(\frac{q_{s-1}}{Q}, \frac{q_s}{Q}\right) \in T^{-(s-1)}\mathcal{T}(k_s).$$

Следовательно, (q_0, q_1) – примитивная точка области $Q\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$, где символом $\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ обозначается пересечение

$$\mathcal{T}(k_1) \cap T^{-1}\mathcal{T}(k_2) \cap T^{-2}\mathcal{T}(k_3) \cap \dots \cap T^{-(r-1)}\mathcal{T}(k_r). \tag{35}$$

Несложные рассуждения (попробуйте провести их самостоятельно) показывают, что соответствие между примитивными точками области $Q\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)$ и парами (q_0, q_1) соседних знаменателей ряда $\Phi(Q)$, порождающих кортеж (34) с искомыми свойствами, является взаимнооднозначным.

Применяя к подсчету примитивных точек в области $Q\,T(k_1,\dots,k_r)$ лемму 12 и оценивая величину Δ подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 10, получим следующую формулу для числа $N_{\bar{k}}(Q)$ интересующих нас кортежей:

$$N_{\bar{k}}(Q) = \frac{6}{\pi^2} Q^2 \,|T(k_1,\dots,k_r)| + \underline{O}\left(\frac{Q}{k}\ln Q\right), \tag{36}$$

где постоянная в знаке $\underline{O}$ – абсолютная, а в качестве k можно брать любое из чисел $k_1,\dots,k_r$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 11. Пусть $r \geq 1$, $k_1,\dots,k_r \geq 1$ – произвольные натуральные числа, $\bar{k} = (k_1,\dots,k_r)$. Тогда при неограниченном возрастании Q для доли $\nu_{\bar{k}}(Q)$ кортежей (34) из r последовательных дробей ряда $\Phi(Q)$ с индексами $k_1, k_2, \dots, k_r$, в общем числе таких кортежей, справедлива формула

$$\nu_{\bar{k}}(Q) = 2\,|T(k_1,\dots,k_r)| + \underline{O}\left(\frac{1}{Qk}\left(\ln Q + \frac{r}{k^2 Q} + \frac{r\ln Q}{Q^2}\right)\right),$$

в которой $|T(k_1,\dots,k_r)|$ – площадь области (35), постоянная в знаке O – абсолютная, а в качестве k в $\underline{O}$-члене можно взять любую из величин $k_1,\dots,k_r$.

Док-во. Положим для краткости $\sigma = |T(k_1,\dots,k_r)|$.

Поскольку

$$T^{s-1}\sigma = T^{(s-1)}T(k_1) \cap T^{(s-2)}T(k_2) \cap \dots \cap T\,T(k_{s-1}) \cap T(k_s) \cap$$
$$\cap\, T^{-1}T(k_{s+1}) \cap \dots \cap T^{(s-r)}T(k_r) \subseteq T(k_s)$$

при любом s, то из теоремы 8 заключаем:

$$|\sigma| = |T^{s-1}\sigma| \leq |T(k_s)| \ll \frac{1}{k_s^3}.$$

Следовательно, $|\sigma| \ll 1/k^3$, где в качестве k выбрано то же из чисел k_s, что и в (36).

Деля обе части (36) на величину $N(Q) - r$ – общее число кортежей из $(r+1)$ последовательных дробей $\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \dots < \frac{a_r}{q_r}$, получим:

$$\nu_k(Q) = \frac{\frac{6}{\pi^2}Q^2\sigma + \underline{O}\left(\frac{Q}{k}\ln Q\right)}{\frac{3}{\pi^2}Q^2 + \underline{O}(Q\ln Q) - r} = \frac{2\sigma + \underline{O}\left(\frac{\ln Q}{kQ}\right)}{1 + \underline{O}\left(\frac{\ln Q}{Q}\right) + \underline{O}\left(\frac{r}{Q^2}\right)} =$$

$$= \left(2\sigma + \underline{O}\left(\frac{\ln Q}{kQ}\right)\right)\left(1 + \underline{O}\left(\frac{\ln Q}{Q}\right) + \underline{O}\left(\frac{r}{Q^2}\right)\right) = 2\sigma + e_{\bar{k}}(Q),$$

где слагаемое $\bar{e}_k(Q)$ допускает следующие оценки:

$$e_{\bar{k}}(Q) \ll \frac{\sigma\ln Q}{Q} + \frac{\sigma r}{Q^2} + \frac{\ln Q}{kQ} + \frac{\ln^2 Q}{kQ^2} + \frac{r\ln Q}{kQ^3} \ll$$

$$\ll \frac{\ln Q}{k^3 Q} + \frac{r}{k^3 Q^2} + \frac{\ln Q}{kQ} + \frac{r\ln Q}{kQ^3} \ll \frac{\ln Q}{kQ} + \frac{r}{k^3 Q^2} + \frac{r\ln Q}{kQ^3}$$

$$\ll \frac{1}{Qk}\left(\ln Q + \frac{r}{k^2 Q} + \frac{r\ln Q}{Q^2}\right). \quad \square$$

§ 2. Области $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$ и континуанты

Каждая из областей $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$ описывается системой линейных неравенств, подобной (33). Действительно, пусть (x,y) – произвольная точка $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$. Тогда имеют место включения

$$(x,y) \in \mathcal{T}(k_1)$$
$$T(x,y) \in \mathcal{T}(k_2)$$
$$T^2(x,y) \in \mathcal{T}(k_3)$$
$$\dots\dots$$
$$T^{r-1}(x,y) \in \mathcal{T}(k_r),$$

положив $x_0 = x,\ y_0 = y$ и определяя x_s, y_s при $1 \le s \le r-1$ из равенств

$$(x_s, y_s) = T^s(x_0, y_0),$$

будем иметь:

$$(x_{s-1}, y_{s-1}) \in \mathcal{T}(k_s), \quad \left[\frac{1+x_{s-1}}{y_{s-1}}\right] = k_s.$$

Кроме того,

$$(x_s, y_s) = T\circ T^{s-1}(x_0,y_0) = T(x_{s-1}, y_{s-1}) = (y_{s-1},\ k_s y_{s-1} - x_{s-1}),$$

откуда $\begin{cases} x_s = y_{s-1} \\ y_s = k_s y_{s-1} - x_{s-1} \end{cases}$ при всех s, $s = 1, 2, \dots, r-1$.

Из этих рекуррентных соотношений, в частности, следует, что

$$x_{s+1} = k_s x_s - x_{s-1}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, r-1. \qquad (37)$$

Последовательное вычисление по формулам (37) дает:

$$x_2 = k_1 x_1 - x_0,$$

$$x_3 = k_2 x_2 - x_1 = k_2(k_1 x_1 - x_0) - x_1 = (k_2 k_1 - 1) x_1 - k_2 x_0,$$

$$x_4 = k_3 x_3 - x_2 = k_3\left((k_2 k_1 - 1) x_1 - k_2 x_0\right) - (k_1 x_1 - x_0) =$$

$$= (k_1 k_2 k_3 - k_1 - k_3) x_1 - (k_2 k_3 - 1) x_0.$$

Можно подметить и общую закономерность: выражение для x_{s+1} является линейной формой от величин x_0 и x_1, коэффициентами которой будут некоторые полиномы от $k_1, \ldots, k_s$, линейные по каждой из переменных. При этом коэффициент при x_0 в выражении для x_{s+1} получается из коэффициента при x_1 выражения для x_s увеличением на единичку всех индексов у k_i.

Это наблюдение дает повод ввести новые обозначения с помощью равенств

$$x_{s+1} = \mathbb{K}_s(k_1, \ldots, k_s)\, x_1 - \mathbb{K}_{s-1}(k_2, \ldots, k_s)\, x_0, \qquad (38)$$

так что, например,

$$\mathbb{K}_0 \equiv 1,$$

$$\mathbb{K}_1(X_1) = X_1,$$

$$\mathbb{K}_2(X_1, X_2) = X_1 X_2 - 1, \qquad (39)$$

$$\mathbb{K}_3(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3 - X_1 - X_3,$$

$$\mathbb{K}_4(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 X_2 X_3 X_4 - X_1 X_4 - X_3 X_4 - X_1 X_2 + 1 \quad \text{и т.д.}$$

Из (37) и (38) несложно вывести и рекуррентное соотношение для полиномов $\mathbb{K}_s$, $s \geq 2$:

$$\mathbb{K}_s(X_1, \ldots, X_s) = X_s\, \mathbb{K}_{s-1}(X_1, \ldots, X_{s-1}) - \mathbb{K}_{s-2}(X_1, \ldots, X_{s-2}),^{*} \qquad (40)$$

* Если положить по определению $\mathbb{K}_{-1} \equiv 0$, то рекуррентная формула будет верна и при $s = 1$.

Так построенные многочлены $\mathbb{K}_s$ мы будем называть обобщенными континуантами — с тем, чтобы отличать их от "просто" континуантов. Последние определяются с помощью рекуррентного соотношения, похожего на (38'), в правой части которого перед $\mathbb{K}_{s-1}$ стоит знак "плюс". Континуанты играют важную роль в теории непрерывных дробей.

Возвращаясь к переменным x_s, y_s, будем иметь:

$$\begin{cases} x_s = \mathbb{K}_{s-1}(k_1,\dots,k_{s-1})\,x_1 - \mathbb{K}_{s-2}(k_2,\dots,k_{s-1})\,x_0, \\ y_s = x_{s+1} = \mathbb{K}_s(k_1,\dots,k_s)\,x_1 - \mathbb{K}_{s-1}(k_2,\dots,k_s)\,x_0 \end{cases} \tag{41}$$

§3. Неравенства, задающие область $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$

Теперь у нас есть все для того, чтобы написать систему неравенств, определяющих область $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$. В самом деле, введённые в §2 переменные x_s, y_s удовлетворяют равенству

$$\left[\frac{1+x_s}{y_s}\right] = k_{s+1}$$

или, что то же, неравенствам

$$k_{s+1} \le \frac{1+x_s}{y_s} < k_{s+1}+1.$$

Перепишем их в виде системы

$$\begin{cases} k_{s+1}\,y_s \le 1+x_s \\ (k_{s+1}+1)\,y_s > 1+x_s, \end{cases} \tag{42}$$

и преобразуем её с помощью формул (41). Так первое из неравенств последовательно принимает вид

$$k_{s+1}\left(\mathbb{K}_s(k_1,\dots,k_s)\,x_1 - \mathbb{K}_{s-1}(k_2,\dots,k_s)\,x_0\right) \le$$
$$\le 1 + \mathbb{K}_{s-1}(k_1,\dots,k_{s-1})\,x_1 - \mathbb{K}_{s-2}(k_2,\dots,k_{s-1})\,x_0,$$

$$x_1\left(k_{s+1}\mathbb{K}_s(k_1,\dots,k_s) - \mathbb{K}_{s-1}(k_1,\dots,k_{s-1})\right) \le$$
$$\le x_0\left(k_{s+1}\mathbb{K}_{s-1}(k_2,\dots,k_s) - \mathbb{K}_{s-2}(k_2,\dots,k_{s-1})\right)+1$$

Заменяя x_1 на y, а x_0 — на x, и применяя рекуррентные соотношения (40), запишем последнее неравенство в виде

$$y \le g_{s+1}(x; k_1, \dots, k_{s+1}),$$

где $g_{s+1}(x; k_1, \dots, k_{s+1}) = \dfrac{1 + x\,\mathbb{K}_s(k_2, \dots, k_{s+1})}{\mathbb{K}_{s+1}(k_1, \dots, k_{s+1})}$.

Подобным образом второе неравенство системы (42) приводится к виду

$$x_1\left(\left(k_{s+1}+1\right)\mathbb{K}_s(k_1, \dots, k_s) - \mathbb{K}_{s-1}(k_1, \dots, k_{s-1})\right) >$$

$$> 1 + x_0\left(\left(k_{s+1}+1\right)\mathbb{K}_{s-1}(k_2, \dots, k_s) - \mathbb{K}_{s-2}(k_2, \dots, k_{s-1})\right),$$ так что

$$f_{s+1}(x; k_1, \dots, k_{s+1}) < y,$$

где

$$f_{s+1}(x; k_1, \dots, k_{s+1}) = \frac{1 + x\,\mathbb{K}_s(k_2, \dots, k_s, k_{s+1}+1)}{\mathbb{K}_{s+1}(k_1, \dots, k_{s+1}+1)}$$

Вводя функции $f_0(x) = 1 - x$, $g_0(x) \equiv 1$, заключаем, что $\Gamma(k_1, \dots, k_r)$ есть множество всех точек плоскости, координаты (x, y) которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ f_s(x; k_1, \dots, k_s) < y \le g_s(x; k_1, \dots, k_s), \\ \quad s = 0, 1, \dots, r, \end{cases}$$

или, что то же, системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ F_r(x; \bar{k}) < y \le G_r(x; \bar{k}), \end{cases} \tag{43}$$

где $\bar{k} = (k_1, \dots, k_r)$,

$$F_r(x; \bar{k}) = \max_{1 \le s \le r} f(x; k_1, \dots, k_r), \tag{44}$$

$$G_r(x; \bar{k}) = \min_{1 \le s \le r} g(x; k_1, \dots, k_r).$$

Положив функцию $H_r(x; \bar{k})$ равной разности $G_r(x; \bar{k}) - F_r(x; \bar{k})$, если она положительна, и нулю в противном случае, будем иметь:

$$|\Gamma(k_1, \dots, k_r)| = \int_0^1 H_r(x; \bar{k})\, dx.$$

Эта формула (вместе с соотношениями (43) и (44)) вполне пригодна для вычисления площадей областей $\Gamma(k_1, \dots, k_r)$ на компьютере.

Упражнение 5.1 5. Выпишите систему неравенств, задающую многоугольник $\mathcal{T}(1,2,3)$, и определите координаты его вершин и площадь

Решение. Явный вид функций f_1, f_2, g_1 и g_2 был получен в § 4.4, полагая $k_1=1$, $k_2=2$ в формулах (33), будем иметь:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x+1), \quad g_1(x) = x+1;$$

$$f_2(x) = \frac{3x+1}{2}, \quad g_2(x) = 2x+1.$$

Далее,

$$f_3(x) = \frac{1+\mathbb{K}_2(2,4)x}{\mathbb{K}_3(1,2,4)}, \quad g_3(x) = \frac{1+\mathbb{K}_2(2,3)x}{\mathbb{K}_3(1,2,3)}.$$

пользуясь рекуррентными формулами (37), находим:

$$\mathbb{K}_2(2,4) = 2\cdot 4-1 = 7,$$

$$\mathbb{K}_3(1,2,4) = 4\,\mathbb{K}_2(1,2) - \mathbb{K}_1(1) = 4\cdot 1-1 = 3$$

$$\mathbb{K}_2(2,3) = 5,$$

$$\mathbb{K}_3(1,2,3) = 3\,\mathbb{K}_2(1,2) - \mathbb{K}_1(1) = 2,$$

так что

$$f_3(x) = \frac{7x+1}{3}, \quad g_3(x) = \frac{5x+1}{2},$$

и искомая система принимает вид

$$\begin{cases} 0 < x \le 1, \\ 1-x < y \le 1, \\ \frac{1}{2}(x+1) < y \le x+1, \\ \frac{1}{2}(3x+1) < y \le 2x+1, \\ \frac{1}{3}(7x+1) < y \le \frac{1}{2}(5x+1). \end{cases}$$

Решая ее, получим:

$$\begin{cases} 1-x < y \le \frac{1}{2}(1+5x), & \text{если } \frac{1}{7} < x \le \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{3}(1+7x) < y \le 1, & \text{если } \frac{1}{5} < x < \frac{2}{7} \end{cases}$$

Следовательно, $\mathcal{T}(1,2,3)$ – четырехугольник с вершинами $\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right)$, $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$, $\left(\frac{2}{7}, 1\right)$ и $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Для нахождения площади можно воспользоваться формулой Гаусса: если (a_s, b_s), $s=1,2,\dots,n$ – координаты последовательных вершин выпуклого n-угольника, то его площадь (с точностью до знака) равна сумме определителей

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix} a_s & b_s \\ a_{s+1} & b_{s+1} \end{vmatrix}, \text{ где } a_{n+1} = a_0,\ b_{n+1} = b_0.$$

подставляя в нее координаты вершин, находим:
$|\sigma(1,2,3)| = 1/70$.

Важным следствием полученных формул является тот факт, что всякая непустая область $\Gamma(k_1,\dots,k_r)$ есть выпуклый многоугольник, площадь которого — рациональное число.

§4. Несколько слов о континуантах

Посмотрим ещё раз на выражения (39) для континуант. Несложно усмотреть следующую закономерность (первым её подметил ещё Леонард Эйлер — правда, не для обобщенных, а для обыкновенных континуант): слагаемые, входящие в $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}_n(X_1,\dots,X_n)$, последовательно получим, если из произведения $X_1\dots X_n$ вычеркнем одновременно чётное число (т.е. 0, 2, 4, 6,...) пар соседних сомножителей*. При этом слагаемые, которые получились вычеркиванием $2k$ сомножителей, войдут в выражение для $\mathbb{K}_n$ с коэффициентом $(-1)^k$.

* Доказательство правила Эйлера читатель может найти в книге: Г. Дэвенпорт, Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. М., Наука, 1965 (гл. IV, §3).

Так, не проводя промежуточных вычислений континуант меньшего порядка, с помощью правила Эйлера легко выписать выражения для $\mathbb{K}_5$ и $\mathbb{K}_6$:

$$\mathbb{K}_5 = X_1X_2X_3X_4X_5 - X_1X_2X_3 - X_1X_2X_5 - X_1X_4X_5 - X_3X_4X_5 + X_1 + X_3 + X_5,$$

$$\mathbb{K}_6 = X_1X_2X_3X_4X_5X_6 - X_1X_2X_3X_4 - X_1X_2X_3X_6 - X_1X_2X_5X_6 - X_1X_4X_5X_6 - X_3X_4X_5X_6 + X_1X_2 + X_3X_4 + X_5X_6 + X_1X_6 + X_1X_4 + X_3X_6 - 1.$$

Упражнение 5.2 Проверьте, что $\mathbb{K}_n(X_1,\dots,X_n)$ совпадает с определителем матрицы $n\times n$, у которой на главной диагонали находятся $X_1,\dots,X_n$, под ней и над ней стоят числа (-1), а все прочие элементы равны нулю, например:

$$\mathbb{K}_2(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & -1 \\ -1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad \mathbb{K}_3(x_1,x_2,x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 \\ 0 & -1 & x_3 \end{vmatrix} \text{ и т.д.}$$

поскольку при отражении матрицы относительно побочной диагонали её определитель не меняется, следствием предыдущего упражнения является равенство

$$\mathbb{K}_n(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{K}_n(x_n,\dots,x_1). \tag{45}$$

Соотношение (45) можно вывести и другим способом. Он основан на следующем утверждении.

<u>Теорема 12</u> При любых значениях n и s, $n \geq 2$, $1 \leq s \leq n-1$, справедливо тождество

$$\mathbb{K}_n(x_1,\dots,x_n) = \mathbb{K}_{n-s}(x_1,\dots,x_{n-s})\,\mathbb{K}_s(x_n,\dots,x_{n-s+1}) -$$

$$- \mathbb{K}_{n-s-1}(x_1,\dots,x_{n-s-1})\,\mathbb{K}_{s-1}(x_n,\dots,x_{n-s+2}). \tag{46}$$

<u>Док-во</u>. В случае $s=1$ тождество (46) превращается в рекуррентное соотношение (40) и, таким образом, справедливо. Предположим теперь, что тождество (46) выполняется при некотором s, $1 \leq s \leq n-2$, и покажем, что оно остаётся верным при переходе от s к $(s+1)$. Заменяя множитель $\mathbb{K}_{n-s}(x_1,\dots,x_{n-s})$ разностью

$$x_{n-s}\,\mathbb{K}_{n-s-1}(x_1,\dots,x_{n-s-1}) - \mathbb{K}_{n-s-2}(x_1,\dots,x_{n-s-2})$$

и приводя подобные слагаемые, получим:

$$\mathbb{K}_n(x_1,\dots,x_n) = \Big(x_{n-s}\,\mathbb{K}_{n-s-1}(x_1,\dots,x_{n-s-1}) - \mathbb{K}_{n-s-2}(x_1,\dots,x_{n-s-2})\Big)$$

$$\times\, \mathbb{K}_s(x_n,\dots,x_{n-s+1}) - \mathbb{K}_{n-s-1}(x_1,\dots,x_{n-s-1})\,\mathbb{K}_{s-1}(x_1,\dots,x_{n-s+2})$$

$$= \Big(x_{n-s}\,\mathbb{K}_s(x_n,\dots,x_{n-s+1}) - \mathbb{K}_{s-1}(x_n,\dots,x_{n-s+2})\Big) \times$$

$$\times\, \mathbb{K}_{n-s-1}(x_1,\dots,x_{n-s-1}) - \mathbb{K}_{n-s-2}(x_1,\dots,x_{n-s-2})\,\mathbb{K}_s(x_n,\dots,x_{n-s+1})$$

Но выражение в скобках совпадает с $\mathbb{K}_{s+1}(x_n,\dots,x_{n-s})$. Отсюда следует искомое утверждение. $\square$

Чтобы вывести равенство (43) из тождества теоремы 11, достаточно положить $s = n-1$ и ещё раз воспользоваться рекуррентной формулой (38):

$$\mathbb{K}_n(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{K}_1(X_1)\,\mathbb{K}_{n-1}(X_n, \ldots, X_2) -$$
$$- \mathbb{K}_0 \cdot \mathbb{K}_{n-2}(X_n, \ldots, X_3) = \mathbb{K}_n(X_n, \ldots, X_1).$$

Отметим, что тождеству (44) можно придать следующий вид:

$$\mathbb{K}_{n+m}(X_1, \ldots, X_{n+m}) = \begin{vmatrix} \mathbb{K}_n(X_1, \ldots, X_n) & \mathbb{K}_{m-1}(X_{n+m}, \ldots, X_{n+2}) \\ \mathbb{K}_{n-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}) & \mathbb{K}_m(X_{n+m}, \ldots, X_{n+1}) \end{vmatrix} \quad (47).$$

Определим многочлен $U_n(x)$ равенством

$$U_n(x) = \mathbb{K}_n(2x, 2x, \ldots, 2x),$$

так что

$$U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1, \quad U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$
$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1, \quad U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x \text{ и т.д.}$$

Такие многочлены хорошо известны: это многочлены Чебышёва второго рода*. Они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$U_{n+1}(x) = 2x\,U_n(x) - U_{n-1}(x)$$

с начальными условиями $U_0(x) \equiv 1$, $U_1(x) = 2x$ (ср. с формулой (40)), но их можно определять и с помощью формулы

$$U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

* Многочлены $U_n(x)$ впервые появились в мемуаре П. Л. Чебышёва, под названием „Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций" (1859). С простейшими свойствами этих многочленов можно познакомиться в статье Н. Васильева и А. Зелевинского „Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения" (Квант, 1982, № 1, с. 12–19).

Заменяя в формуле (47) все переменные X_i на $2x$, приходим к следующему замечательному соотношению:

$$U_{n+m}(x) = \begin{vmatrix} U_n(x) & U_{m-1}(x) \\ U_{n-1}(x) & U_m(x) \end{vmatrix} = U_n(x)\,U_m(x) - U_{n-1}(x)\,U_{m-1}(x).$$

Как мы помним, числители и знаменатели соседних дробей Фарея удовлетворяют модулярному соотношению. Удивительно, но подобным свойством обладают и континуанты.

Теорема 13. Для любого $n \geq 1$ справедливо тождество

$$\mathbb{K}_n(X_1,\dots,X_n)\,\mathbb{K}_n(X_2,\dots,X_{n+1}) -$$

$$- \mathbb{K}_{n-1}(X_2,\dots,X_n)\,\mathbb{K}_{n+1}(X_1,\dots,X_{n+1}) = 1. \qquad (48)$$

Док-во. В случае $n=1$ равенство (46) принимает вид

$$X_1 X_2 - \mathbb{K}_2(X_1, X_2) = 1$$

и, очевидно, верно. Если равенство доказано для всех n, $1 \leq n \leq m-1$, то для $n=m$ его справедливость установим, если заменим сомножители $\mathbb{K}_n(X_2,\dots,X_{n+1})$, $\mathbb{K}_{n+1}(X_1,\dots,X_{n+1})$ с помощью рекуррентного соотношения (38), приведем подобные слагаемые и воспользуемся индукционным предположением. □

§ 5. Симметрия областей $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$

Если мы внимательно посмотрим на таблицу значений величин $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ из § 3 гл. IV, то увидим, что она симметрична относительно диагонали. Иными словами, для всех $1 \leq k_1,k_2 \leq 6$ площади фигур $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ и $\mathcal{T}(k_2,k_1)$ одинаковы. В частности, области $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ и $\mathcal{T}(k_2,k_1)$ одновременно пусты или непусты.

В действительности верен гораздо более общий факт.

Теорема 14. Для любого набора натуральных чисел $k_1,\dots,k_r$ области $\mathcal{T}(k_1,\dots,k_r)$ и $\mathcal{T}(k_r,\dots,k_1)$ имеют одинаковую площадь.

Этот факт совсем просто доказать, опираясь на Теорему 11, которая устанавливает связь величины $|\Gamma(k_1,\dots,k_r)|$ с предельной долей кортежей (34) из дробей, имеющих заданные индексы $k_1,\dots,k_r$. Нужно лишь заметить, что если (34) — искомый кортеж, то кортеж вида

$$1-\frac{a_r}{q_r} < 1-\frac{a_{r-1}}{q_{r-1}} < \dots < 1-\frac{a_1}{q_1} \tag{49}$$

будет состоять из последовательных дробей того же ряда $\Phi(Q)$, но их индексы будут следовать в обратном порядке: $k_r, k_{r-1},\dots,k_1$. Таким образом, между кортежами (34) и (49) имеется взаимно-однозначное соответствие.

С другой стороны, предельные доли таких кортежей равны, соответственно, $|\Gamma(k_1,\dots,k_r)|$ и $|\Gamma(k_r,\dots,k_1)|$.

Но можно предложить иное обоснование равенства этих площадей, не использующее связи с дробями Фарея.

Док-во теоремы 14. Пусть (x_0,y_0) — точка области $\omega=\Gamma(k_1,\dots,k_r)$. Определяя величины x_s, y_s, как в §2, соотношениями $(x_s,y_s)=T^s(x_0,y_0)$, $s=1,2,\dots,r$, будем иметь: $x_s=y_{s-1}$, $y_s=k_s y_{s-1}-x_{s-1}$, так что

$$x_{s+1}=k_s x_s - x_{s-1} \tag{50}$$

для каждого $s=1,2,\dots,r$.

Далее, в §3 мы нашли, что ω состоит из всех точек (x_0,y_0) треугольника Фарея, для которых определенные таким образом величины x_s, y_s при любом s удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} k_s y_{s-1} \le 1+x_{s-1}, \\ 1+x_{s-1} < (k_s+1) y_{s-1}. \end{cases}$$

Заменяя y_{s-1} на x_s, перепишем их в виде

$$\begin{cases} k_s x_s - x_{s-1} \le 1, \\ 1-x_s < k_s x_s - x_{s-1}. \end{cases}$$

но в силу (50) последняя система принимает совсем простой вид: $1-x_s < x_{s+1} \le 1$, $s=1,2,\dots,r$.

Добавляя к этим неравенствам условия принадлежности точки (x_0, y_0) к треугольнику Фарея, заключаем, что область ω — не что иное как множество таких точек $(x_0, y_0) = (x_0, x_1)$, что построенная по каждой из них с помощью формулы (50) последовательность значений x_s удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 0 < x_0 \le 1, \\ 1 - x_0 < x_1 \le 1, \\ 1 - x_1 < x_2 \le 1, \\ \dots \\ 1 - x_{r-1} < x_r \le 1, \\ 1 - x_r < x_{r+1} \le 1, \end{cases} \qquad (51)$$

Так получаем равенство

$$|\mathcal{T}(k_1, \dots, k_r)| = \iint\limits_{(x_0, x_1) \in \omega} dx_0\, dx_1 = \iint\limits_{(x_0, x_1)\ \text{удовл.}\ (48), (49)} dx_0\, dx_1 . \qquad (52)$$

Перейдём теперь в интеграле (52) к новым переменным Y_0 и Y_1, полагая $Y_0 = x_{r+1}$, $Y_1 = x_r$. Выражая x_{r+1} и x_r через x_0 и x_1 с помощью формул (41), получим:

$$\begin{cases} Y_0 = x_{r+1} = -\mathbb{K}_{r-1}(k_2, \dots, k_r)\, x_0 + \mathbb{K}_r(k_1, \dots, k_r)\, x_1, \\ Y_1 = x_r = -\mathbb{K}_{r-2}(k_2, \dots, k_{r-1})\, x_0 + \mathbb{K}_{r-1}(k_1, \dots, k_{r-1})\, x_1 . \end{cases}$$

В силу теоремы 13, якобиан J такой замены равен (-1).
Далее, введём вспомогательные обозначения

$$Y_2 = x_{r-1}, \; Y_3 = x_{r-2}, \; \dots, \; Y_r = x_1, \; Y_{r+1} = x_0 .$$

Тогда равенства (51) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 1 - Y_{r-1} < Y_r \le 1, \\ 1 - Y_r < Y_{r-1} \le 1, \\ 1 - Y_{r-2} < Y_{r-2} \le 1, \\ \dots \\ 1 - Y_2 < Y_1 \le 1, \\ 1 - Y_1 < Y_0 \le 1, \end{cases} \text{ или, что то же, } \begin{cases} 1 - Y_0 < Y_1 \le 1, \\ 1 - Y_1 < Y_2 \le 1, \\ 1 - Y_2 < Y_3 \le 1, \\ \dots \\ 1 - Y_{r-1} < Y_r \le 1, \\ 1 - Y_r < Y_{r+1} \le 1 . \end{cases} \qquad (53)$$

а формулу (50) — в виде

$$Y_{s+1} = k_{r-s+1} Y_s - Y_{s-1}, \qquad (54)$$

где $s = 1, 2, \dots, r$.

Но из проведенных выше рассуждений следует, что соотношения (53) и (54) определяют область $\mathcal{T}(k_r, \dots, k_1)$.

Следовательно,

$$|T(k_r,\dots,k_1)| = \iint\limits_{(Y_0,Y_1)\ \text{удовл.}\ (51),(52)} dY_0\, dY_1 .$$

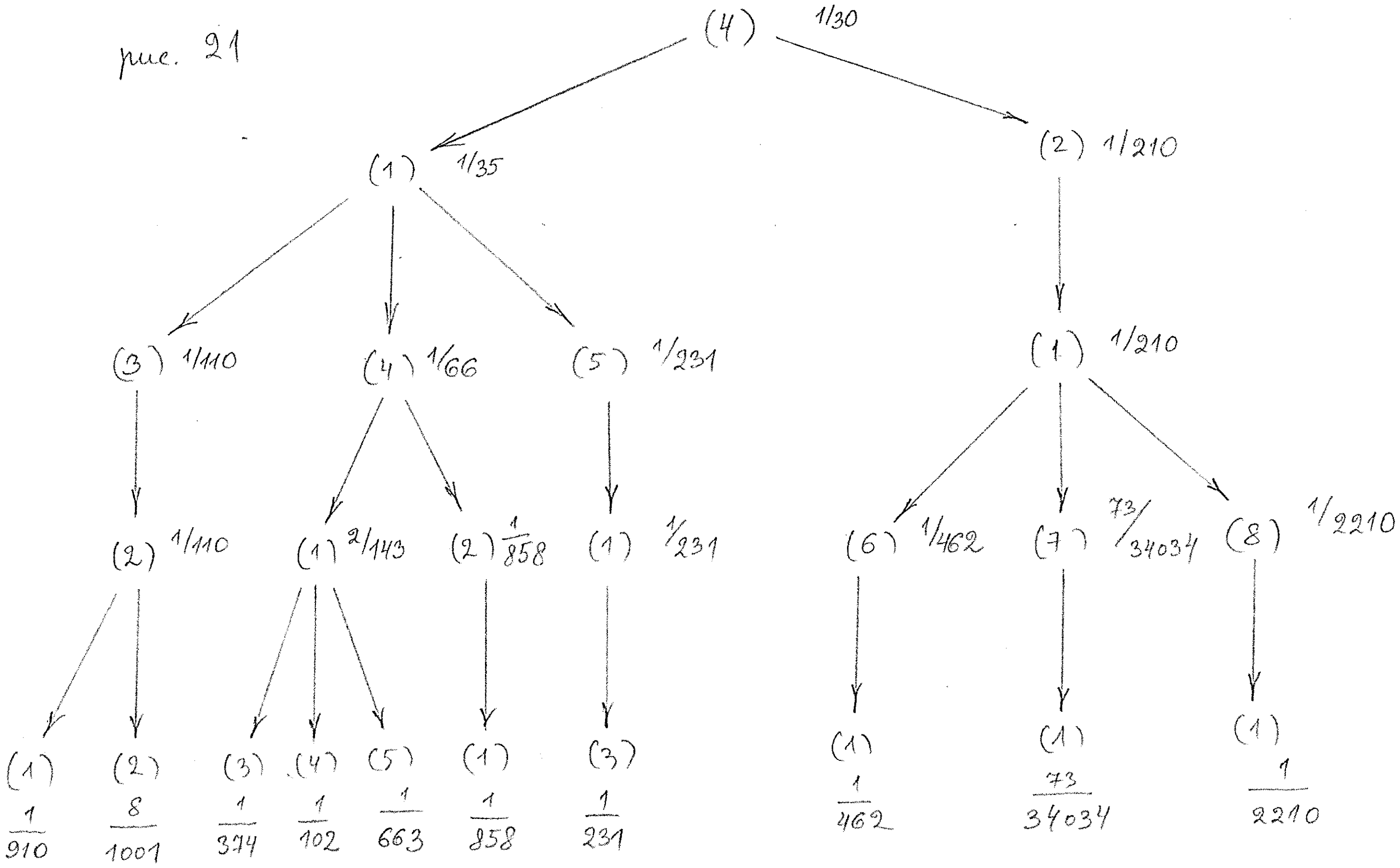
В то же время по формуле замены переменных в кратном интеграле,

$$|T(k_1,\dots,k_r)| = \iint\limits_{(Y_0,Y_1)\ \text{удовл.}\ (51),(52)} |J|\, dY_0\, dY_1 = \iint\limits_{(Y_0,Y_1)\ \text{удовл.}\ (51),(52)} dY_0\, dY_1 =$$

$$= |T(k_r,\dots,k_1)| .$$

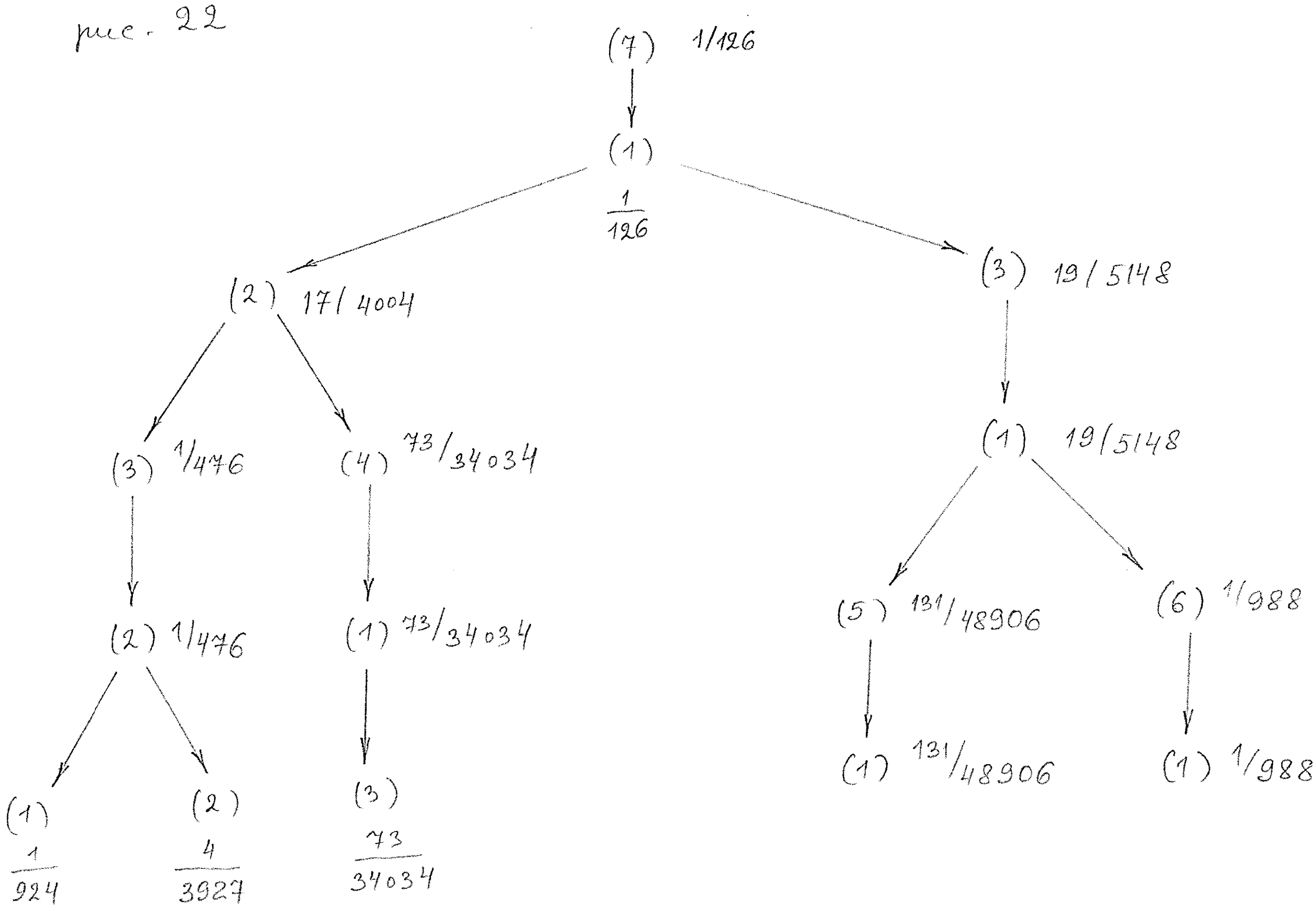
Теорема доказана. □.

рис. 21



(4) 1/30
(1) 1/35
(2) 1/210
(3) 1/110
(4) 1/66
(5) 1/231
(1) 1/210
(2) 1/110
(1) 2/143
(2) 1/858
(1) 1/231
(6) 1/462
(7) 73/34034
(8) 1/2210
(1) 1/910
(2) 8/1001
(3) 1/374
(4) 1/102
(5) 1/663
(1) 1/858
(3) 1/231
(1) 1/462
(1) 73/34034
(1) 1/2210

рис. 22



(7) 1/126
(1) 1/126
(2) 17/4004
(3) 19/5148
(3) 1/476
(4) 73/34034
(1) 19/5148
(2) 1/476
(1) 73/34034
(5) 131/48906
(6) 1/988
(1) 1/924
(2) 4/3927
(3) 73/34034
(1) 131/48906
(1) 1/988

§ 6. Поговорим о генеалогии

Итог удачных генеалогических изысканий — родословная, которая зачастую оформляется в виде семейного древа. Если в корневую вершину такого древа помещается самый ранний из известных предков, то ветви, исходящие из этой вершины, ведут к его детям, от детей — ко внукам, от тех — к правнукам и так далее. Дизайн семейного древа — дело вкуса. Автору этих строк более предпочтителен вариант, когда корень изображается вверху, а его потомки, расставленные по "этажам" — поколениям, — внизу; чем дальше от общего предка, тем ниже этаж.

Подобные деревья возникают и при изучении областей $\Gamma(k_1,\ldots,k_r)$. Будем говорить, что набор $(k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})$ — потомок набора $(k_1,\ldots,k_r)$, если обе области $\Gamma(k_1,\ldots,k_r)$, $\Gamma(k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})$ непусты.*

* Разумеется, из непустоты $\Gamma(k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})$ следует непустота $\Gamma(k_1,\ldots,k_r)$.

На рис. 21 и 22 представлены несколько первых поколений потомков наборов $(k_1)=(4)$ и $(k_1)=(7)$. Для краткости две вершины, отвечающие наборам $(k_1,\ldots,k_r)$ и $(k_1,\ldots,k_r,k_{r+1})$ и соединенные ребром, изображаются в виде $(k_r)\to(k_{r+1})$. Рядом с вершиной, отвечающей набору $(k_1,\ldots,k_r)$, указана площадь области $\Gamma(k_1,\ldots,k_r)$.

Некоторые задачи, связанные с арифметическими свойствами дробей Фарея, естественным образом приводят к изучению различных поддеревьев "основного" древа, в корне которого находится треугольник Фарея Γ, а на первом этаже — счетное множество его "детей" — областей $\Gamma(k)$, $k=1,2,3,\ldots$. Ответ в таких задачах представляет собой, как правило, сумму площадей фигур, которые отвечают вершинам того или иного поддерева.

§ 7. Дроби Фарея с нечетными знаменателями

Вот пример одной из таких задач. Зафиксируем произвольное $k \geq 1$ и рассмотрим ряд $\Phi_{2,1}(Q)$, полученный удалением из ряда Фарея $\Phi(Q)$ всех дробей с четными знаменателями. Пусть он имеет вид

$$\frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \ldots < \frac{a_M}{q_M}, \tag{55}$$

где $M = 1 + \sum\limits_{\substack{q \leq Q \\ q \equiv 1 \pmod 2}} \varphi(q)$, и $q_s \equiv 1 \pmod 2$ для всех s

(индексы у $\Phi_{2,1}$ подчеркивают принадлежность знаменателей к указанной прогрессии). Дроби $\frac{a_s}{q_s}$ и $\frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}$, вообще говоря, могут и не быть соседями в исходном ряде $\Phi(Q)$. Поэтому разность $\Delta\left(\frac{a_s}{q_s}, \frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}\right) = a_{s+1} q_s - a_s q_{s+1}$ не обязана равняться единице. Какова доля пар соседних дробей ряда (55), для которых эта разность равна заданному числу k?

Ответ на этот вопрос был дан в 2003 году А. Хайнесом *. Оказалось, что предельная доля (при $Q \to +\infty$)

---

* A. Haynes, A note on Farey fractions with odd denominators // J. Number Theory, 98 (2003), p. 89–104.

таких дробей при любом $k \geq 1$ равна величине $\frac{4}{k(k+1)(k+2)}$, т. е. совпадает с $\frac{1}{12} + |\mathcal{T}(1)|$ при $k = 1$ и совпадает с $|\mathcal{T}(k)|$ при $k \geq 2$.

В том же году Ф. Бока, К. Кобели и А. Захареску ** поставили и решили более общую задачу.

** F. P. Boca, C. Cobeli, A. Zaharescu, On the distribution of the Farey sequence with odd denominators // Michigan Math. J., 51 (2003), p. 557–573

Именно, зафиксируем натуральные числа r и $k_1, \ldots, k_r$. Какова доля кортежей из $(r+1)$

последовательных дробей ряда $\Phi_{2,1}(Q)$ вида

$$\frac{a_s}{q_s} < \frac{a_{s+1}}{q_{s+1}} < \dots < \frac{a_{s+r}}{q_{s+r}}$$

таких, что

$$\Delta\left(\frac{a_s}{q_s}, \frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}\right) = k_1,$$

$$\Delta\left(\frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}, \frac{a_{s+2}}{q_{s+2}}\right) = k_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta\left(\frac{a_{s+r-1}}{q_{s+r-1}}, \frac{a_{s+r}}{q_{s+r}}\right) = k_r$$

Какова предельная плотность таких кортежей в общем числе кортежей длины $(r+1)$ ряда $\Phi_{2,1}(Q)$? Ответ, полученный тремя авторами, в общем виде достаточно сложен. Искомая предельная доля выражается в виде суммы площадей фигур $T(k_1,\dots,k_r)$, которые отвечают вершинам некоторого графа. В некоторых частных случаях (скажем, при $r=1$ или $r=2$) слагаемые таких сумм можно выписать явно (в виде функций от k_1, k_2).

§ 8. Знаменатели с заданными арифметическими свойствами.

Исходную задачу Хайнеса можно обобщить и в ином направлении. Именно, задавшись целым $d>1$ и образовав из $\Phi(Q)$ новый ряд из дробей со знаменателями, взаимно простыми с d, можно поставить вопрос о предельной доле его соседних дробей $\frac{a_s}{q_s} < \frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}$ с условием $\Delta\left(\frac{a_s}{q_s}, \frac{a_{s+1}}{q_{s+1}}\right) = k$.

Существование такой доли при любых d и k было доказано в 2009 году Д. А. Бадзяном и А. Хайнесом*. Формула, данная авторами, выражает эту

* D. A. Badziahin, A. K. Haynes, A note on Farey fractions with denominators in arithmetic progressions // Acta Arith., 147 (2011), № 3, p. 205–215 (препринт статьи появился в 2009 г.)

дали также в виде суммы площадей фигур $T(k_1,\dots,k_r)$, по некоторому множеству наборов.

Пусть Q достаточно велико. Окрасим в ряду $\Phi(Q)$ в красный цвет все дроби, знаменатели которых — чётные числа (все, что останется неокрашенным, представляет собою ряд $\Phi_{2,1}(Q)$). Ясно, что две окрашенные дроби не могут стоять рядом друг с другом: этому мешает модулярное соотношение.

Стало быть, между парой окрашенных дробей есть хотя бы одна неокрашенная. Зададимся теперь целым числом $r \geq 1$. Спрашивается, какова будет доля промежутков с окрашенными концами, в которые попадает ровно r неокрашенных дробей, в общем числе таких промежутков?

В 2012 г. К. Кобели, М. Выжжийту и А. Захареску, исследуя схожую задачу*, нашли выражения для таких долей для случаев $r=1,2,3$. Эти доли составили

$$6-8\ln 2 = 0.45482\ldots \quad \text{для } r=1,$$

$$16\ln 2 - \frac{1132}{105} = 0.30940\ldots \quad \text{для } r=2,$$

$$\frac{599}{105} - 8\ln 2 = 0.15958\ldots \quad \text{для } r=3.$$

---

* C. Cobeli, M. Vâjâitu, A. Zaharescu, The distribution of rationals in residue classes // Math Reports, 14(64) (2012), № 1, p. 1-19.

Эти вычисления могут быть продолжены. Оказывается, в случае $r=4$ эта доля совпадает с суммой площадей областей

$T(1,2,2,3)$, $T(1,2,4,1)$, $T(1,4,2,1)$, $T(3,2,2,1)$

и равна $2/45$. В случае $r \geq 5$ искомая доля выражается суммой площадей многоугольников, отвечающих симметричным наборам

$$(1, 2^{r-2}, 3), \quad (3, 2^{r-2}, 1)$$

(здесь под a^n понимается строка вида $\underbrace{a,\dots,a}_{n}$).

Эти площади могут быть вычислены явно (в виде функции от r); искомая же доля оказывается равной
$$\frac{2}{(2r-3)(2r-1)(2r+1)}.$$
Более сложная (в техническом отношении) задача возникает, если в ряде $\Phi(Q)$ окрасить в красный все дроби, знаменатели которых кратны тройке*.
И здесь искомые доли могут быть явно вычислены при любом r, однако в этом случае приходится следить за "потомством" гораздо большего числа наборов, чем в предыдущей задаче.
Как и в случае делимости на 2, в формулах для долей наступает "стабилизация": при $r \geq 8$ доли описываются единообразными выражениями, которые, однако, зависят от того, какой остаток дает r при делении на 5.
Неожиданным следствием оказывается то, что последовательность долей не является монотонно убывающей (хотя бы начиная с некоторого места).

* М.А.Королев, Об одном распределении, связанном с рядами Фарея // Чебышевский сборник, 24 (2023), № 4, с.137-190.

Интересно отметить, что в аналогичной задаче, когда в ряде Фарея окрашиваются дроби со знаменателем, кратным пятёрке (следующему за тройкой простому числу) вычисления долей через подсчет площадей становятся чрезвычайно сложными и получить общие формулы для них не удается.

§ 9. m-индексы

Пусть $m \geq 2$ - заданное целое число, и пусть
$$\frac{a_0}{q_0} < \frac{a_1}{q_1} < \frac{a_2}{q_2} < \ldots < \frac{a_{m-1}}{q_{m-1}}$$
- кортеж из m последовательных дробей ряда $\Phi(Q)$. Естественным обобщением индекса дроби

служит понятие $\bar{m}$-индекса, значение которого для дроби $\frac{a_1}{q_1}$ определяется формулой

$$k_{Q,m}\left(\frac{a_1}{q_1}\right) = a_{m-1}q_0 - a_0 q_{m-1}.$$

Впервые m-индексы появились в работе А. Хайнеса* (2010). В случае $m \geq 2$ формул для сумм

* A.K. Haynes, Numerators of differences of nonconsecutive Farey fractions // Intern. J. Number Theory, 6 (2010), № 3, p. 655–666.

$$\sum_{n=1}^{N-m} k_{Q,m}(r_n),$$

подобных формуле из Упражнения 3 к гл. III, неизвестно. Однако для них удается получить асимптотическую формулу вида

$$\sum_{n=1}^{N-m} k_{Q,m}(r_n) = B(m)N(Q) + O_m\left(Q(\ln Q)^2\right),$$

в которой постоянная $B(m)$ оказывается бесконечной суммой площадей фигур $T(k_1,\dots,k_m)$, отвечающих специальному семейству наборов. Открытой проблемой является порядок роста величины $B(m)$ при увеличении m.

§10. Свойства "основного дерева" наборов

Как отмечалось выше, все наборы, возникающие в перечисленных задачах — узлы основного дерева наборов, образованного "потомками" треугольника T. На r-м этаже дерева размещаются представители r-го поколения потомков*, множество которых обозначим через A_r. Пусть $\bar{k}_r = (k_1,\dots,k_r)$ — набор из A_r. Определим норму $\|\bar{k}_r\|$ такого набора как максимум из его компонент. Как показали К. Кобели и А. Захареску**,

** C. Cobeli, A. Zaharescu, On the geometry behind a recurrent relation // Carpathian J. Math. 31 (2015), № 2, p. 165–172.

* Здесь мы допускаем некоторую вольность речи, отождествляя (применительно к узлам дерева) наборы и отвечающие им области.

число наборов $\bar{k}_r$ из A_r, норма которых не превосходит целого числа n, растет с ростом n линейно:

$$\sum_{\substack{\bar{k} \in A_r \\ \|\bar{k}\| \le n}} 1 = r \cdot n + O(1).$$

При этом оказывается, что разность C между суммой и главным членом зависит лишь от r и не зависит от n: $C = C(r)$. Авторы вычислили значения этой величины для всех r, не превосходящих 20. Эта последовательность, как и подобает любой мало-мальски нетривиальной последовательности, вошла в знаменитую OEIS-энциклопедию* под номером A249835. Но тем дело и ограничилось: пока неизвестно какого-либо замкнутого выражения для величины $C(r)$.

---

* OEIS – "The on-line encyclopedia of integer sequences" – он-лайн энциклопедия целочисленных последовательностей, начало создания которой было положено в 1964 году американским и английским математиком Нилом Джеймсом Александером Слоаном. Об истории возникновения и развития этой энциклопедии, устройстве и принципах пополнения можно прочесть в увлекательной статье самого Слоана: N. J. A. Sloane, "A Handbook of Integer Sequences Fifty Years Later" // The Mathematical Intelligencer, 45 (2023), № 3, p. 193–205.

Завершим эту главу следующим наблюдением. Из неравенств, задающих многоугольник $\Gamma(k_1, \ldots, k_r)$, несложно заключить, что число его вершин не превосходит $2r+3$. Вместе с тем, подавляющее большинство из встретившихся при решении тех или иных задач областей представляют собой треугольники и четырехугольники. Единственным известным автору исключением из этого правила является бесконечное семейство пятиугольных областей, отвечающих наборам $(5, (1,4)^k, 1, 3, 2^{3k})$ и $(2^{3k}, 3, 1, (4,1)^k, 5)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ (напомним, что $(1,4)^1 = (1,4)$, $(1,4)^2 = (1,4,1,4)$ и т.д.)

Есть ли среди областей $\Gamma(k_1, \dots, k_r)$ многоугольники с числом вершин, большим пяти – неизвестно.

Заключение

Есть подозрение, что автор уже переборщил с числом ссылок на серьезные научные работы. Все-таки книжка, которую вы держите в руках – популярный курс, а не монография. Но что поделаешь – такова действительность: то, что вчера было новым методом, сегодня читается как спецкурс для студентов, а завтра, глядишь, станет темой для школьного факультатива.

Впрочем, две рекомендации для дальнейшего чтения дать все же рискну. Во-первых, это обзорная статья К. Кобели и А. Захареску "Последовательность Аро-Фарея двести лет спустя". В ней отражена большая часть направлений исследования дробей Фарея. Кроме того, эта статья снабжена подробной библиографией и целым рядом красивых иллюстраций.

Но обзор Кобели и Захареску увидел свет более 20 лет назад – в 2003 году. С тех пор появилось множество работ по дробям Фарея, и рассказать обо всех нет никакой возможности. Но автор и не ставил такой цели, поскольку убежден: заинтересованный читатель сам найдет нужное ему, надо лишь указать, где искать. Поэтому вторая (и последняя) рекомендация – научиться ориентироваться в электронном архиве научных статей и препринтов arxiv.org. И тогда на ваш запрос по ключевым словам "Farey sequence" он выдаст море информации, в котором каждый найдет что-то себе по душе.

Ну а задача-максимум автора будет выполнена, если когда-то этот архив обогатится вашей новой работой о дробях Фарея.

Упражнение 5.3 Докажите равенство площадей областей $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ и $\mathcal{T}(k_2,k_1)$ при любых $k_1,k_2\geq 1$, пользуясь результатами леммы 14 и теоремы 8.

Решение. Обозначим внутренности областей $\mathcal{T}(k_1,k_2)$ и $\mathcal{T}(k_2,k_1)$ через ω_1 и ω_2. Пусть, как и в лемме 14, S – симметрия относительно прямой $y=x$, так что S сохраняет площади, а $S^2=S\circ S$ есть тождественное преобразование. Тогда

$$T\omega_1 = T\left(\mathring{\mathcal{T}}(k_1)\cap T^{-1}\mathring{\mathcal{T}}(k_2)\right) = T\mathring{\mathcal{T}}(k_1)\cap \mathring{\mathcal{T}}(k_2) =$$

$$= S\mathcal{T}^{\circ}(k_1)\cap \mathcal{T}^{\circ}(k_2)$$ и, аналогично,

$$T\omega_2 = S\mathcal{T}^{\circ}(k_2)\cap \mathcal{T}^{\circ}(k_1).$$ Но тогда

$$S\circ T\omega_2 = S^2\mathcal{T}^{\circ}(k_2)\cap S\mathcal{T}^{\circ}(k_1) = S\mathcal{T}^{\circ}(k_1)\cap \mathcal{T}^{\circ}(k_2) = T\omega_1,$$

так что $|S\circ T\omega_2| = |T\omega_1|$. Но $|S\circ T\omega_2| = |\omega_2|$, $|T\omega_1| = |\omega_1|$. Отсюда следует искомое утверждение.

Упражнение 5.4 Докажите, что при любых r и s с условиями $1 \le s \le r-1$ справедливо тождество

$$\mathbb{K}_{r-1}(k_1,\dots,k_{r-1})\,\mathbb{K}_s(k_{r-s+1},\dots,k_r) -$$
$$- \mathbb{K}_r(k_1,\dots,k_r)\,\mathbb{K}_{s-1}(k_{r-s+1},\dots,k_{r-1}) = \mathbb{K}_{r-s-1}(k_1,\dots,k_{r-s-1}).$$

(Теорема 12 является его частным случаем, который отвечает $r = n+1$, $s = n$).

Указание: подобно тому, как это делалось при доказательстве Теоремы 13, рассмотрите набор переменных X_s, $s = 0, 1, \dots, r+1$, связанных соотношениями

$$X_{s+1} = k_s X_s - X_{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots, r,$$

и положите $Y_s = X_{r+1-s}$, $s = 0, 1, \dots, r+1$. Выразите двумя способами Y_s через X_0, X_1 и континуанты и сравните полученные выражения.

Решение Прежде всего, имеем:

$$X_{s+1} = \mathbb{K}_s(k_1,\dots,k_s)X_1 - \mathbb{K}_{s-1}(k_2,\dots,k_s)X_0 \qquad (1)$$

$$Y_{s+1} = k_{r-s+1}Y_s - Y_{s-1} =$$

$$= \mathbb{K}_s(k_r,\dots,k_{r-s+1})Y_1 - \mathbb{K}_{s-1}(k_{r-1},\dots,k_{r-s+1})Y_0, \qquad (2)$$

В то же время, согласно (1),

$$\begin{cases} Y_0 = X_{r+1} = \mathbb{K}_r(k_1,\dots,k_r)X_1 - \mathbb{K}_{r-1}(k_2,\dots,k_r)X_0, \\ Y_1 = X_r = \mathbb{K}_{r-1}(k_1,\dots,k_{r-1})X_1 - \mathbb{K}_{r-2}(k_2,\dots,k_{r-1})X_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Заменяя в (2) величины Y_0, Y_1 по формулам (3), после приведения подобных слагаемых получим:

$$Y_{s+1} = \Big(\mathbb{K}_s(k_r,\dots,k_{r-s+1})\mathbb{K}_{r-1}(k_1,\dots,k_{r-1}) -$$
$$- \mathbb{K}_{s-1}(k_{r-1},\dots,k_{r-s+1})\mathbb{K}_r(k_1,\dots,k_r)\Big)X_1 -$$
$$- \Big(\mathbb{K}_s(k_r,\dots,k_{r-s+1})\mathbb{K}_{r-2}(k_2,\dots,k_{r-1}) -$$
$$- \mathbb{K}_{s-1}(k_{r-1},\dots,k_{r-s+1})\mathbb{K}_{r-1}(k_2,\dots,k_r)\Big)X_0. \qquad (4)$$

В то же время

$$Y_{s+1} = X_{r-s} = \mathbb{K}_{r-s-1}(k_1,\dots,k_{r-s-1})X_1 -$$
$$- \mathbb{K}_{r-s-2}(k_2,\dots,k_{r-s-1})X_0. \qquad (5).$$

Приравнивая коэффициенты при X_1 в (4) и (5), приходим к искомому тождеству.