## 1. Теорема Маркуса–Спилмена–Сриваставы.

Пусть $\|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^m$.

**Теорема 1.1** (Проблема Кадисона–Зингера; теорема Маркуса–Спилмена–Сриваставы). *Пусть $L$ — $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ верна оценка $\max\limits_{1\le j\le m} |x_j| \le \varepsilon \|x\|_2$ для каждого вектора $x = (x_1, \ldots, x_m) \in L$. Тогда можно разбить множество $\{1, \ldots, m\}$ на два таких непересекающихся подмножества $S_1 \sqcup S_2 = \{1, \ldots, m\}$, что*

$$\tfrac{1}{2}(1 - c\varepsilon)\|x\|_2^2 \le \sum_{j\in S_i} |x_j|^2 \le \tfrac{1}{2}(1 + c\varepsilon)\|x\|_2^2 \quad \forall x \in L \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Подумаем, как можно было бы попытаться подступиться к доказательству этой теоремы. Ее результат равносилен тому, что

$$\Big|\sum_{j=1}^m |x_j|^2 - 2\sum_{j\in S_i} |x_j|^2\Big| \le c\varepsilon \quad \forall x \in L,\ \|x\|_2 \le 1.$$

Это равносильно тому, что найдется такой набор знаков $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, что

$$\Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j |x_j|^2\Big| \le c\varepsilon \quad \forall t \in L,\ \|x\|_2 \le 1.$$

Попробуем выбирать эти знаки случайным образом, т.е. каждая переменная $\varepsilon_j$ теперь принимает значения $\pm 1$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ независимо от остальных таких переменных. Если мы теперь сможем оценить среднее

$$\mathbb{E} \sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|_2\le 1}} \Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j |x_j|^2\Big| \le c\varepsilon,$$

то и нужный нам набор знаков тоже найдется.

Пусть $W_x := \sum_{j=1}^m \varepsilon_j |x_j|^2$.

Посмотрим для начала, что можно сказать про случайные величины вида $S_a := \sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j$, $a = (a_1, \ldots, a_m)$.

**Теорема 1.2.** *Имеет место неравенство*

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j\Big| \ge t\Big) \le 2e^{-\frac{t^2}{2(a_1^2+\ldots+a_m^2)}} \quad \forall t > 0.$$

*Доказательство.* Пусть $t, \lambda > 0$, тогда

$$P\Big(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j \ge t\Big) = P\Big(\exp\Big(\lambda \sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j\Big) \ge e^{\lambda t}\Big) \le e^{-\lambda t}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\lambda \sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j\Big)\Big] = e^{-\lambda t}\prod_{j=1}^m \mathbb{E}\big[e^{\lambda\varepsilon_j a_j}\big],$$

где во втором переходе мы применили неравенство Чебышева, а в третьем воспользовались независимостью. Вычислим математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda\varepsilon_j a_j}\big] = \frac{e^{\lambda a_j} + e^{-\lambda a_j}}{2} = \operatorname{ch}(\lambda a_j).$$

Заметим, что $\operatorname{ch}\alpha \le e^{\frac{\alpha^2}{2}}$, т.к.

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k)!}\alpha^{2k} \le \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k)!!}\alpha^{2k} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\Big(\frac{\alpha^2}{2}\Big)^k = e^{\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Таким образом,

$$P\Big(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j \ge t\Big) \le e^{-\lambda t}\prod_{j=1}^m \mathbb{E}\big[e^{\lambda\varepsilon_j a_j}\big] \le e^{-\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}(a_1^2+\ldots+a_m^2)}.$$

Остается минимимзировать правую часть по параметру $\lambda$, т.е. найти точку минимума функции $\lambda \mapsto -\lambda t + \frac{\lambda^2}{2}(a_1^2 + \ldots + a_m^2)$. Это точка $\lambda = \frac{t}{a_1^2+\ldots+a_m^2}$, которую мы и подставляем в правую часть, чтобы получить оценку

$$P\Big(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j \geq t\Big) \leq \exp\Big(-\frac{t^2}{2(a_1^2 + \ldots + a_m^2)}\Big).$$

Аналогично,

$$P\Big(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j \leq -t\Big) \leq \exp\Big(-\frac{t^2}{2(a_1^2 + \ldots + a_m^2)}\Big)$$

и

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j a_j\Big| \geq t\Big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2(a_1^2+\ldots+a_m^2)}},$$

что и было заявлено. $\square$

Заметим, что

$$P(|S_a - S_b| \geq t\|a-b\|_2) \leq 2e^{-t^2/2}. \tag{1}$$

Аналогично, для $x, y \in \mathbb{R}^m$, $\|x\|_2 \leq 1$, $\|y\|_2 \leq 1$, выполнено

$$P\big(|W_x - W_y| \geq 2\|x-y\|_\infty t\big) \leq 2e^{-t^2/2},$$

где $\|h\|_\infty := \max\limits_{1\leq j\leq m} |h_j|$. Действительно, (1) влечет неравенство

$$P\Big(|W_x - W_y| \geq \Big(\sum_{j=1}^m (|x_j|^2 - |y_j|^2)^2\Big)^{1/2} t\Big) \leq 2e^{-t^2/2}.$$

Теперь заметим, что

$$\Big(\sum_{j=1}^m (|x_j|^2 - |y_j|^2)^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 (x_j + y_j)^2\Big)^{1/2} \leq$$
$$\leq \|x-y\|_\infty \|x+y\|_2 \leq \|x-y\|_\infty (\|x\|_2 + \|y\|_2) \leq 2\|x-y\|_\infty.$$

Значит,

$$P\big(|W_x - W_y| \geq 2\|x-y\|_\infty t\big) \leq P\Big(|W_x - W_y| \geq \Big(\sum_{j=1}^m (|x_j|^2 - |y_j|^2)^2\Big)^{1/2} t\Big) \leq 2e^{-t^2/2}.$$

## 2. Оценка максимума случайного процесса. Чейнинг функционал.

Пусть $\{V_x\}_{x\in X}$ — набор случайных величин, занумерованный элементами метрического пространства $(X, d)$. Предположим, что

$$P\big(|V_x - V_y| \geq t d(x,y)\big) \leq 2e^{-t^2/2}.$$

Для простоты будем считать, что множество $X$ — конечное. Рассмотрим в множестве $X$ набор подмножеств $X_n$, $X_0 = \{x_0\}$, и предположим, что мы контролируем мощность каждого из множеств следующим образом

$$\#X_n \leq N_n; \quad N_0 = 1, N_n = 2^{2^n} \text{ при } n \geq 1.$$

Кроме того, будем считать, что для достаточно большого $n$ множество $X_n$ совпадает с $X$. Пусть $\pi_n(x)$ — ближайшая точка из $X_n$ к $x$, т.е.

$$d(x, \pi_n(x)) = \min_{y\in X_n} d(x,y) = d(x, X_n).$$

Тогда мы можем написать, что

$$V_x - V_{x_0} = \sum_{n\geq 1} (V_{\pi_n(x)} - V_{\pi_{n-1}(x)}).$$

Пусть $\tau > 0$ и $\Omega_\tau$ — такое событие, что

$$|V_{\pi_n(x)} - V_{\pi_{n-1}(x)}| \le \tau^{1/2} 2^{n/2} d(\pi_n(x), \pi_{n-1}(x)) \quad \forall n \ge 1 \quad \forall x \in X.$$

Оценим вероятность дополнения до данного события:

$$\begin{aligned} P(\Omega \setminus \Omega_\tau) &\le P\Big(\bigcup_{n\ge 1} \{\exists (y,z)\colon y \in X_n, z \in X_{n-1}, |V_y - V_z| > \tau^{1/2} 2^{n/2} d(y,z)\}\Big) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} P\big(\exists (y,z)\colon y \in X_n, z \in X_{n-1}, |V_y - V_z| > \tau^{1/2} 2^{n/2} d(y,z)\big) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \#\{(y,z)\colon y \in X_n, z \in X_{n-1}\} 2\exp(-\tau 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Заметим, что $\#\{(y,z)\colon y \in X_n, z \in X_{n-1}\} \le N_n N_{n-1} = 2^{2^n + 2^{n-1}} \le 2^{2^{n+1}}$. Заметим, что, при $\tau \ge 8$, $\tau 2^{n-1} = \tau 2^{n-2} + \frac{\tau}{8} 2^{n+1} \ge \tau/2 + 2^{n+1}$, поэтому, при $\tau \ge 8$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^{n+1}} \exp(-\tau 2^{n-1}) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2^{n+1}} \exp\big(-\tau/2 - 2^{n+1})\big) = \exp\big(-\tau/2) \sum_{n=1}^{\infty} \big(\tfrac{2}{e}\big)^{2^{n+1}} = c e^{-\tau/2}.$$

Таким образом, при $\tau \ge 8$,

$$P\big(\forall x \in X\colon |V_x - X_{x_0}| \le \tau^{1/2} \sum_{n\ge 1} 2^{n/2} d(\pi_n(x), \pi_{n-1}(x))\big) \ge P(\Omega_\tau) \ge 1 - c e^{-\tau/2}.$$

Заметим, что

$$d(\pi_n(x), \pi_{n-1}(x)) \le d(\pi_n(x), x) + d(x, \pi_{n-1}(x)),$$

поэтому

$$P\big(\sup_{x\in X} |V_x - V_{x_0}| \le 2\tau^{1/2} \sup_{x \in X} \sum_{n \ge 0} 2^{n/2} d(\pi_n(x), x)\big) \ge 1 - c e^{-\tau/2}$$

или, что то же самое,

$$P\big(\sup_{x\in X} |V_x - X_{x_0}| \ge 2\tau^{1/2} \sup_{x \in X} \sum_{n \ge 0} 2^{n/2} d(\pi_n(x), x)\big) \le c e^{-\tau/2}$$

при $\tau \ge 8$. Тогда при $\tau > 0$

$$P\big(\sup_{x\in X} |V_x - X_{x_0}| \ge 2\tau^{1/2} \sup_{x \in X} \sum_{n \ge 0} 2^{n/2} d(\pi_n(x), x)\big) \le \max\{c, e^4\} e^{-\tau/2}$$

**Лемма 2.1.** *Если $\xi \ge 0$ и*

$$P(\xi \ge R\tau^{1/2}) \le c e^{-\tau/2} \quad \forall \tau > 0,$$

*то*

$$\mathbb{E}[\xi] \le CR.$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\mathbb{E}[\xi] = \mathbb{E}[\xi I_{\{\xi < R\}}] + \sum_{n\ge 1} \mathbb{E}[\xi I_{\{Rn \le \xi < R(n+1)\}}] \le R + \sum_{n \ge 1} R(n+1) \mathbb{E}[I_{\{\xi \ge Rn\}}] \le R + Rc \sum_{n\ge 1} (n+1) 2^{-n^2/2} \le CR,$$

где $C = 1 + c \sum_{n\ge 1} (n+1) 2^{-n^2/2}$. □

**Определение 2.2.** *Пусть*

$$\gamma_2(X, d) := \inf \sup_{x \in X} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} d(x, X_n),$$

*где инфимум берется по всевозможным последовательностям множеств $X_n$ с ограничением $\# X_n \le N_n$, $N_0 = 1$, $N_n = 2^{2^n}$ при $n \ge 1$.*

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 2.3.** *Пусть $\{V_x\}_{x\in X}$ — набор случайных величин, занумерованный элементами метрического пространства $(X,d)$. Предположим, что*
$$P\big(|V_x - V_y| \geq td(x,y)\big) \leq 2e^{-t^2/2}.$$
*Тогда*
$$\mathbb{E}\big[\sup_{x\in X}|V_x - X_{x_0}|\big] \leq C\gamma_2(X,d)$$
*для некоторого числа $C>0$.*

## 3. Энтропия. Энтропийные числа.

**Определение 3.1.** *Пусть $A\subset X$, $X$ — метрическое пространство с метрикой $d$. Энтропийными числами называются величины*
$$e_n(A,d) = \inf_{\#S\leq N_n}\sup_{x\in A} d(x,S) = \inf\Big\{r>0\colon \exists x_1,\ldots,x_{N_n}\in X\colon A\subset\bigcup_{j=1}^{N_n}\overline{B}_r(x_j)\Big\},$$
*где $\overline{B}_r(x) := \{y\in X\colon d(y,x)\leq r\}$.*

Выбирая множества $X_n$ в определении функционала $\gamma_2$ таким образом, что
$$\sup_{x\in A} d(x,X_n) \leq e_n(X,d) + \varepsilon 2^{-n}$$
в силу произвольности $\varepsilon>0$ получаем следующую оценку.

**Следствие 3.2** (Энтропийная оценка Дадли)**.**
$$\gamma_2(X,d) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} e_n(X,d).$$

**Лемма 3.3.** *Пусть $L$ — $k$-мерное нормированное пространство с единичным шаром $B = \{x\in L\colon \|x\|\leq 1\}$, $d(x,y)=\|x-y\|$. Тогда для множества $A\subset RB$ имеет место оценка $e_n(A,d)\leq 4R\cdot 2^{-2^n/k}$.*

*Доказательство.* Пусть $Z$ — наибольшее по мощности множество точек в $A$ с попарными расстояниями хотя бы $2\varepsilon$. Тогда, во-первых, $A$ содержится в объединении шаров с центрами в точках из $Z$ радиуса $2\varepsilon$. Во-вторых, открытые шары с центрами в $Z$ радиуса $\varepsilon$ попарно непересекаются, поэтому
$$\#Z\varepsilon^k Vol_k(B) \leq Vol_k(A+\varepsilon B) \leq (R+\varepsilon)^k Vol_k(B).$$
Т.е.
$$\#Z \leq (1+R/\varepsilon)^k.$$
Пусть $2^n\geq k$. Если теперь взять $\varepsilon = 2R2^{-2^n/k}$, то $\#Z \leq (1+\frac{1}{2}2^{2^n/k})^k \leq 2^{2^n}$. Поэтому, $e_n(A,d)\leq 4R2^{-2^n/k}$. Если же $2^n<k$, то $e_n(A,d)\leq R\leq 4R2^{-2^n/k}$. □

**Упражнение 3.4.** Пусть $L$ — $k$-мерное нормированное пространство с единичным шаром $B=\{x\in X\colon \|x\|\leq 1\}$, $d(x,y)=\|x-y\|$. Докажите, что $e_n(A,d)\geq 2^{-2^n/k}\left[\frac{Vol_k(A)}{Vol_k(B)}\right]^{1/k}$.

**Замечание 3.5.** В частности, $2^{-2^n/k}\leq e_n(B,d)\leq 4\cdot 2^{-2^n/k}$.

**Предложение 3.6.** *Пусть $L$ — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|$ и единичным шаром по этой норме $B:=\{x\in X\colon \|x\|\leq 1\}$, $d(x,y)=\|x-y\|$. Тогда*
$$e_{n+n_0+1}(A,d)\leq e_{n_0}(A,d)e_{n+n_0}(B,d)$$
*для $A\subset L$.*

*Доказательство.* Пусть $A$ покрыто $2^{2^{n_0}}$ шарами радиуса $e_{n_0}(A,d)+\varepsilon$. Каждый из этих шаров покрывается $2^{2^{n+n_0}}$ шарами радиуса $(e_{n_0}(A,d)+\varepsilon)(e_{n+n_0}(B,d)+\varepsilon)$. Значит $A$ покрыто $2^{2^{n_0}}\cdot 2^{2^{n+n_0}}\leq 2^{2^{n+n_0+1}}$ шарами радиуса $(e_{n_0}(A,d)+\varepsilon)(e_{n+n_0}(B,d)+\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon$ получаем заявленное утверждение. □

**Замечание 3.7.** Пусть $L$ — $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ верна оценка $\max\limits_{1\le j\le m} |x_j| \le \varepsilon\|x\|_2$ для каждого вектора $x = (x_1,\dots,x_m)\in L$. Тогда

$$e_n(L\cap\{x\colon \|x\|_2\le 1\}, d_\infty) \le 4\varepsilon\cdot 2^{-2^n/k}$$

и

$$\mathbb{E}\sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|_2\le 1}}\Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j|x_j|^2\Big| \le C\sum_{n=0}^\infty 2^{n/2}e_n(L\cap\{x\colon \|x\|_2\le 1\}, d_\infty) \le C_1\varepsilon\sum_{n=0}^\infty 2^{n/2}2^{-2^n/k} =$$

$$= C_1\varepsilon\sum_{n=0}^{[\log k]} 2^{n/2}2^{-2^n/k} + C_1\varepsilon 2^{[\log k]/2}\sum_{n=[\log k]+1}^\infty 2^{n-[\log k]/2}2^{-2^n/k}$$

Заметим, что

$$\sum_{n=[\log k]+1}^\infty 2^{n-[\log k]/2}2^{-2^n/k} = \sum_{n=1}^\infty 2^{n/2}2^{-2^{n+[\log k]}/k} \le \sum_{n=1}^\infty 2^{n/2}2^{-2^{n-1}} < \infty.$$

Кроме того

$$\sum_{n=0}^{[\log k]} 2^{n/2}2^{-2^n/k} \le \sum_{n=0}^{[\log k]} 2^{n/2} \le C_2\sqrt{k}.$$

таким образом,

$$\mathbb{E}\sup_{\substack{x\in L\\ \|x\|_2\le 1}}\Big|\sum_{j=1}^m \varepsilon_j|x_j|^2\Big| \le C_3\varepsilon\sqrt{k}.$$

**Теорема 3.8** (Обратная оценка Судакова)**.** *Пусть $L$ — $k$-мерное нормированное пространство. Пусть $B := \{x\in L\colon \|x\|_B\le 1\}$, $d_B(x,y) = \|x-y\|_B$, $B^2 := \{x\in L\colon \|x\|\le 1\}$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Тогда*

$$e_n(B^2, d_B) \le C2^{-n/2}\int_L \|x\|_B\varrho(x)\,dx,$$

*где $C>0$ универсальная постоянная,*

$$\varrho(x) := (2\pi)^{-k/2}e^{-\|x\|^2/2}$$

*Доказательство.* Пусть $\gamma$ — стандартная гауссовская мера на $L$, т.е.

$$\gamma(A) := \int_A (2\pi)^{-k/2}\exp(-\|x\|^2/2)\,dx.$$

Для начала заметим, что $\gamma(B+h)\ge e^{-\frac{\|h\|^2}{2}}\gamma(B)$. Действительно,

$$\gamma(B+h) = (2\pi)^{-k/2}\int_B \exp(-\|x+h\|^2/2)\,dx = (2\pi)^{-k/2}\int_B\exp(-\|-x+h\|^2/2)\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-k/2}\int_B \tfrac{1}{2}\big(\exp(-\|x+h\|^2/2) + \exp(-\|-x+h\|^2/2)\big)\,dx \ge$$

$$\ge (2\pi)^{-k/2}\int_B \exp\big(-(\|x+h\|^2+\|-x+h\|^2)/4\big)\,dt = e^{-\frac{\|h\|^2}{2}}(2\pi)^{-k/2}\int_B\exp(-\|x\|^2/2)\,dx = e^{-\frac{\|h\|^2}{2}}\gamma(B).$$

Пусть теперь $x_1,\dots,x_N\in B^2$ — максимальный набор точек в $B^2$ с попарными расстояниями $d_B(x_i,x_j) = \|x_i-x_j\|_B\ge 2r$. Т.к. шары $\alpha x_j+\alpha rB$ имеют попарно непересекающиеся внутренности, то

$$\sum_{j=1}^N \gamma\big(\alpha x_j+\alpha rB\big) = \gamma\Big(\bigcup_{j=1}^N\big(\alpha x_j+\alpha rB\big)\Big)\le 1.$$

Из полученной выше оценки мы видим, что

$$\gamma\big(\alpha x_j+\alpha rB\big)\ge e^{-\frac{\|\alpha x_j\|^2}{2}}\gamma(\alpha rB)\ge e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\gamma(\alpha rB).$$

Таким образом,

$$N \le \frac{e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\gamma(\alpha r B)}.$$

Теперь заметим, что

$$\gamma(\alpha r B) = \gamma(x\colon \|x\|_B \le \alpha r) = 1 - \gamma(x\colon \|x\|_B \ge \alpha r) \ge 1 - \frac{1}{\alpha r}\int_L \|x\|_B \varrho(x)\, dx.$$

Возьмем $\alpha = 2r^{-1}\int_L \|x\|_B \varrho(x)\, dx$. Тогда

$$N \le 2\exp\Big(2r^{-2}\Big(\int_L \|x\|_B \varrho(x)\, dx\Big)^2\Big).$$

Таким образом, при $r = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}} 2^{-n/2}\int_L \|x\|_B \varrho(x)\, dx$,

$$N \le 2^{1+\frac{1}{2}2^n} \le 2^{2^n} \quad \text{при } n \ge 1.$$

Таким образом, при $n \ge 1$, имеет место оценка

$$e_n(B^2, d_B) \le 2r = \frac{4}{\sqrt{\ln 2}} 2^{-n/2}\int_L \|x\|_B \varrho(x)\, dx.$$

Для $n = 0$ заметим, что $B^2 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{4}\big(x_j + (e_1(B^2, d_B) + \varepsilon)B\big)$. Тогда для произвольных точек $x, y \in B$ точки $x, \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x, \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}x, y$ лежат в $B^2$. Значит какие-то две из этих точек попадут в один и тот же шар $x_j + (e_1(B^2, d_B) + \varepsilon)B$, что дает оценку

$$\frac{1}{4}\|x - y\|_B \le 2(e_1(B^2, d_B) + \varepsilon).$$

Отсюда $e_0(B^2, d_B) \le 8e_1(B^2, d_B)$. Теорема доказана. $\square$

**Лемма 3.9.** *Пусть $L$ — $k$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что для каждого вектора $x = (x_1, \ldots, x_m) \in L$ верна оценка $\max\limits_{1\le j\le m} |x_j| \le \varepsilon \|x\|_2$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\int_L \max_{1\le j\le m} \frac{1}{\sqrt{\ln(j+1)}} |x_j| (2\pi)^{-k/2} e^{-\|x\|^2/2}\, dx \le C\varepsilon,$$

*где $C > 0$ — абсолютная постоянная, $\|x\| := \|x\|_2$ для $x \in L$.*

*Доказательство.* Пусть $e^1, \ldots, e^m$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$ и пусть $u^1, \ldots, u^k$ — ортонормированный базис в $L$. Тогда каждый $x \in L$ представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{k} (x, u^i) u^i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i u^i = \sum_{j=1}^{m} (x, e^j) e^j = \sum_{j=1}^{m} x_j e^j.$$

Заметим, что

$$(x, e^j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i (u^i, e_j) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i a_{i,j}.$$

Кроме того, если $\sum_{i=1}^k b_i^2 = 1$, то

$$\gamma\Big(x\colon \Big|\sum_{i=1}^{k} b_i \xi_i\Big| \ge t\Big) \le e^{-t^2/4} (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} e^{\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^k b_i\xi_i)^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \xi_i^2}\, d\xi_1 \ldots d\xi_k =$$

$$= e^{-t^2/4} (2\pi)^{-k/2} \int_{\mathbb{R}^k} e^{\frac{1}{4}\eta_1^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \eta_i^2}\, d\eta_1 \ldots d\eta_k = ce^{t^2/4}.$$

В нашем случае

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^{k} a_{i,j}(u^i, e_j) = \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} u^i, e_j\Big) \le \varepsilon \Big(\sum_{i=1}^{k} |a_{i,j}|^2\Big)^{1/2},$$

т.е.

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_{i,j}|^2\Big)^{1/2}\le\varepsilon$$

и

$$\gamma\Big(x\colon\Big|\sum_{i=1}^{k}a_{i,j}\xi_i\Big|\ge t\varepsilon\Big)\le\gamma\Big(x\colon\Big|\sum_{i=1}^{k}a_{i,j}\xi_i\Big|\ge t\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_{i,j}|^2\Big)^{1/2}\Big)\le ce^{-t^2/4}.$$

Заметим, что

$$\gamma\Big(x\colon\max_{1\le j\le m}\frac{1}{\sqrt{\ln(j+1)}}|x_j|\ge\tau\varepsilon\Big)\le\sum_{j=1}^{m}\gamma\Big(x\colon|(x,e^j)|\ge\tau\varepsilon\sqrt{\ln(j+1)}\Big)\le c\sum_{j=1}^{m}e^{-\frac{\tau^2}{4}\ln(j+1)}.$$

При $\tau\ge4$ имеет место неравенство

$$\frac{\tau^2}{4}\ln(j+1)=\frac{\tau^2}{8}\ln(j+1)+\frac{\tau^2}{8}\ln(j+1)\ge\frac{\ln2}{8}\tau^2+2\ln(j+1).$$

Поэтому, при $\tau\ge4$, получаем оценку

$$\gamma\Big(x\colon\max_{1\le j\le m}\frac{1}{\sqrt{\ln(j+1)}}|x_j|\ge\tau\varepsilon\Big)\le c\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)^{-2}\Big)e^{-\frac{\ln2}{8}\tau^2}=Ce^{-\frac{\ln2}{8}\tau^2}.$$

При $\tau\ge0$,

$$\gamma\Big(x\colon\max_{1\le j\le m}\frac{1}{\sqrt{\ln(j+1)}}|x_j|\ge\tau\varepsilon\Big)\le\max\{C,e^{2\ln2}\}e^{-\frac{\ln2}{8}\tau^2}.$$

Таким образом,

$$\int_L f(x)\varrho(x)\,dx=\int_L f(x)\varrho(x)I_{\{f(x)<\varepsilon\}}\,dx+\sum_{n\ge1}\int_L f(x)\varrho(x)I_{\{\varepsilon n\le f(x)<\varepsilon(n+1)\}}\,dx\le$$

$$\le\varepsilon+\sum_{n\ge1}\varepsilon(n+1)\int_L\varrho(x)I_{\{f(x)\ge\varepsilon n\}}\,dx\le\varepsilon+\max\{C,e^{2\ln2}\}\varepsilon\sum_{n\ge1}(n+1)e^{-\frac{\ln2}{8}n^2}\le C_1\varepsilon.$$

где $f(x)=\max\limits_{1\le j\le m}\frac{1}{\sqrt{\ln(j+1)}}|x_j|$, $\varrho(x)=(2\pi)^{-k/2}e^{-\|x\|^2/2}$. Это и есть утверждение леммы. □

**Следствие 3.10.** *Имеет место неравенство*

$$\mathbb{E}\sup_{\substack{x\in L\\\|x\|_2\le1}}\Big|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j|x_j|^2\Big|\le C\varepsilon(\log k)\sqrt{\log(m+1)}.$$

*Доказательство.* Мы уже знаем, что

$$\mathbb{E}\sup_{\substack{x\in L\\\|x\|_2\le1}}\Big|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j|x_j|^2\Big|\le C\sum_{n=0}^{\infty}2^{n/2}e_n(L\cap\{x\colon\|x\|_2\le1\},d_\infty).$$

Кроме того, в нашем случае

$$e_n(L\cap\{x\colon\|x\|_2\le1\},d_\infty)\le C_1 2^{-n/2}\int_L\max_{1\le j\le m}|x_j|(2\pi)^{-k/2}e^{-\|x\|^2/2}\,dx\le C_2\cdot2^{-n/2}\varepsilon\sqrt{\ln(m+1)}.$$

Наконец, при $n>[\log k]$

$$e_n(L\cap\{x\colon\|x\|_2\le1\},d_\infty)\le e_{[\log k]}(A,d)e_{n-1}(B,d)\le e_{[\log k]}(A,d)2^{-2^n/2k}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\sup_{\substack{x\in L\\\|x\|_2\le1}}\Big|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j|x_j|^2\Big|\le C_3\sum_{n=0}^{[\log k]}2^{n/2}\cdot2^{-n/2}\varepsilon\sqrt{\ln(m+1)}+\varepsilon\sqrt{\ln(m+1)}\sum_{n=[\log k]+1}^{\infty}2^{n-[\log k]/2}2^{-2^n/2k}.$$

Остается заметить, что

$$\sum_{n=[\log k]+1}^{\infty}2^{n-[\log k]/2}2^{-2^n/2k}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}2^{-2^{n+[\log k]}/2k}\le\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}2^{-2^{n-2}}<\infty.$$

$\square$

## 4. Опять теорема Маркуса–Спилмена–Сриваставы.

**Теорема 4.1** (Маркус–Спильман–Сривастава, 15)**.** *Пусть* $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^k$, $\|v^j\|_2^2 \le \delta \ \forall j$, *и* $\sum_{j=1}^m (x, v^j)^2 = \|x\|_2^2$. *Тогда найдутся такие* $S_1, S_2 \subset \{1, \dots, m\}$, *что* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = \{1, \dots, m\}$ *и*

$$\sum_{j \in S_i} (x, v^j)^2 \le \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\delta}\Big)^2 \|x\|_2^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^k \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

**Теорема 4.2.** *Пусть* $L$ — $k$*-мерное линейное подпространство в* $\mathbb{R}^m$. *Предположим, что для некоторого* $\varepsilon > 0$ *верна оценка* $\max\limits_{1 \le j \le m} |x_j| \le \varepsilon \|x\|_2$ *для каждого вектора* $x = (x_1, \dots, x_m) \in L$. *Тогда можно разбить множество* $\{1, \dots, m\}$ *на два таких непересекающихся подмножества* $S_1 \sqcup S_2 = \{1, \dots, m\}$, *что*

$$\Big(\frac{1}{2} - 3\varepsilon\Big)\|x\|_2^2 \le \sum_{j \in S_i} |x_j|^2 \le \Big(\frac{1}{2} + 3\varepsilon\Big)\|x\|_2^2 \quad \forall x \in L \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

*Доказательство.* Возьмем векторы $v^j \in L$, для которых $\langle x, v^j \rangle := x_j \ \forall x \in L$, т.е. $v^j$ — проекции стандартных базисных векторов $e^j$ на $L$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m (x, v^j)^2 = \|x\|_2^2 \quad \forall x \in L$$

и

$$\|v^j\|_2 = \sup_{\substack{\|x\|_2 \le 1 \\ x \in L}} |(x, v^j)| = \sup_{\substack{\|x\|_2 \le 1 \\ x \in L}} |x_j| \le \varepsilon.$$

Если $\varepsilon \ge 1$, то утверждение тривиально (подойдет каждое разбиение). Если $\varepsilon \in (0, 1)$, то применяем предыдущую теорему с $\delta = \varepsilon^2$. Т.к. $\frac{(1+\sqrt{2}\varepsilon)^2}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2 \le \frac{1}{2} + 3\varepsilon$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, получается заявленный результат. $\square$

В терминах матриц теорема Маркуса–Спильмана–Сриваставы может быть переформулирована следующим образом.

**Теорема 4.3** (Маркус–Спильман–Сривастава, 15)**.** *Пусть* $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^k$, $\|v^j\|^2 \le \delta \ \forall j$, *и* $\sum_{j=1}^m v^j \otimes v^j = I$. *Тогда найдутся такие* $S_1, S_2 \subset \{1, \dots, m\}$, *что* $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = \{1, \dots, m\}$ *и*

$$\Big\| \sum_{j \in S_i} v^j \otimes v^j \Big\|_{op} \le \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\delta}\Big)^2 \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

Можно пытаться строить подходящее множество $S = S_1$ случайным образом. Как и раньше, будем каждый индекс $j$ с вероятностью $1/2$ независимо от остальных включать в множество $S$. Рассмотрим случайные векторы

$$w^j := \begin{cases} \begin{pmatrix} \sqrt{2} v^j \\ 0_k \end{pmatrix}, & \text{если } j \in S, \\ \begin{pmatrix} 0_k \\ \sqrt{2} v^j \end{pmatrix}, & \text{если } j \notin S, \end{cases}$$

где $0_k$ — нулевой вектор в $\mathbb{R}^k$. Заметим, что

$$\mathbb{E}[w^j \otimes w^j] = \begin{pmatrix} v^j \otimes v^j & 0 \\ 0 & v^j \otimes v^j \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^m w^j \otimes w^j\Big] = I, \quad \|w^j\|_2^2 = 2\|v^j\|_2^2 \le 2\delta.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j = \begin{pmatrix} 2\sum\limits_{j\in S} v^j \otimes v^j & 0 \\ 0 & 2\sum\limits_{j\notin S} v^j \otimes v^j \end{pmatrix},$$

откуда

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j\Big\|_{op} = 2\max\Big\{\Big\|\sum_{j\in S} v^j \otimes v^j\Big\|_{op}, \Big\|\sum_{j\notin S} v^j \otimes v^j\Big\|_{op}\Big\}.$$

Таким образом, достаточно показать такой вероятностный результат.

**Теорема 4.4.** *Пусть случайные векторы $w^1, \dots, w^m$ независимы и их распределения имеют конечный носитель. Предположим, что*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j\Big] = I, \quad \mathbb{E}\big[\|w^j\|_2^2\big] \le \varepsilon.$$

*Тогда*

$$P\Big(\Big\|\sum_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j\Big\|_{op} \le (1+\sqrt{\varepsilon})^2\Big) > 0.$$

Одна из основных ключевах идей работы Маркуса–Спильмана–Сриваставы заключается в том, чтобы посмотреть на норму $\big\|\sum\limits_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j\big\|_{op}$ как на максимальное собственное число матрицы $A = \sum\limits_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j$, а именно, как на максимальный корень $\mathrm{maxroot}(p_A)$ характеристического многочлена $p_A(z) := \det(zI - A)$ и попытаться сравнить его с $\mathrm{maxroot}\big(\mathbb{E}[p_A]\big)$.

Доказательство MCC основано на двух крайне нетривиальных утверждениях.

**Теорема 4.5.** *Пусть $w^1, \dots, w^m$ — независимые случайные векторы в $\mathbb{R}^k$ принимающие конечное число значений. Пусть $A = \sum\limits_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j$. Тогда*

$$P\big(\mathrm{maxroot}(p_A) \le \mathrm{maxroot}\big(\mathbb{E}[p_A]\big)\big) > 0.$$

**Теорема 4.6.** *Пусть $w^1, \dots, w^m$ — независимые случайные векторы в $\mathbb{R}^k$ принимающие конечное число значений. Предположим, что*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{j=1}^{m} w^j \otimes w^j\Big] = I, \quad \mathbb{E}\big[\|w^j\|_2^2\big] \le \varepsilon.$$

*Тогда*

$$\mathrm{maxroot}\big(\mathbb{E}[p_{\sum_{j=1}^m w^j \otimes w^j}]\big) \le (1+\sqrt{\varepsilon})^2.$$

## 5. Проблема Кадисона–Зингера

Пусть $B(\ell^2)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов на $\ell^2$, $A \subset B(\ell^2)$ пространство всех диагональных операторов.

Ограниченные линейные функционалы $\varphi$ на $B(\ell^2)$, для которых $\varphi(I) = 1$ и $\varphi(T) \ge 0$ для всех неотрицательно определенных $T \in B(\ell^2)$, называют состояниями на $B(\ell^2)$. Состояние $\varphi$ называют чистым состоянием на $B(\ell^2)$, если его нельзя представить в виде выпуклой комбинации двух других состояний. Аналогично определяются состояния и чистые состояния на $A$.

**Проблема Кадисона–Зингера (Kadison-Singer problem, 59).** Пусть $\varphi\colon A \to \mathbb{C}$ — чистое состояние. Всегда ли существует единственное состояние $\psi\colon B(\ell^2) \to \mathbb{C}$, продолжающее $\varphi$ на $B(\ell^2)$.

Существование такого продолжения тривиально: пусть $\psi(T) := \varphi(\mathrm{diag} T)$.

Оказывается, одна из переформулировок теоремы Маркуса–Спильмана–Сриваставы влечет единственность в проблеме Кадисона–Зингера и, тем самым, решает ее положительным образом.

## Список литературы

[1] M. Talagrand, Upper and lower bounds for stochastic processes: modern methods and classical problems, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.

[2] R. Van Handel, Chaining, interpolation and convexity II: The contraction principle, Ann. of Probab. 46(3) (2018) 1764–1805.

[3] Marcus, A. W., Spielman, D. A., Srivastava, N. (2015). Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem. Annals of Mathematics, 327–350.