

# Задачи по курсу С.Л. Кузнецова

21 июля 2024 г.

## 1 Упражнения на определения

1. Для следующих секвенций либо постройте вывод в исчислении Ламбека (с умножением), либо найдите интерпретацию формул формальными языками, при которой секвенция не является истинной.

- (a)  $p \rightarrow p/(q \setminus p)$ ;
- (b)  $(p/p)/(p/p) \rightarrow p/p$ ;
- (c)  $p \cdot (q/r) \rightarrow (p \cdot q)/r$ ;
- (d)  $(p \cdot q)/r \rightarrow p \cdot (q/r)$ .

2. Пусть  $\alpha$  – интерпретация формул исчисления Ламбека с умножением, определенная на переменных следующим образом:

$\alpha(np) = \{\text{John, Mary}\} \cup (\{a, \text{the}\} \cdot \{\text{good boy, bad boy, boy}\})$ ;

$\alpha(n) = \{\text{boy}\}$ ;

$\alpha(s) = \alpha(np) \cdot (\{\text{sleeps}\} \cup (\{\text{sees}\} \cdot \alpha(np)) \cup (\{\text{gives}\} \cdot \alpha(np) \cdot \alpha(np)))$ .

Вычислите, чему в таком случае равна интерпретация следующих формул:

- (a)  $\alpha(np \setminus s)$ ;
- (b)  $\alpha(((np \setminus s)/np)/np)$ ;
- (c)  $\alpha(np/n)$ ;
- (d)  $\alpha((np/n) \cdot n)$ .

## 2 Утверждения, оставленные недоказанными на лекции

1. Докажите, что правило сечения

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} \text{ (cut)}$$

устранимо. Иными словами, если секвенции  $\Pi \rightarrow A$  и  $\Gamma, A, \Delta \rightarrow C$  выводятся в исчислении Ламбека без правила сечения, то секвенция  $\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C$  также выводится в исчислении Ламбека без правила сечения.

*Указание. Индукция по (а) размеру выводов секвенций*

*$\Pi \rightarrow A$  и  $\Gamma, A, \Delta \rightarrow C$  и по (б) размеру формулы  $A$ .*

2. Докажите, что правила введения деления справа обратимы: если выводится секвенция  $\Pi \rightarrow A/B$ , то выводится секвенция  $\Pi, B \rightarrow A$  (симметрично — для левого деления).
3. Докажите, что в исчислении Ламбека из гипотезы  $p \rightarrow p \cdot p$  не выводится секвенция  $p \rightarrow q$ .
4. Докажите теорему о сильной полноте исчисления Ламбека: если  $\mathcal{H}$  — (не обязательно конечное) множество секвенций и  $\Pi \rightarrow A$  — секвенция, то  $\Pi \rightarrow A$  выводится в исчислении Ламбека из гипотез  $\mathcal{H}$ , если и только если во всех интерпретациях, в которых истинны все секвенции из  $\mathcal{H}$ , истинна и секвенция  $\Pi \rightarrow A$ .

### 3 Задачи

1. Существует ли секвенция, которая не является истинной ни при какой интерпретации? Рассмотрите два случая:
  - (a) левые части секвенций могут быть пустыми, и формальные языки в интерпретациях могут содержать пустое слово;
  - (b) (\*) левые части секвенций НЕ могут быть пустыми, и формальные языки в интерпретациях НЕ могут содержать пустое слово.
2. Докажите, что если секвенция общезначима для всех интерпретаций в формальных языках над двухбуквенным алфавитом, то она выводится в исчислении Ламбека. Верно ли то же для интерпретаций в формальных языках над однобуквенным алфавитом?