

Категориальные грамматики Ламбека

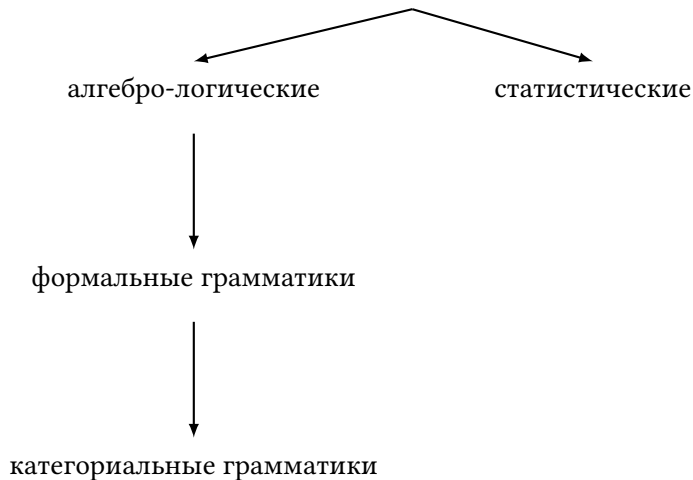
Лекция 1 (20.07.2024)

Степан Кузнецов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Летняя школа «Современная математика» · Дубна

Математические методы в языкознании



Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Формальная грамматика — это конечное описание потенциально бесконечного формального языка (множества слов в некотором алфавите Σ), который аппроксимирует естественный язык.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Формальная грамматика — это конечное описание потенциально бесконечного формального языка (множества слов в некотором алфавите Σ), который аппроксимирует естественный язык.
- ▶ Также формальные грамматики используются для описания компьютерных языков, таких как языки программирования.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Формальная грамматика — это конечное описание потенциально бесконечного формального языка (множества слов в некотором алфавите Σ), который аппроксимирует естественный язык.
- ▶ Также формальные грамматики используются для описания компьютерных языков, таких как языки программирования.
- ▶ Поскольку речь идёт о синтаксисе естественного языка, а не его морфологии, элементами Σ будут слова (словоформы), а не отдельные буквы.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Формальная грамматика — это конечное описание потенциально бесконечного формального языка (множества слов в некотором алфавите Σ), который аппроксимирует естественный язык.
- ▶ Также формальные грамматики используются для описания компьютерных языков, таких как языки программирования.
- ▶ Поскольку речь идёт о синтаксисе естественного языка, а не его морфологии, элементами Σ будут слова (словоформы), а не отдельные буквы.
- ▶ На уровне «чистого синтаксиса» формальная грамматика описывает язык как множество слов, т.е. отвечает на вопрос о синтаксической правильности данного предложения («да/нет»).

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Таким образом, формальные грамматики можно мыслить как перечисляющие алгоритмы специального вида.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Таким образом, формальные грамматики можно мыслить как перечисляющие алгоритмы специального вида.
- ▶ Любой язык, задаваемый формальной грамматикой, перечислим.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Таким образом, формальные грамматики можно мыслить как перечисляющие алгоритмы специального вида.
- ▶ Любой язык, задаваемый формальной грамматикой, перечислим.
- ▶ В большинстве практически интересных случаев эти языки разрешимы, причём довольно эффективно.

Формальные грамматики: синтаксис

- ▶ Таким образом, формальные грамматики можно мыслить как перечисляющие алгоритмы специального вида.
- ▶ Любой язык, задаваемый формальной грамматикой, перечислим.
- ▶ В большинстве практически интересных случаев эти языки разрешимы, причём довольно эффективно.
- ▶ Иначе говоря, алгоритмически разрешима задача проверки правильности предложений.

Pāṇini

Noam Chomsky



Формальные грамматики: семантика

- ▶ Формальная грамматика может дать больше информации о языке, чем правильность/неправильность предложений.

Формальные грамматики: семантика

- ▶ Формальная грамматика может дать больше информации о языке, чем правильность/неправильность предложений.
- ▶ А именно, из правильных предложений с помощью грамматики можно извлекать «*смысл*» — формальную семантику.

Формальные грамматики: семантика

- ▶ Формальная грамматика может дать больше информации о языке, чем правильность/неправильность предложений.
- ▶ А именно, из правильных предложений с помощью грамматики можно извлекать «*смысл*» — формальную семантику.
- ▶ С программистской точки зрения формальная семантика — это некоторое внутреннее, удобное для машинной обработки представление разбираемого текста.

Формальные грамматики: семантика

- ▶ Формальная грамматика может дать больше информации о языке, чем правильность/неправильность предложений.
- ▶ А именно, из правильных предложений с помощью грамматики можно извлекать «*смысл*» — формальную семантику.
- ▶ С программистской точки зрения формальная семантика — это некоторое внутреннее, удобное для машинной обработки представление разбираемого текста.
- ▶ У нас же формальная семантика, следуя Монтегю, даётся функциональными выражениями — λ -термами.

Richard Montague



Категориальные грамматики

- ▶ В формализме категориальных грамматик проверка синтаксической правильности предложения сводится к выводимости связанной с ним логической формулы в некотором неклассическом исчислении.

Категориальные грамматики

- ▶ В формализме категориальных грамматик проверка синтаксической правильности предложения сводится к выводимости связанной с ним логической формулы в некотором неклассическом исчислении.
- ▶ При этом формальная семантика вычисляется параллельно синтаксическому выводу.

Категориальные грамматики

- ▶ В формализме категориальных грамматик проверка синтаксической правильности предложения сводится к выводимости связанной с ним логической формулы в некотором неклассическом исчислении.
- ▶ При этом формальная семантика вычисляется параллельно синтаксическому выводу.
- ▶ Каждой словоформе сопоставляются *синтаксические типы* (один или несколько) и *семантические термы*.

Категориальные грамматики

- ▶ В формализме категориальных грамматик проверка синтаксической правильности предложения сводится к выводимости связанной с ним логической формулы в некотором неклассическом исчислении.
- ▶ При этом формальная семантика вычисляется параллельно синтаксическому выводу.
- ▶ Каждой словоформе сопоставляются *синтаксические типы* (один или несколько) и *семантические термы*.



a_1	a_2	$\dots$	a_n	предложение
A_1	A_2	$\dots$	A_n	$\rightarrow s$
u_1	u_2	$\dots$	u_n	$\rightsquigarrow v$

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Начнём с чисто синтаксической части, о формальной семантике поговорим позже.

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Начнём с чисто синтаксической части, о формальной семантике поговорим позже.
- ▶ Какое исчисление использовать для категориальных грамматик?

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Начнём с чисто синтаксической части, о формальной семантике поговорим позже.
- ▶ Какое исчисление использовать для категориальных грамматик?
- ▶ Начнём с простых примеров:

Иван бежит.

John runs.

$np, \quad np \setminus s \quad \rightarrow s$

Иван любит Марью.

John loves Mary.

$np, \quad (np \setminus s) / np, \quad np \quad \rightarrow s$

The city never sleeps.

$np / n, \quad n, \quad (np \setminus s) / (np \setminus s), \quad np \setminus s \quad \rightarrow s$

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Переменные, или *примитивные типы*:
 np (“noun phrase”), n (“noun”), s (“sentence”), ...

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Переменные, или *примитивные типы*:
 np (“noun phrase”), n (“noun”), s (“sentence”), ...
- ▶ Операции *деления*: левое $A \setminus B$ и правое B / A .

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Переменные, или *примитивные типы*:
 np (“noun phrase”), n (“noun”), s (“sentence”), ...
- ▶ Операции *деления*: левое $A \setminus B$ и правое B / A .
- ▶ Правила сокращения:

$$A, A \setminus B \rightarrow B \qquad B / A, A \rightarrow B$$

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Переменные, или *примитивные типы*:
 np (“noun phrase”), n (“noun”), s (“sentence”), ...
- ▶ Операции *деления*: левое $A \setminus B$ и правое B / A .
- ▶ Правила сокращения:

$$A, A \setminus B \rightarrow B \qquad B / A, A \rightarrow B$$

- ▶ Эти правила напоминают *modus ponens*, поэтому деления можно воспринимать как (направленные) импликации.

Исчисление для категориальной грамматики

- ▶ Переменные, или *примитивные типы*:
 np (“noun phrase”), n (“noun”), s (“sentence”), ...
- ▶ Операции *деления*: левое $A \setminus B$ и правое B / A .
- ▶ Правила сокращения:

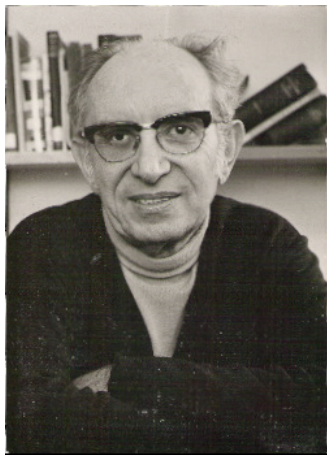
$$A, A \setminus B \rightarrow B \qquad B / A, A \rightarrow B$$

- ▶ Эти правила напоминают *modus ponens*, поэтому деления можно воспринимать как (направленные) импликации.
- ▶ Таким образом определяется *базовая категориальная грамматика*.

Kazimierz Ajdukiewicz



Yehoshua Bar-Hillel



Базовая категориальная грамматика

- ▶ Базовая категориальная грамматика (БКГ) состоит из целевой формулы H (обычно это s) и конечного соответствия между буквами и формулами (*лексикона*): $a \triangleright A$.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Базовая категориальная грамматика (БКГ) состоит из целевой формулы H (обычно это s) и конечного соответствия между буквами и формулами (лексикона): $a \triangleright A$.
- ▶ Слово $w = a_1 \dots a_n$ принимается грамматикой, если найдутся такие формулы $A_1, \dots, A_n$, что
 1. $a_i \triangleright A_i$ для $i = 1, \dots, n$;
 2. последовательность формул $A_1, \dots, A_n$ приводится к H применениями правил сокращения.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Базовая категориальная грамматика (БКГ) состоит из целевой формулы H (обычно это s) и конечного соответствия между буквами и формулами (лексикона): $a \triangleright A$.
- ▶ Слово $w = a_1 \dots a_n$ принимается грамматикой, если найдутся такие формулы $A_1, \dots, A_n$, что
 1. $a_i \triangleright A_i$ для $i = 1, \dots, n$;
 2. последовательность формул $A_1, \dots, A_n$ приводится к H применениями правил сокращения.
- ▶ Эквивалентная *секвенциальная* формулировка:

$$A \rightarrow A \qquad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} \qquad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Базовая категориальная грамматика (БКГ) состоит из целевой формулы H (обычно это s) и конечного соответствия между буквами и формулами (лексикона): $a \triangleright A$.
- ▶ Слово $w = a_1 \dots a_n$ принимается грамматикой, если найдутся такие формулы $A_1, \dots, A_n$, что
 1. $a_i \triangleright A_i$ для $i = 1, \dots, n$;
 2. последовательность формул $A_1, \dots, A_n$ приводится к H применениями правил сокращения.
- ▶ Эквивалентная секвенциальная формулировка:

$$A \rightarrow A \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} \quad \frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

- ▶ Правило сечения (допустимое):

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Мы видим, что исчисление для БКГ довольно примитивно, в нём отсутствуют многие правила.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Мы видим, что исчисление для БКГ довольно примитивно, в нём отсутствуют многие правила.
- ▶ Отсутствие правых правил для импликаций (соответствуют теореме о дедукции) мы впоследствии восполним, когда перейдём к *исчислению Ламбека*.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Мы видим, что исчисление для БКГ довольно примитивно, в нём отсутствуют многие правила.
- ▶ Отсутствие правых правил для импликаций (соответствуют теореме о дедукции) мы впоследствии восполним, когда перейдём к *исчислению Ламбека*.
- ▶ Отсутствие же *структурных правил* принципиально.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Perm}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Weak}$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Contr}$$

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Мы видим, что исчисление для БКГ довольно примитивно, в нём отсутствуют многие правила.
- ▶ Отсутствие правых правил для импликаций (соответствуют теореме о дедукции) мы впоследствии восполним, когда перейдём к *исчислению Ламбека*.
- ▶ Отсутствие же *структурных правил* принципиально.

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Perm}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Weak}$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, A, \Delta \rightarrow C} \text{ Contr}$$

- ▶ Действительно, нельзя произвольно переставлять слова, нельзя добавлять произвольное слово, а два одинаковых слова подряд не эквивалентны одному (“Косил косой косой косой”).

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Таким образом, мы имеем дело с *субструктурной* логической системой.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Таким образом, мы имеем дело с *субструктурной* логической системой.
- ▶ При этом остаётся неявное правило ассоциативности.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Таким образом, мы имеем дело с *субструктурной* логической системой.
- ▶ При этом остаётся неявное правило ассоциативности.
- ▶ Рассматриваются и неассоциативные исчисления для категориальных грамматик.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Таким образом, мы имеем дело с *субструктурной* логической системой.
- ▶ При этом остаётся неявное правило ассоциативности.
- ▶ Рассматриваются и неассоциативные исчисления для категориальных грамматик.
- ▶ Если добавить к исчислению БКГ правые правила для делений:

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} \qquad \frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

получится исчисление Ламбека, а если ещё и структурные правила — импликативный фрагмент интуиционистской логики высказываний.

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Легко видеть, что вывод в БКГ — это частный случай контекстно-свободного вывода (достаточно обратить стрелки: $B \Rightarrow A(A \setminus B)$).

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Легко видеть, что вывод в БКГ — это частный случай контекстно-свободного вывода (достаточно обратить стрелки: $B \Rightarrow A(A \setminus B)$).
- ▶ На самом деле, БКГ эквивалентны контекстно-свободным грамматикам (КСГ), что достигается с помощью нормальной формы Грейбах:

$$A \Rightarrow a$$

$$a \triangleright A$$

$$A \Rightarrow aB$$

$$a \triangleright A / B$$

$$A \Rightarrow aBC$$

$$a \triangleright (A / C) / B$$

Базовая категориальная грамматика

- ▶ Легко видеть, что вывод в БКГ — это частный случай контекстно-свободного вывода (достаточно обратить стрелки: $B \Rightarrow A(A \setminus B)$).
- ▶ На самом деле, БКГ эквивалентны контекстно-свободным грамматикам (КСГ), что достигается с помощью нормальной формы Грейбах:

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow a & a \triangleright A \\ A \Rightarrow aB & a \triangleright A / B \\ A \Rightarrow aBC & a \triangleright (A / C) / B \end{array}$$

- ▶ Напомним, что в общем случае КСГ — это система переписывания слов с правилами вида $A \Rightarrow \alpha$, где A — метасимвол, а α — слово из символов и метасимволов.

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.

$np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl who likes Pete hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

John loves Mary and Pete loves Kate.
 $np \quad (np \setminus s) / np \quad np \quad (s \setminus s) / s \quad np \quad (np \setminus s) / np \quad np \rightarrow s$

Mary loves Pete and hates John.
 $np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) / (np \setminus s) \quad \underbrace{(np \setminus s) / np}_{\rightarrow np \setminus s} \quad np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 np / n n np $(np \setminus s) / np$ $(np \setminus s) / np$ np

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 np / n n $?$ np $(np \setminus s) / np$ $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 np / n n $(n \setminus n) / (s / np)$ np $(np \setminus s) / np$ $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 np / n n $(n \setminus n) / (s / np)$ np $(np \setminus s) / np$ $(np \setminus s) / np$ $np \rightarrow s$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\rightarrow s / np}$

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (s / np) \quad np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad (np \setminus s) / np}_{\not\rightarrow s / np} \quad np \rightarrow \not\rightarrow s$

В базовой категориальной грамматике невозможно из np и $(np \setminus s) / np$ получить s / np . Не хватает $(np \setminus s) / np \leftrightarrow np \setminus (s / np)$.

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (s / np) \quad np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad (np \setminus s) / np}_{\not\rightarrow s / np} \quad np \rightarrow \not\rightarrow s$

В базовой категориальной грамматике невозможно из np и $(np \setminus s) / np$ получить s / np . Не хватает $(np \setminus s) / np \leftrightarrow np \setminus (s / np)$.

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (s / np) \quad np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad (np \setminus s) / np}_{\not\rightarrow s / np} \quad np \rightarrow \not\rightarrow s$

В базовой категориальной грамматике невозможно из np и $(np \setminus s) / np$ получить s / np . Не хватает $(np \setminus s) / np \leftrightarrow np \setminus (s / np)$.

Нужно $(A \setminus B) / C \leftrightarrow A \setminus (B / C)$.

Более сложные конструкции: союзы

The girl whom John likes hates John.
 $np / n \quad n \quad (n \setminus n) / (s / np) \quad np \quad \underbrace{(np \setminus s) / np \quad (np \setminus s) / np}_{\not\rightarrow s / np} \quad np \rightarrow \not\rightarrow s$

В базовой категориальной грамматике невозможно из np и $(np \setminus s) / np$ получить s / np . Не хватает $(np \setminus s) / np \leftrightarrow np \setminus (s / np)$.

Нужно $(A \setminus B) / C \leftrightarrow A \setminus (B / C)$.

(Также мы пока оставляем в стороне вопрос о семантике слов типа “whom”.)

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$		
	$\nrightarrow s / np$		

Более сложные конструкции: транзитивность

(пример на итальянском языке)

Guarda	passare	il	treno.	
он/она наблюдает	проходить		поезд	
s / inf	inf / np	np / n	n	$\rightarrow s$

Cosa	guarda	passare?	
что	он/она наблюдает	проходить	
$q / (s / np)$	s / inf	inf / np	$\nrightarrow q$
	$\underbrace{\hspace{10em}}$		
	$\nrightarrow s / np$		

Нужно: $A / B, B / C \rightarrow A / C$.

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\overline{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B}$$

$$\frac{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}$$

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных $(s, pr, n, \dots)$ с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B}$$

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,
 где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных
 ($s, pr, n, \dots$) с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных ($s, pr, n, \dots$) с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных ($s, pr, n, \dots$) с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow)$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных ($s, pr, n, \dots$) с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}) \text{ — правило сечения}$$

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$,

где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных ($s, pr, n, \dots$) с помощью операций $/$ и $\backslash$.

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /)$$

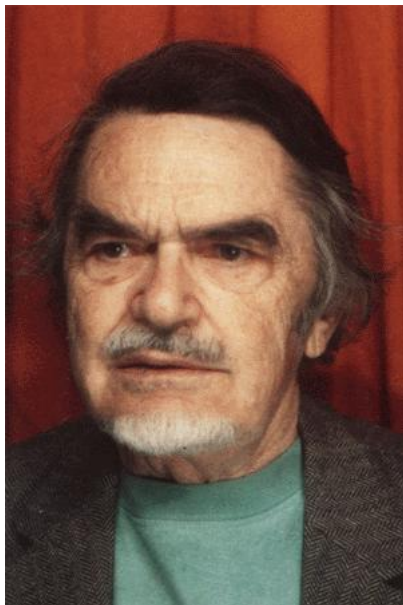
$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \backslash B} (\rightarrow \backslash)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \rightarrow C} (\backslash \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}) \text{ — правило сечения, устранимо}$$

Joachim Lambek



Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{\frac{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} \quad \frac{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} \quad (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{\frac{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /)}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 np \rightarrow np \quad s \rightarrow s
 }{
 np, np \setminus s \rightarrow s
 } (\setminus \rightarrow)
 }{
 np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (/ \rightarrow)
 }{
 np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np
 } (\rightarrow /)
 \quad
 \frac{
 }{
 np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 }
 }{
 np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (/ \rightarrow)$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\begin{array}{c}
 \frac{np \rightarrow np \quad s \rightarrow s}{np \rightarrow np \quad np, np \setminus s \rightarrow s} (\setminus \rightarrow) \\
 \frac{\frac{np \rightarrow np \quad np, np \setminus s \rightarrow s}{np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np} (\rightarrow /) \\
 \frac{\frac{np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (\rightarrow /)}{\frac{n \rightarrow n \quad \frac{np / n, n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (\setminus \rightarrow)}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s} (/ \rightarrow)}
 \end{array}$$

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{
 \frac{
 \frac{
 np \rightarrow np \quad s \rightarrow s
 }{
 np, np \setminus s \rightarrow s
 } (\setminus \rightarrow)
 }{
 np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (/ \rightarrow)
 }{
 np, (np \setminus s) / np \rightarrow s / np
 } (\rightarrow /)
 \quad
 \frac{
 \frac{
 n \rightarrow n \quad np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 }{
 np / n, n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (/ \rightarrow)
 }{
 np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (\setminus \rightarrow)
 }{
 np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \rightarrow s
 } (/ \rightarrow)$$

Вывод закона транзитивности

$$\frac{C \rightarrow C \quad \frac{B \rightarrow B \quad A \rightarrow A}{A / B, B \rightarrow A} (/ \rightarrow)}{\frac{A / B, B / C, C \rightarrow A}{A / B, B / C \rightarrow A / C} (\rightarrow /)} (/ \rightarrow)$$

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

Пустое слово

$$\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип n / n (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

$$\frac{\frac{n \rightarrow n}{\rightarrow n / n} (\rightarrow /) \quad \frac{n \rightarrow n \quad n \rightarrow n}{n / n, n \rightarrow n} (/ \rightarrow)}{(n / n) / (n / n), n \rightarrow n} (/ \rightarrow)$$

Исчисление Ламбека

$$\overline{A \rightarrow A}$$

$$\frac{\Pi, A \rightarrow B}{\Pi \rightarrow B / A} (\rightarrow /), \text{ где } \Pi \text{ не пусто}$$

$$\frac{A, \Pi \rightarrow B}{\Pi \rightarrow A \setminus B} (\rightarrow \setminus), \text{ где } \Pi \text{ не пусто}$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \rightarrow C} (/ \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, B, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \rightarrow C} (\setminus \rightarrow)$$

$$\frac{\Pi \rightarrow A \quad \Gamma, A, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Pi, \Delta \rightarrow C} (\text{cut}), \text{ устранимо}$$

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены
- ▶ Устранимость сечения $\Rightarrow$ алгоритмическая разрешимость

Свойства исчисления Ламбека

- ▶ Правило подстановки
- ▶ Правило эквивалентной замены
- ▶ Устранимость сечения $\Rightarrow$ алгоритмическая разрешимость
- ▶ Свойство подформульности