Категориальные грамматики Ламбека

Лекция 2 (21.07.2024)

Степан Кузнецов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Летняя школа «Современная математика» · Дубна

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \ldots, A_n \to B$,
где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных ($s, np, n, \ldots$) с помощью операций / и \.

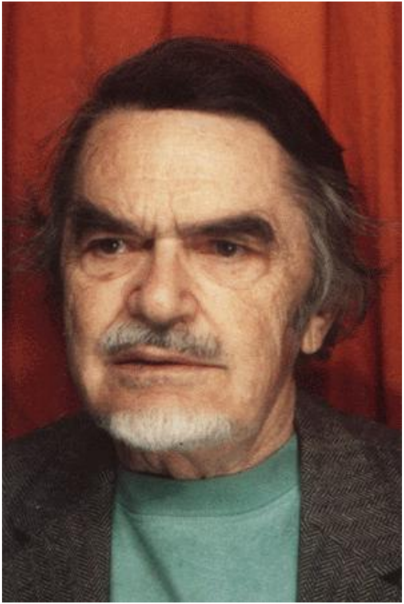
$$\overline{A \to A}$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /) \qquad \frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \backslash)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, B \,/\, A, \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \to C}\ (\backslash \to)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, \Delta \to C}\ (\mathrm{cut})$$ — правило *сечения*, устранимо

Joachim Lambek



Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\frac{}{np \,/\, n, n, (n \setminus n) \,/ (s \,/\, np), np, (np \setminus s) \,/\, np, (np \setminus s) \,/\, np, np \to s}$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$\dfrac{\dfrac{}{np, (np \setminus s) / np \to s / np} \qquad \dfrac{}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \to s}}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \to s}\ (/ \to)$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{np, (np \setminus s) / np, np \to s}}{np, (np \setminus s) / np \to s / np}\,(\to /) \qquad \dfrac{}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \to s}}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/ \to)
$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{np \to np \qquad \dfrac{np \to np \quad s \to s}{np, np \setminus s \to s}\,(\setminus \to)}{np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/ \to)
}{np, (np \setminus s) / np \to s / np}\,(\to /)
\qquad
\dfrac{}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \to s}
}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/ \to)
$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{np \to np \qquad \dfrac{np \to np \quad s \to s}{np, np \setminus s \to s}\,(\setminus \to)}{np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/ \to)}{np, (np \setminus s) / np \to s / np}\,(\to /) \qquad \dfrac{n \to n \qquad \dfrac{}{np / n, n, (np \setminus s) / np, np \to s}}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(\setminus \to)}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/ \to)
$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод секвенции в исчислении Ламбека

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{np \to np \qquad \dfrac{np \to np \qquad s \to s}{np, np \setminus s \to s}\,(\setminus\to)}{np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/\to)
}{np, (np \setminus s) / np \to s / np}\,(\to /)
\qquad
\dfrac{n \to n \qquad \dfrac{n \to n \qquad np, (np \setminus s) / np, np \to s}{np / n, n, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/\to)}{np / n, n, n \setminus n, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(\setminus\to)
}{np / n, n, (n \setminus n) / (s / np), np, (np \setminus s) / np, (np \setminus s) / np, np \to s}\,(/\to)
$$

The girl whom John loves hates John.

Вывод закона транзитивности

$$\cfrac{\cfrac{C \to C \qquad \cfrac{B \to B \quad A \to A}{A \,/\, B, B \to A}\;(/\,\to)}{A \,/\, B, B \,/\, C, C \to A}\;(/\,\to)}{A \,/\, B, B \,/\, C \to A \,/\, C}\;(\to\,/)$$

Пустое слово

$$\frac{n \to n}{\to n \,/\, n}$$

Пустое слово

$$\frac{n \to n}{\to n \,/\, n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип $n \,/\, n$

Пустое слово

$$\frac{n \to n}{\to n \,/\, n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип $n \,/\, n$ (имя прилагательное).

Пустое слово

$$\frac{n \to n}{\to n \,/\, n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип $n \,/\, n$ (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

Пустое слово

$$\frac{n \to n}{\to n \,/\, n}$$

Значит, пустое слово подходит под синтаксический тип $n \,/\, n$ (имя прилагательное).

Плохо: помимо “very interesting book” получаем также “very book”.

$$\frac{\dfrac{n \to n}{\to n \,/\, n}\,(\to /) \qquad \dfrac{n \to n \quad n \to n}{n \,/\, n, n \to n}\,(/ \to)}{(n \,/\, n) \,/ (n \,/\, n), n \to n}\,(/ \to)$$

Исчисление Ламбека

$$\frac{}{A \to A}$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \text{ непусто}$$

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \,\backslash\, B}\ (\to \backslash),\ \text{где } \Pi \text{ непусто}$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, B \,/\, A, \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, A \,\backslash\, B, \Delta \to C}\ (\backslash \to)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, \Delta \to C}\ (\text{cut}),\ \text{устранимо}$$

Свойства исчисления Ламбека

- Правило подстановки

Свойства исчисления Ламбека

- Правило подстановки
- Правило эквивалентной замены

Свойства исчисления Ламбека

- Правило подстановки
- Правило эквивалентной замены
- Устранимость сечения $\Rightarrow$ алгоритмическая разрешимость

Свойства исчисления Ламбека

- Правило подстановки
- Правило эквивалентной замены
- Устранимость сечения $\Rightarrow$ алгоритмическая разрешимость
- Свойство подформульности

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Σ — множество лексем.
Σ^+ — множество непустых цепочек, составленных из элементов Σ.
Всякое подмножество Σ^+ — *формальный язык.*

Если A и B — формальные языки, то $B \,/\, A$ состоит в точности из таких непустых цепочек u, что при добавлении к u справа *любой* цепочки v из A получается цепочка из B.

$$B \Big/ A = \{u \mid (\forall v \in A)\, uv \in B\}$$

$$A \Big\backslash B = \{u \mid (\forall v \in A)\, vu \in B\}$$

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, np, n, ...) — *переменные* по формальным языкам.

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, np, n, ...) — *переменные* по формальным языкам.
Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, np, n, ...) — *переменные* по формальным языкам.
Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.
Секвенция $A_1, \ldots, A_n \to B$ *общезначима* (всегда истинна), если при любых значениях переменных для любых цепочек u_i из A_i цепочка $u_1 \ldots u_n$ лежит в B.

Интерпретация исчисления Ламбека на формальных языках

Примитивные типы (s, np, n, …) — *переменные* по формальным языкам.
Значения сложных типов однозначно определяются значениями переменных.
Секвенция $A_1, \dots, A_n \to B$ *общезначима* (всегда истинна), если при любых значениях переменных для любых цепочек u_i из A_i цепочка $u_1 \dots u_n$ лежит в B.

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

Wojciech Buszkowski

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

$\boxed{\Leftarrow}$ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

$\boxed{\Leftarrow}$ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

$\boxed{\Rightarrow}$ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

$\boxed{\Leftarrow}$ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

$\boxed{\Rightarrow}$ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \to p$ выводима.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

$\boxed{\Leftarrow}$ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

$\boxed{\Rightarrow}$ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \to p$ выводима.

Лемма. Секвенция $A_1, \dots, A_n \to B$ выводима тогда и только тогда, когда цепочка $A_1 \dots A_n$ лежит в языке, соответствующем типу B.

Доказательство теоремы о полноте

Теорема о полноте. Секвенция общезначима тогда и только тогда, когда её можно вывести в исчислении Ламбека.

$\boxed{\Leftarrow}$ Аксиомы общезначимы; правила вывода не портят общезначимость.

$\boxed{\Rightarrow}$ Построим специальную интерпретацию. В качестве Σ возьмём множество всех синтаксических типов.

Переменная p интерпретируется множеством таких цепочек $A_1 \dots A_n$, что секвенция $A_1, \dots, A_n \to p$ выводима.

Лемма. Секвенция $A_1, \dots, A_n \to B$ выводима тогда и только тогда, когда цепочка $A_1 \dots A_n$ лежит в языке, соответствующем типу B.

Секвенция общезначима $\Rightarrow$ истинна при специальной интерпретации $\Rightarrow$ выводима.

Доказательство теоремы о полноте

- Более формально, полагаем Σ — множество всех формул и определяем

$$\alpha(B) = \{A_1 \dots A_n \mid \vdash A_1, \dots, A_n \to B\}$$

Доказательство теоремы о полноте

- Более формально, полагаем Σ — множество всех формул и определяем
$$\alpha(B) = \{A_1 \dots A_n \mid \vdash A_1, \dots, A_n \to B\}$$
- Лемма о корректности:
$$\alpha(A \setminus B) = \alpha(A) \setminus \alpha(B), \qquad \alpha(B / A) = \alpha(B) / \alpha(A).$$

Доказательство теоремы о полноте

- Более формально, полагаем Σ — множество всех формул и определяем

$$\alpha(B) = \{A_1 \ldots A_n \mid \vdash A_1, \ldots, A_n \to B\}$$

- Лемма о корректности:

$$\alpha(A \setminus B) = \alpha(A) \setminus \alpha(B), \qquad \alpha(B \,/\, A) = \alpha(B) \,/\, \alpha(A).$$

- Кроме того, всегда $A \in \alpha(A)$, поэтому если секвенция общезначима, имеем $A_1 \ldots A_n \in \alpha(A_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(A_n) \subseteq \alpha(B)$. Следовательно, $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима.

Доказательство теоремы о полноте

- Более формально, полагаем Σ — множество всех формул и определяем
$$\alpha(B) = \{A_1 \dots A_n \mid \vdash A_1, \dots, A_n \to B\}$$
- Лемма о корректности:
$$\alpha(A \setminus B) = \alpha(A) \setminus \alpha(B), \qquad \alpha(B / A) = \alpha(B) / \alpha(A).$$
- Кроме того, всегда $A \in \alpha(A)$, поэтому если секвенция общезначима, имеем $A_1 \dots A_n \in \alpha(A_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(A_n) \subseteq \alpha(B)$. Следовательно, $A_1, \dots, A_n \to B$ выводима.
- Это рассуждение распространяется на выводимости из гипотез — сильная полнота.

Умножение

- В исчисление Ламбека также обычно включают операцию *умножения* (аналог конъюнкции):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to B}{\Pi, \Delta \to A \cdot B}$$

Умножение

- В исчисление Ламбека также обычно включают операцию *умножения* (аналог конъюнкции):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to B}{\Pi, \Delta \to A \cdot B}$$

- От умножения в знаменателе можно избавиться:
$(A \cdot B) \setminus C \leftrightarrow B \setminus (A \setminus C) \qquad C / (A \cdot B) \leftrightarrow (C / B) / A.$

Умножение

- В исчисление Ламбека также обычно включают операцию *умножения* (аналог конъюнкции):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to B}{\Pi, \Delta \to A \cdot B}$$

- От умножения в знаменателе можно избавиться:
$(A \cdot B) \setminus C \leftrightarrow B \setminus (A \setminus C) \qquad C \,/\, (A \cdot B) \leftrightarrow (C \,/\, B) \,/\, A.$
- Умножение также имеет естественную интерпретацию на формальных языках:

$$A \cdot B = \{uv \mid u \in A, v \in B\}.$$

Умножение

- В исчисление Ламбека также обычно включают операцию *умножения* (аналог конъюнкции):

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C} \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to B}{\Pi, \Delta \to A \cdot B}$$

- От умножения в знаменателе можно избавиться: $(A \cdot B) \setminus C \leftrightarrow B \setminus (A \setminus C) \qquad C \mathbin{/} (A \cdot B) \leftrightarrow (C \mathbin{/} B) \mathbin{/} A$.
- Умножение также имеет естественную интерпретацию на формальных языках:

$$A \cdot B = \{uv \mid u \in A, v \in B\}.$$

- Теорема о полноте также верна (Пентус 1995), но доказывается намного сложнее.

Проблемы с полнотой с умножением

- Конструкция Бушковского не сработает: например, $(p \cdot q) \,/\, r, r$ лежит в $\alpha(p \cdot q)$, но не в $\alpha(p) \cdot \alpha(q)$.

Проблемы с полнотой с умножением

- Конструкция Бушковского не сработает: например, $(p \cdot q) \,/\, r, r$ лежит в $\alpha(p \cdot q)$, но не в $\alpha(p) \cdot \alpha(q)$.
- Сильная полнота не имеет места (Бушковский 2010): секвенция $p \to q$ семантически следует из $p \to p \cdot p$ (последняя даёт $\alpha(p) = \varnothing$), но не выводится.

Проблемы с полнотой с умножением

- Конструкция Бушковского не сработает: например, $(p \cdot q) \,/\, r, r$ лежит в $\alpha(p \cdot q)$, но не в $\alpha(p) \cdot \alpha(q)$.
- Сильная полнота не имеет места (Бушковский 2010): секвенция $p \to q$ семантически следует из $p \to p \cdot p$ (последняя даёт $\alpha(p) = \varnothing$), но не выводится.
- Для случая, когда разрешено пустое слово: $(p \setminus q) \cdot p \to q \cdot p$.

Проблемы с полнотой с умножением

- Конструкция Бушковского не сработает: например, $(p \cdot q) \,/\, r, r$ лежит в $\alpha(p \cdot q)$, но не в $\alpha(p) \cdot \alpha(q)$.
- Сильная полнота не имеет места (Бушковский 2010): секвенция $p \to q$ семантически следует из $p \to p \cdot p$ (последняя даёт $\alpha(p) = \varnothing$), но не выводится.
- Для случая, когда разрешено пустое слово: $(p \setminus q) \cdot p \to q \cdot p$.
- Слабая полнота имеет место (Пентус 1995).