Категориальные грамматики Ламбека

Лекция 3 (23.07.2024)

Степан Кузнецов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Летняя школа «Современная математика» · Дубна

Исчисление Ламбека

Секвенция — выражение вида $A_1, \ldots, A_n \to B$,
где A_i и B — формулы (синтаксические типы), построенные из примитивных $(s, np, n, \ldots)$ с помощью операций $\cdot$, $/$ и $\backslash$.

$$\frac{}{A \to A}$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /) \qquad \frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \,\backslash\, B}\ (\to \backslash)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, B \,/\, A, \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, A \,\backslash\, B, \Delta \to C}\ (\backslash \to)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \to C}\ (\cdot \to) \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Delta \to B}{\Pi, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot)$$

$$\frac{\Pi \to A \quad \Gamma, A, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, \Delta \to C}\ (\mathrm{cut})$$ — правило *сечения*, устранимо

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Контекстно-свободная грамматика — это система переписывания слов, в которой заменяемое слово всегда состоит из одного *нетерминального* символа.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Контекстно-свободная грамматика — это система переписывания слов, в которой заменяемое слово всегда состоит из одного *нетерминального* символа.
- А именно, есть два алфавита, Σ (терминальный) и N (нетерминальный), и стартовый символ $S \in N$.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Контекстно-свободная грамматика — это система переписывания слов, в которой заменяемое слово всегда состоит из одного *нетерминального* символа.
- А именно, есть два алфавита, Σ (терминальный) и N (нетерминальный), и стартовый символ $S \in N$.
- Правила переписывания имеют вид $A \Rightarrow \alpha$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ и применяются «независимо от контекста»: $\eta A \theta \Rightarrow \eta \alpha \theta$.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Контекстно-свободная грамматика — это система переписывания слов, в которой заменяемое слово всегда состоит из одного *нетерминального* символа.
- А именно, есть два алфавита, Σ (терминальный) и N (нетерминальный), и стартовый символ $S \in N$.
- Правила переписывания имеют вид $A \Rightarrow \alpha$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ и применяются «независимо от контекста»: $\eta A \theta \Rightarrow \eta \alpha \theta$.
- Терминальное слово $w \in \Sigma^*$ порождается грамматикой, если $S \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Контекстно-свободная грамматика — это система переписывания слов, в которой заменяемое слово всегда состоит из одного *нетерминального* символа.
- А именно, есть два алфавита, Σ (терминальный) и N (нетерминальный), и стартовый символ $S \in N$.
- Правила переписывания имеют вид $A \Rightarrow \alpha$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ и применяются «независимо от контекста»: $\eta A \theta \Rightarrow \eta \alpha \theta$.
- Терминальное слово $w \in \Sigma^*$ порождается грамматикой, если $S \Rightarrow \ldots \Rightarrow w$.
- Пример: $N = \{S, NP, VP, VT\}$, $\Sigma = \{\mathrm{John}, \mathrm{Mary}, \mathrm{loves}\}$

$$\begin{array}{ll} S \Rightarrow NP\ \ VP & NP \Rightarrow \mathrm{John} \\ VP \Rightarrow VT\ \ NP & NP \Rightarrow \mathrm{Mary} \\ & VT \Rightarrow \mathrm{loves} \end{array}$$

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Если в формулах нет умножения и нет делений в знаменателях (вложенные деления), то выводимость в исчислении Ламбека эквивалентно выводимости в БКГ.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Если в формулах нет умножения и нет делений в знаменателях (вложенные деления), то выводимость в исчислении Ламбека эквивалентно выводимости в БКГ.
- Следовательно, любой контекстно-свободный язык без пустого слова задаётся некоторой грамматикой Ламбека.

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Если в формулах нет умножения и нет делений в знаменателях (вложенные деления), то выводимость в исчислении Ламбека эквивалентно выводимости в БКГ.
- Следовательно, любой контекстно-свободный язык без пустого слова задаётся некоторой грамматикой Ламбека.
- Действительно, БКГ преобразуется в контекстно-свободную грамматику переворачиванием стрелок:

$$
\begin{array}{c|c}
A, A \setminus B \to B & B \Rightarrow A\,(A \setminus B) \\
B \,/\, A, A \to B & B \Rightarrow (B \,/\, A)\,A \\
a \rhd A & A \Rightarrow a
\end{array}
$$

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

- Если в формулах нет умножения и нет делений в знаменателях (вложенные деления), то выводимость в исчислении Ламбека эквивалентно выводимости в БКГ.
- Следовательно, любой контекстно-свободный язык без пустого слова задаётся некоторой грамматикой Ламбека.
- Действительно, БКГ преобразуется в контекстно-свободную грамматику переворачиванием стрелок:

$$
\begin{array}{c|c}
A, A \setminus B \to B & B \Rightarrow A\ (A \setminus B) \\
B \,/\, A, A \to B & B \Rightarrow (B \,/\, A)\ A \\
a \triangleright A & A \Rightarrow a
\end{array}
$$

- Обратное утверждение долгое время оставалось открытым вопросом (гипотеза Хомского), пока в 1992 г. положительный ответ не получил Пентус.

Преобразование контекстно-свободной грамматики в БКГ

- Чтобы получить из контекстно-свободной грамматики БКГ (и, следовательно, грамматику Ламбека), сначала приведём исходную грамматику к *нормальной форме Грейбах.*

Преобразование контекстно-свободной грамматики в БКГ

- Чтобы получить из контекстно-свободной грамматики БКГ (и, следовательно, грамматику Ламбека), сначала приведём исходную грамматику к *нормальной форме Грейбах.*
- В нормальной форме Грейбах правила имеют один из трёх видов:

$$A \Rightarrow a \qquad A \Rightarrow aB \qquad A \to aBC$$

Преобразование контекстно-свободной грамматики в БКГ

- Чтобы получить из контекстно-свободной грамматики БКГ (и, следовательно, грамматику Ламбека), сначала приведём исходную грамматику к *нормальной форме Грейбах*.
- В нормальной форме Грейбах правила имеют один из трёх видов:

$$A \Rightarrow a \qquad A \Rightarrow aB \qquad A \to aBC$$

- Эти правила преобразуются в лексикон БКГ следующим образом (и легко видеть, что полученная БКГ задаёт тот же язык):

$$\begin{array}{r|c} A \Rightarrow a & a \rhd A \\ A \Rightarrow aB & a \rhd A \,/\, B \\ A \Rightarrow aBC & a \rhd (A \,/\, C) \,/\, B \end{array}$$

Теорема Пентуса

Теорема

Всякий язык, задаваемый грамматикой Ламбека, можно задать контекстно-свободной грамматикой.

Теорема Пентуса

Теорема

Всякий язык, задаваемый грамматикой Ламбека, можно задать контекстно-свободной грамматикой.

- Контекстно-свободный вывод по сути является многократным применением правила сечения.

Теорема Пентуса

Теорема

Всякий язык, задаваемый грамматикой Ламбека, можно задать контекстно-свободной грамматикой.

- Контекстно-свободный вывод по сути является многократным применением правила сечения.
- Таким образом, нужно сделать преобразование вывода, как бы обратное устранению сечения.

Теорема Пентуса

Теорема

Всякий язык, задаваемый грамматикой Ламбека, можно задать контекстно-свободной грамматикой.

- Контекстно-свободный вывод по сути является многократным применением правила сечения.
- Таким образом, нужно сделать преобразование вывода, как бы обратное устранению сечения.
- Это делается с помощью *интерполяционной теоремы.*

Мати Рейнович Пентус

Интерпретация в свободной группе

- Пусть $\mathbb{FG}$ — свободная группа, порождённая счётным числом образующих (соответствуют переменным).

Интерпретация в свободной группе

- Пусть $\mathbb{FG}$ — свободная группа, порождённая счётным числом образующих (соответствуют переменным).
- Интерпретация ламбековых формул:

$$[\![A \cdot B]\!] = [\![A]\!][\![B]\!] \qquad [\![A \setminus B]\!] = [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!] \qquad [\![B \,/\, A]\!] = [\![B]\!][\![A]\!]^{-1}$$

Интерпретация в свободной группе

- Пусть $\mathbb{FG}$ — свободная группа, порождённая счётным числом образующих (соответствуют переменным).
- Интерпретация ламбековых формул:

$$[\![A \cdot B]\!] = [\![A]\!][\![B]\!] \qquad [\![A \setminus B]\!] = [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!] \qquad [\![B \,/\, A]\!] = [\![B]\!][\![A]\!]^{-1}$$

- Легко видеть, что эта интерпретация корректна (но не полна): если $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима, то $[\![A_1]\!] \ldots [\![A_n]\!] = [\![B]\!]$, или, что то же, $[\![A_n]\!]^{-1} \ldots [\![A_1]\!]^{-1}[\![B]\!] = \varepsilon$.

Интерпретация в свободной группе

- Пусть $\mathbb{FG}$ — свободная группа, порождённая счётным числом образующих (соответствуют переменным).
- Интерпретация ламбековых формул:

$$[\![A \cdot B]\!] = [\![A]\!][\![B]\!] \qquad [\![A \setminus B]\!] = [\![A]\!]^{-1}[\![B]\!] \qquad [\![B \,/\, A]\!] = [\![B]\!][\![A]\!]^{-1}$$

- Легко видеть, что эта интерпретация корректна (но не полна): если $A_1, \dots, A_n \to B$ выводима, то $[\![A_1]\!] \dots [\![A_n]\!] = [\![B]\!]$, или, что то же, $[\![A_n]\!]^{-1} \dots [\![A_1]\!]^{-1}[\![B]\!] = \varepsilon$.
- Также определим *длину* $|A|$ формулы A как число вхождений в неё переменных. Для $u \in \mathbb{FG}$ определим $|u|$ как длину несократимого слова, соответствующего элементу u.

Интерполяция

Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждая переменная входит в неё не более 2 раз.

Лемма (Д. Роорда, М. Пентус)

Пусть $\Phi, \Theta, \Psi \to C$ *— выводимая тонкая секвенция,* Θ *непусто. Тогда существует формула-интерполянт* E *со следующими свойствами:*

1. *секвенции* $\Theta \to E$ *и* $\Phi, E, \Psi \to C$ *выводимы;*
2. *данные секвенции являются тонкими;*
3. $|E| = |[\![\Theta]\!]|$.

Интерполяция

- Для доказательства интерполяционной леммы в такой форме используется разработанная Роордой сильная форма интерполяции Линдона, в которой учитывается не только полярность, но и количества вхождений переменных:

$$
\begin{aligned}
\#^+_p(E) &\leqslant \min\{\#^+_p(\Theta), \#^+_p(C) + \#^-_p(\Phi\Psi)\} \\
\#^-_p(E) &\leqslant \min\{\#^-_p(\Theta), \#^-_p(C) + \#^+_p(\Phi\Psi)\}
\end{aligned}
$$

Интерполяция

- Для доказательства интерполяционной леммы в такой форме используется разработанная Роордой сильная форма интерполяции Линдона, в которой учитывается не только полярность, но и количества вхождений переменных:

$$\#_p^+(E) \leqslant \min\{\#_p^+(\Theta), \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Psi)\}$$
$$\#_p^-(E) \leqslant \min\{\#_p^-(\Theta), \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Psi)\}$$

- Существования такого интерполянта доказывается индукцией по выводу без сечения (метод Маехары – Шютте).

Интерполяция

- Тонкость секвенций $\Theta \to E$ и $\Phi, E, \Psi \to C$ получается как раз из условий на счётчики:

$$\#_p^+(E) + \#_p^-(\Theta) \leqslant \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$
$$\#_p^-(E) + \#_p^+(\Theta) \leqslant \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$

Интерполяция

- Тонкость секвенций $\Theta \to E$ и $\Phi, E, \Psi \to C$ получается как раз из условий на счётчики:

$$\#_p^+(E) + \#_p^-(\Theta) \leqslant \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$
$$\#_p^-(E) + \#_p^+(\Theta) \leqslant \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$

- В E никакая переменная не может входить больше 1 раза: иначе он входит два раза и в Θ, и в Φ, Ψ, C, что противоречит тонкости.

Интерполяция

- Тонкость секвенций $\Theta \to E$ и $\Phi, E, \Psi \to C$ получается как раз из условий на счётчики:

$$\#_p^+(E) + \#_p^-(\Theta) \leqslant \#_p^+(C) + \#_p^-(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$
$$\#_p^-(E) + \#_p^+(\Theta) \leqslant \#_p^-(C) + \#_p^+(\Phi\Theta\Psi) \leqslant 1$$

- В E никакая переменная не может входить больше 1 раза: иначе он входит два раза и в Θ, и в Φ, Ψ, C, что противоречит тонкости.
- Значит, $|E| = |[\![E]\!]| = |[\![\Theta]\!]|$ (при вычислении $[\![E]\!]$ сокращений не происходит).

BR-лемма

- Финальный компонент доказательства Пентуса — некоторое чисто алгебраическое утверждение, называемое *BR-лемма* (лемма о бинарной редукции).

BR-лемма

- Финальный компонент доказательства Пентуса — некоторое чисто алгебраическое утверждение, называемое *BR-лемма* (лемма о бинарной редукции).

BR-лемма

Если $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{FG}$, $n > 1$ *и* $u_1 \dots u_n = \varepsilon$, *то найдётся* $k < n$, *для которого* $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max\{|u_k|, |u_{k+1}|\}$.

BR-лемма

- Финальный компонент доказательства Пентуса — некоторое чисто алгебраическое утверждение, называемое *BR-лемма* (лемма о бинарной редукции).

BR-лемма

Если $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{FG}$, $n > 1$ *и* $u_1 \ldots u_n = \varepsilon$, *то найдётся* $k < n$, *для которого* $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max\{|u_k|, |u_{k+1}|\}$.

- BR-лемма легко доказывается от противного.

BR-лемма

- Финальный компонент доказательства Пентуса — некоторое чисто алгебраическое утверждение, называемое *BR-лемма* (лемма о бинарной редукции).

BR-лемма

Если $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{FG}$*,* $n > 1$ *и* $u_1 \ldots u_n = \varepsilon$*, то найдётся* $k < n$*, для которого* $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max\{|u_k|, |u_{k+1}|\}$*.*

- BR-лемма легко доказывается от противного.
- Отметим, что в коммутативном случае BR-лемма не имеет места, и аналога теоремы Пентуса там нет: существует язык, порождаемый коммутативной грамматикой Ламбека, при этом не являющийся перестановочным замыканием контекстно-свободного языка (Пшеницын 2022).

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \ldots, A_s \to B$, где $|A_1|, \ldots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \ldots, A_s \to B$, где $|A_1|, \ldots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.
- Пусть $|A_1|, \ldots, |A_n|, |B| \leqslant m$ и секвенция $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима в исчислении Ламбека. Тогда утверждается, что она выводима в Lcut_m.

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \dots, A_s \to B$, где $|A_1|, \dots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.
- Пусть $|A_1|, \dots, |A_n|, |B| \leqslant m$ и секвенция $A_1, \dots, A_n \to B$ выводима в исчислении Ламбека. Тогда утверждается, что она выводима в Lcut_m.
- Действительно, с помощью BR-леммы выявим пару формул с большим сокращением и проинтерполируем её.

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \ldots, A_s \to B$, где $|A_1|, \ldots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.
- Пусть $|A_1|, \ldots, |A_n|, |B| \leqslant m$ и секвенция $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима в исчислении Ламбека. Тогда утверждается, что она выводима в Lcut_m.
- Действительно, с помощью BR-леммы выявим пару формул с большим сокращением и проинтерполируем её.
- Если это пара A_n, B, интерполируем остальное.

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \ldots, A_s \to B$, где $|A_1|, \ldots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.
- Пусть $|A_1|, \ldots, |A_n|, |B| \leqslant m$ и секвенция $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима в исчислении Ламбека. Тогда утверждается, что она выводима в Lcut_m.
- Действительно, с помощью BR-леммы выявим пару формул с большим сокращением и проинтерполируем её.
- Если это пара A_n, B, интерполируем остальное.
- Пусть теперь m — наибольшая сложность формулы в грамматике.

Доказательство теоремы Пентуса

- Определим вспомогательное исчисление Lcut_m, в котором есть только правило сечения, а аксиомами являются все выводимые секвенции вида $A_1, \ldots, A_s \to B$, где $|A_1|, \ldots, |A_s|, |B| \leqslant m$ и $s \leqslant 2$.
- Пусть $|A_1|, \ldots, |A_n|, |B| \leqslant m$ и секвенция $A_1, \ldots, A_n \to B$ выводима в исчислении Ламбека. Тогда утверждается, что она выводима в Lcut_m.
- Действительно, с помощью BR-леммы выявим пару формул с большим сокращением и проинтерполируем её.
- Если это пара A_n, B, интерполируем остальное.
- Пусть теперь m — наибольшая сложность формулы в грамматике.
- Вывод в Lcut_m легко преобразуется в контекстно-свободный.

Доказательство теоремы Пентуса

- Аккуратно утверждение о доказуемости $A_1, \ldots, A_n \to B$ в Lcut_m осуществляется индукцией по n.

Доказательство теоремы Пентуса

- Аккуратно утверждение о доказуемости $A_1, \ldots, A_n \to B$ в Lcut_m осуществляется индукцией по n.
- Докажем утверждение сначала для тонких секвенций.

Доказательство теоремы Пентуса

- Аккуратно утверждение о доказуемости $A_1, \dots, A_n \to B$ в Lcut_m осуществляется индукцией по n.
- Докажем утверждение сначала для тонких секвенций.
- При $n \geqslant 2$ эта секвенция является аксиомой Lcut_m.

Доказательство теоремы Пентуса

- Аккуратно утверждение о доказуемости $A_1, \ldots, A_n \to B$ в Lcut_m осуществляется индукцией по n.
- Докажем утверждение сначала для тонких секвенций.
- При $n \geqslant 2$ эта секвенция является аксиомой Lcut_m.
- Иначе воспользуемся равенством $[\![A_1]\!] \ldots [\![A_n]\!][\![B]\!]^{-1} = \varepsilon$. Положим $u_i = [\![A_i]\!]$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $u_{n+1} = [\![B]\!]^{-1}$.

Доказательство теоремы Пентуса

- Аккуратно утверждение о доказуемости $A_1, \ldots, A_n \to B$ в Lcut_m осуществляется индукцией по n.
- Докажем утверждение сначала для тонких секвенций.
- При $n \geqslant 2$ эта секвенция является аксиомой Lcut_m.
- Иначе воспользуемся равенством $[\![A_1]\!] \ldots [\![A_n]\!][\![B]\!]^{-1} = \varepsilon$. Положим $u_i = [\![A_i]\!]$ ($i = 1, \ldots, n$) и $u_{n+1} = [\![B]\!]^{-1}$.
- По BR-лемме найдём такое k, что $|u_k u_{k+1}| \leqslant \max\{|u_k|, |u_{k+1}|\} \leqslant m$.

Доказательство теоремы Пентуса

Случай 1: $k < n$. Тогда проинтерполируем $\Theta = A_k, A_{k+1}$ интерполянтом E:

1. $|E| = |[\![A_k, A_{k+1}]\!]| = |u_k u_{k+1}| \leqslant m$;
2. $\vdash A_k, A_{k+1} \to E$ — это аксиома Lcut_m;
3. $\vdash A_1, \dots, A_{k-1}, E, A_{k+2}, \dots, A_n \to B$ — секвенция тонкая, применимо предположение индукции.

Теперь вывод достраивается применением правила сечения:

$$\frac{A_k, A_{k+1} \to E \qquad A_1, \dots, E, \dots, A_n \to B}{A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n \to B}$$

Доказательство теоремы Пентуса

Случай 2: $k = n$. Интерполируем $\Theta = A_1, \dots, A_{n-1}$.

1. $|E| = |[\![A_1, \dots, A_{n-1}]\!]| = |[\![A_n]\!][\![B]\!]^{-1}| = |u_n u_{n+1}| \leqslant m$;
2. $\vdash E, A_n \to B$ — аксиома;
3. $\vdash A_1, \dots, A_{n-1} \to E$ — выводима в Lcut_m по предположению индукции.

Достраиваем вывод:

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1} \to E \quad E, A_n \to B}{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \to B}$$

Доказательство теоремы Пентуса

Случай 2: $k = n$. Интерполируем $\Theta = A_1, \dots, A_{n-1}$.

1. $|E| = |[\![A_1, \dots, A_{n-1}]\!]| = |[\![A_n]\!][\![B]\!]^{-1}| = |u_n u_{n+1}| \leqslant m$;
2. $\vdash E, A_n \to B$ — аксиома;
3. $\vdash A_1, \dots, A_{n-1} \to E$ — выводима в Lcut_m по предположению индукции.

Достраиваем вывод:

$$\frac{A_1, \dots, A_{n-1} \to E \quad E, A_n \to B}{A_1, \dots, A_{n-1}, A_n \to B}$$

Любая выводимая секвенция получается из выводимой тонкой секвенции отождествлением некоторых переменных.
Проводим доказательство для тонкой секвенции, потом применяем подстановку.

Доказательство теоремы Пентуса

Построение контекстно-свободной грамматики:

- Нетерминалы = ламбековы формулы сложности $\leqslant m$.
- Правила — вида $A \Rightarrow a$, где $a \triangleright A$, и вида $B \Rightarrow A_1 \ldots A_s$ для соответствующих аксиом Lcut_m.

К сожалению, грамматика получается экспоненциального размера.