Задачи к курсу
"Дискретные группы движений в трех геометриях"

1. Метрика на евклидовой плоскости

Рассмотрим плоскость $\mathbf{R}^2$ с обычными координатными функциями x и y. Евклидова метрика задается элементом длины

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

который измеряет длину касательных векторов в каждой точке $\mathbf{R}^2$. *Путем* в $\mathbf{R}^2$ называется любое кусочно-дифференцируемое отображение отрезка $\gamma : I = [0,1] \to \mathbf{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. *Длина* пути γ определяется интегралом

$$|\gamma| := \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Задача 1. Докажите, что длина пути γ зависит только от образа отображения γ, а не от "скорости прохождения". Иначе говоря, пусть дана кусочно-дифференцируемая биекция $I \to I$, $t = t(s)$. Тогда

$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} ds$$

Расстоянием между точками $p, q \in \mathbf{R}^2$ называется нижний предел длин путей из p в q. Кривая $C \subset \mathbf{R}^2$ называется *геодезической*, если она реализует кратчайший путь между любыми двумя точками $p, q \in C$.

Задача 2. Докажите, что группа движений плоскости $Isom(\mathbf{R}^2)$, порожденная параллельными переносами, вращентями и отражениями, сохраняет евклидову метрику.

Задача 3. Докажите, что геодезические кривые на $\mathbf{R}^2$ - это обычные прямые; и евклидово расстояние между (a,b) и (c,d) равно $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

2. Метрика на плоскости Лобачевского

Плоскость Лобачевского - это верхняя полуплоскость $\mathcal{H}$ в евклидовой плоскости:

$$\mathcal{H} = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid b > 0\}$$

Граница области $\mathcal{H}$ - это действительная прямая $\mathbf{R}$ плюс точка ∞.

Удобно на $\mathcal{H}$ также ввести комплексную координату $z = x + iy$. Тогда $\mathcal{H}$ будет комплексно-аналитически эквивалентна диску $\mathcal{U} := \{w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1\}$. Эквивалентность задается функцией

$$w = \frac{iz+1}{z+i}$$

При этом отображении граница области $\mathcal{H}$ переходит в единичную окружность $|w| = 1$.

Гиперболическая метрика на $\mathcal{H}$ задается формулой

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Задача 4. Проверьте, что длина вертикального отрезка с концами (c, a) и (c, b) в этой метрике равна

$$\int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln(b) - \ln(a) = \ln(\frac{b}{a})$$

Задача 5. Докажите, что вертикальные прямые на $\mathcal{H}$ - это геодезические.

Рассмотрим группу матриц

$$G = SL_2(\mathbf{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1,\ a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$$

Задача 6. Докажите, что группа G действует на $\mathcal{H}$ по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Задача 7. Покажите, что действие G на $\mathcal{H}$ сохраняет гиперболическую метрику. (А, значит, сохраняет длины путей, геодезические, и т.д.).

Задача 8. Пусть $C \subset \mathcal{H}$ полуокружность, перпендикулярная к границе $\mathbf{R}$. Докажите, что существует элемент $g \in G$, переводящий C в вертикальную прямую в $\mathcal{H}$. (Из задач 5 и 7 тогда следует, что C - тоже геодезическая).

3. Скалярное произведение и ортогональная группа $O_n = O_n(\mathbf{R})$

На пространстве $\mathbf{R}^n$ определим скалярное произведение векторов

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

формулой

$$(X \cdot Y) := X^t Y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Скалярное произведение позволяет определить длину вектора

$$|X| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

и угол θ (с точностью до знака) между векторами X и Y:

$$(X \cdot Y) = |X||Y| \cos\theta \tag{1}$$

Задача 9. Пусть $n = 2$. Используя теорему косинусов из геометрии, докажите, что формула (1) дает правильное определение угла.

Вектора X и Y называются *ортогональными*, если $(X \cdot Y) = 0$.

Задача 10. Пусть вектора $X_1, X_2, ...$ ненулевые и попарно ортогональны. Докажите, что они линейно независимы.

Матрица $A \in M_n(\mathbf{R})$ называется *ортогональной*, если она сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(AX \cdot AY) = (X \cdot Y)$$

Очевидно, что ортогональные матрицы обратимы и образуют подгруппу в группе $Gl_n(\mathbf{R})$. Она называется *ортогональной* группой и обозначается O_n.

Задача 11. Докажите, что следующие условия на матрицу $A \in M_n(\mathbf{R})$ эквивалентны:

(1) A ортогональна.

(2) $A^t A = I$

(3) Столбцы матрицы A имеют длину 1 и попарно ортогональны. (Т.е. они образуют *ортонормальный* басис в $\mathbf{R}^n$.)

Из условия (2) в Задаче 11 следует что определитель ортогональной матрицы равен ± 1. Орторональные матрицы с определителем 1 образуют подгруппу индекса 2 в O_n. Она обозначается SO_n.

Задача 12. Пусть $n = 2$. Докажите, что все матрицы A в группе SO_2 имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

т.е. группа SO_2 состоит из вращений.

Также покажите, что матрицы из O_2 с определителем -1 - это отражения, относительно всевозможных прямых, проходящих через начало координат.

Линейный оператор в $\mathbf{R}^3$ называется *вращением*, если в каком-нибудь ортонормальном базисе он записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13. Докажите теорему Эйлера: группа SO_3 состоит из вращений. (В частности, композиция двух вращений - это также вращение). (Подсказка: покажите сначала, что у любой матрицы из SO_3 есть собственной значение 1.)