Задачи к курсу "Теорема Милнора-Вуда"

(1) Покажите, что число Эйлера касательного S^1-расслоения к поверхности S_g рода g равно эйлеровой характеристике поверхности.

Подсказка:

(a) $\chi(S_g) = V - E + F$

(b) Выберите произвольную триангуляцию поверхности S_g и постройте по ней сечение касательного S^1-расслоения так, чтобы точки разрыва сечения были следующими:
– вершины триангуляции,
– середины ребер,
– центры треугольников.

(2) Покажите, что если у S^1-расслоения над сферой есть трансверсальное слоение, то это расслоение тривиально.

Подсказка: глядя на слоение, найдите непрерывное сечение расслоения. (Помним, что существование непрерывного сечения равносильно тривиальности расслоения.)

(3) Пусть имеется S^1-расслоение над ориентированной поверхностью. На его тотальном пространстве есть естественное послойное свободное действие группы $\mathbb{Z}_n$: в каждом слое оно выглядит как

$$\alpha \to \alpha + 1/n.$$

(Напомним, что у нас длина окружности равна 1.)

Профакторизуем расслоение по этому действию (образно говоря, намотаем каждый слой n раз на слой нового S^1-расслоения).

Как связаны числа Эйлера этих двух расслоений?

(4) Докажите формулу для класса Эйлера "лего-расслоений":

$$\mathcal{E} = 1/2\Big(\text{число отрицательных лего-элементов} - \text{число положительных элементов}\Big).$$

Подсказка: По лего-расслоению удобно строится "двойное сечение"на одномерном остове триангуляции – отметить в каждом слое не одну точку, а две. Построив такое сечение, воспользуйтесь предыдущей задачей для $n = 2$.

(5) Покажите:

$$|rot(fg) - rot(f) - rot(g)| \leq 2.$$

(6) Покажите, что если число вращения $rot(f)$ нулевое, то у f есть неподвижная точка, то есть, $f(x) = x$ для некоторого x.

(7) Покажите, что если число вращения $rot(f) = p/q$ то у f есть точка периода q.

(8) Покажите, что если $rot(f) = rot(g) = 0$, то

$$|rot(fg) - rot(f) - rot(g)| = |rot(fg)| \leq 1.$$

(9) Мы знаем, что

$$rot(T_k f) = rot(f) + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Можно ли $k \in \mathbb{Z}$ заменить на произвольное $a \in \mathbb{R}$?

(10) Подберите f и g с ограничением $rot(f) = rot(g) = 1/2$ так, чтобы $rot(fg)$ было максимально возможным.

Подсказка: у f и g должно быть по периодической точке периода 2. Стройте f и g начиная с орбит этих точек. Обратите внимание, что орбиты могут быть расположены друг относительно друга по разному.