

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1

1.1. Воспользуемся обозначением из лекции множества с двумя операциями $(A(L), +, \cdot)$, построенного по булевой решётке (L, \leq) .

(а) Проверьте, что $(A(L), +, \cdot)$ – коммутативное кольцо, причём *булево*.

(б) Наоборот, для заданного булева кольца A определите на множестве $L(a) = A$ порядок \leq соглашением $[a \leq b] :\Leftrightarrow [a = a \cdot b]$. Докажите, что $(L(a), \leq)$ – булева решётка. Подсказка. Проверьте, что $a \vee b = a + b + a \cdot b$, $a \wedge b = ab$; $a' = 1 - a$.

(в) Сформулируйте, в каком смысле операции $L \rightarrow A(L)$ и $A \rightarrow L(A)$ взаимно обратны. Если владеете категорным языком, воспользуйтесь им.

1.2. Докажите равносильность свойств подгруппы $\Lambda \subset (\mathbb{R}^n, +)$:

(а) Λ – решётка;

(б) существует такое *ограниченное* множество $B \subset \mathbb{R}^n$, что

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + B) = \mathbb{R}^n;$$

(в) Λ порождает \mathbb{R}^n как векторное пространство, то есть

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{R}\lambda = \mathbb{R}^n.$$

1.3. Опираясь на интуитивные представления, определите *вероятности* того, что случайная точка на плоскости \mathbb{R}^2 попадёт в диск из квадратной или шестиугольной упаковки плоскости. Какое из замощений плотнее?

1.4. Примените строгое определение из лекции к решёткам из предыдущей задачи. Совпадают ли ответы?

1.5. Исследуйте согласно строгому определению плотность кеплеровой трёхмерной упаковки. Совпадает ли её плотность с известным значением $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 74.048\%$?

1.6. Убедитесь в том, что упаковка Ш_8 настолько неплотна, что свободные от шаров части пространства можно вставить новые шары.

1.7. Докажите самодвойственность решётки E_8 .

1.8. Найдите самые короткие ненулевые вектора в решётке E_8 . Сколько их?