

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 2

2.1. Восстановите все детали определения кофунктора Понтрягина.

2.2. В этой задаче используются обозначения $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ для *аддитивных групп* соответствующего кольца и поля. Установите изоморфизмы

$$\widehat{(\mathbb{Z}, +)} \cong \mathbb{C}_1, \quad \widehat{\mathbb{C}_1} \cong (\mathbb{Z}, +)$$

и

$$\widehat{(\mathbb{R}, +)} \simeq (\mathbb{R}, +).$$

Обратите внимание на разницу в используемых значках изоморфизма. Она объясняется тем, что в группе $(\mathbb{Z}, +)$ есть выделенная образующая, а в группе $(\mathbb{R}, +)$ – нет.

2.3. Обычно k -элементной циклической группой называют фактор-группу $\mathbb{C}_k := \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$. Для наших целей это не очень удобно, поскольку в так определенной группе есть выделенная образующая. В некоторых же группах её нет, например, в мультипликативных группах \mathbb{F}_q^\times . Проанализируйте различие между изоморфизмами предлагается разобраться в различии между каноническим и неканоническим изоморфизмами конечных циклических групп:

$$\widehat{\mathbb{F}_7^\times} \cong \mathbb{F}_7^\times, \quad \widehat{\mathbb{F}_7} \simeq \mathbb{F}_7^\times.$$

2.4. Для случая $A = \mathbb{C}_1, \widehat{A} = \widehat{(\mathbb{Z}, +)}$ интерпретируйте преобразование Фурье $\mathcal{F} : L(\mathbb{C}_1) \rightarrow \widehat{(\mathbb{Z}, +)}$ как сопоставление (достаточно *хорошей* – уточните!) периодической функции

$$(x \bmod \mathbb{Z}) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

последовательность коэффициентов $n \mapsto a_n$. Определите обратное преобразование Фурье и установите *формулу обращения*. Совет. Начните с *тригонометрических многочленов*.

2.5. Докажите сходимость рядов Эйзенштейна G_k при $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

2.6. Пользуясь доступными компьютерными средствами, вычислите как можно точнее $G_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$. Свяжите с его помощью известное вам число $\pi := \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ с его родственником $\varpi := \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (Гаусс).