Дубна-2024

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 3

3.1. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ – решётка. Определим её *кольцо эндоморфизмов*

$$\mathrm{End}(\Lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu\Lambda \subseteq \Lambda\}.$$

В случае $\mathrm{End}(\Lambda) \supsetneq \mathbb{Z}$ говорят, что Λ обладает *комплексным умножением*. Докажите, что в этом случае

(а) $\mathrm{End}(\Lambda)$ – коммутативное кольцо без делителей нуля;

(б) поле частных[1] $\mathrm{ff}\big(\mathrm{End}(\Lambda)\big)$ является *мнимым квадратичным*, то есть изоморфно полю комплексных чисел вида $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-D}$ при некотором *свободном от квадратов* натуральном числе $D \in \mathbb{N} \setminus \Box$.

Оставшиеся задачи адресованы слушателям, умеющим пользоваться современными вычислительными средствами.

3.2. С помощью какой-либо доступной вам системы компьютерной алгебры научитесь для $\tau \in \mathcal{H}$ с высокой точностью вычислять $\mathrm{j}(\tau)$. Проверьте ваш способ при $\tau = \mathrm{i}$ и $\tau = \frac{\pm 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

3.3. Вычислите $\mathrm{j}(\tau)$ для нескольких наугад выбранных τ. Констатируйте полное отсутствие каких-либо закономерностей и прочувствуйте *трансцендентность* функции j.

3.4. Тем не менее, вычислите несколько $\mathrm{j}(\sqrt{-n})$ при нескольких натуральных значениях n. Обратите особое внимание на случаи $n \in \{1, 2, 4, 7\}$.

3.5. Если вы заметили что-нибудь интересное в предыдущей задаче, то вычислите для этих случаев $\sqrt[3]{\mathrm{j}(\sqrt{-n})}$. Ваши наблюдения?

Самостоятельно объяснить обнаруженные чудеса вам вряд ли удастся (хотя можно попробовать...). Они связаны с *однозначностью разложения на множители* – или, точнее, с его отсутствием – в *кольцах целых чисел* полей $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{-D}$.

Кому-то из вас, надеюсь, захочется ОБЪЯСНИТЬ результаты ваших наблюдений. К вашим услугам огромная литература по классической теории чисел; рекомендую написанную с особым педагогическим мастерство книгу David A Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$*. Wiley& Sons, 1989.

[1] Для коммутативного кольца R без делителей нуля его *поле частных* (fraction field) иногда обозначается $\mathrm{ff}(R)$.