Замечательные решётки
Дубна, 2024

Г.Б. Шабат

Лекция 1, 21 июля
Решётки в $\mathbb{R}^n$

Версия 21 июля 2024

1.0. Что называют решёткой?

1.0.0. Решётки в общей алгебре. Один из смыслов термина *решётка* связан и с некоторым классом частично упорядоченных множеств, и с весьма специальными коммутативными кольцами. Таким образом, это понятие можно отнести и к общей алгебре, и к теории упорядоченных множеств. Наш выбор (названия подраздела) объясняется тем, что "общая алгебра" – общепризнанное название раздела современной алгебры, тогда как упорядоченные множества встречаются повсюду. Теория сформировалась в 30-50-х годах прошлого века, и тогда называлась также *теорией структур*, но сейчас этот термин неприемлем, поскольку после воцарения бурбакистской математики он приобрёл гораздо более общий смысл. См. [**Биркгоф1984**].

Частично упорядоченное множество $(L, \leq)$ называется *решёткой*, если любое двух-элементное подмножество $\{a, b\} \subseteq L$ имеет *точную нижнюю грань* $a \wedge b$ и *точную верхнюю грань* $a \vee b$. Типичным примером является множество подмножеств фиксированного множества, упорядоченного включением, с $(\vee, \wedge) = (\cup, \cap)$; пример другого рода – $(\mathbb{N}, \vdots)$ с $(\vee, \wedge) = (\text{НОД}, \text{НОК})$.

Далее воспользуемся упражнениями из главы 1 [**АтьяМакдональд2021**].

Решётка $(L, \leq)$ называется *булевой*, если

(i) она имеет наименьший и наибольший элементы 0 и 1;
(ii) операции $\vee$ и $\wedge$ дистрибутивны друг относительно друга;

(iii) определена унарная операция *дополнения* $L \to L : a \mapsto a'$, удовлетворяющая $a \vee a' = 1$ и $a \wedge a = 0$ для всех $a \in A$.

Коммутативное кольцо A называется *булевым*, если $x^2 = x$ для всех $x \in A$.

Булева решётка $(L, \leq)$ определяет коммутативное кольцо $\big(A(L), +, \cdot\big)$ с помощью операций

$$a + b := (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$$

В случае решётки подмножеств фиксированного множества это – *симметрическая разность.*

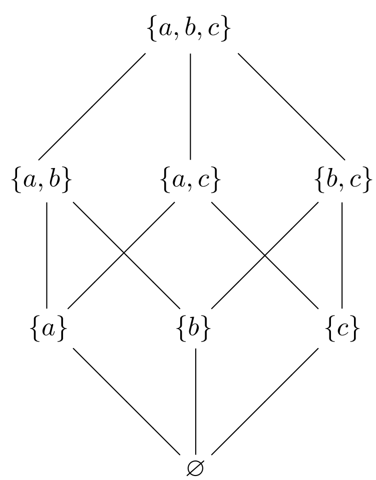
и

$$a \cdot b := a \wedge b$$

на множестве $A(L) := L$.

Связь между булевыми решётками и булевыми кольцами слушателям предлагается установить в упражнении **1.1**.

Причина называния упомянутых булевых структур *решётками* не бросается в глаза. Она, по-видимому, объясняется традицией изображать решётки графически; например, вот как выглядит ”решётка” подмножеств 3-элементного множества:



Действительно, напоминает (кубическую) решётку!

1.0.1. Решётки в физике. Физики-экспериментаторы имеют дело с *дифракционными* решётками. Согласно Википедии, их увлекательная история начинается с письма Джеймса Грегори, который в 1673 наблюдал дифракцию на птичьих перьях и написал Джону Коллинзу: *Если вы сочтёте нужным, вы можете показать мистеру Ньютону небольшой эксперимент ... . Впустите солнечный свет через маленькое отверстие в затемнённый дом, а в отверстие поместите перо (чем тоньше и белее, тем лучше для этой цели), и оно направит на белую стену или бумагу напротив нее ряд маленьких кругов и овалов..., из которых один белый (а именно середина, которая противоположна Солнцу), а все остальные по-разному окрашены. Я с радостью выслушаю его мысли об этом.* С дальнейшим развитием событий можно бегло познакомиться по [**Багбая1972**], а более подробно, например, по [**Cope1980**].

У физиков-теоретиков в ходу *решёточные модели*, которые вряд ли имеют точное определение, а означают разнообразные приближения непрерывных моделей физических явлений дискретными. Ограничимся достаточно случайными цитатами из [**Gupta1998**]:

Lattice QCD is QCD formulated on a discrete Euclidean space time grid.

The Yang-Mills action for gauge fields and the Dirac operator for fermions have to be transcribed onto a discrete space-time lattice in such a way as to preserve all the key properties of QCD – gauge invariance, chiral symmetry, topology, and a one-to-one relation between continuum and lattice fields.

1.0.2. Решётки в языке. Грустными ассоциациями, связанными с русским словом *решётка*, мы обязаны А.С. Пушкину: *Сижу за решёткой в темнице сырой...*

Как мы могли убедиться по физическим цитатам, русскому слову *решётка* соответствует три английских: *lattice, grid, grating*. Обсуждение тонкого различия между двумя из них можно извлечь из Интернета:

What's the difference between 'a grid' and 'a lattice'?

Although these words are synonyms, they have specific situational usages.

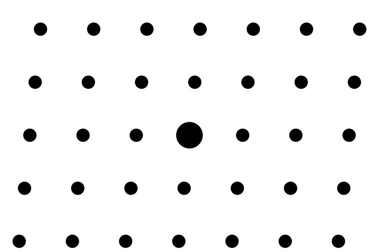
Lattice is a kriss-cross structure that you might put up in a garden as a support for roses or other climbing plants.

Grid is also a kriss-cross structure, but it is used more in the sense of a system, like the grid of streets in a city.

Вряд ли эти объяснения можно счесть исчерпывающими, особенно для русскоязычного математика, далёкого от садоводства. Главный вывод для нас заключается в том, что с единственным русским словом *решётка* надо обращаться аккуратно.

1.1. Что мы будем называть решёткой?

1.1.0. Решётки в $\mathbb{R}^n$. При $n = 2$ определение *очевидно*:



Здесь подразумевается, что *узлы* этой решётки[1] $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, изображённые чёрными точками равномерно и регулярно распространяются на все четыре стороны – изображена лишь маленькая конечная часть бесконечной плоскости $\mathbb{R}^2$. Формально это свойство можно было бы определить как *инвариантность* множества $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ относительно действия группы, порождённой двумя (коммутирующими!) сдвигами; на картинке это – сдвиг "на шаг" вправо и "на шаг"

[1] На протяжении всего курса мы, как и многие авторы, стараемся обозначать решётки буквой Λ, поскольку эта буква является греческим аналогом первой буквы слова *Lattice*.

вверх-и-немного-вправо. Такое определение современно формулировалось бы как структура *торсора* аддитивной группы $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Это понятие требует нескольких определений и обозначений, и поступим проще: выделим наугад точку из Λ (еа картинке она изображена жирной), присвоим ей статус *нейтрального* элемента и потребуем, чтобы Λ была *подгруппой* аддитивной группы $(\mathbb{R}^2, +)$.

Введём два специфических (для нашего курса) **обозначения**.

$$\dot{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \setminus \{0\};$$
$$\dot{\Lambda} := \Lambda \setminus \{0\}.$$

Теперь мы готовы дать основное **определение** этого раздела:

Пусть $n \in \dot{\mathbb{N}}$ – положительное натуральное число. Подгруппа аддитивной группы n-мерного евклидова пространства $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ называется *решёткой*, если *топологическая фактор-группа*

$$\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}$$

компактна.

Мы предполагаем известными все использованные термины. Равносильные определения, в том числе на языке школьной математики, приведены в задаче **1.2**.

1.1.1. Решётки в $\mathbb{C}^g$. Выбор буквы g для обозначения размерности комплексного векторного пространства будет объяснён в последующих лекциях. Здесь отметим лишь, что это – первая буква слова *genus*.

Никакого содержательно нового определения решётки $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ вводить не нужно, поскольку можно воспользоваться изоморфизмом $\mathbb{C}^g \simeq \mathbb{R}^{2g}$. Однако, как мы увидим впоследствии, на фактор-группах $\frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$ есть гораздо более богатые структуры, чем на $\frac{\mathbb{R}^{2g}}{\Lambda}$.

1.1.2. Решётки в локально-компактных полях. Предполагающиеся известными поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ вещественных и комплексных чисел обладают топологией (которая неявно использовалась в предыдущих определениях), и являются *локально-компактными.*

Есть и другие локально-компактные поля; они полностью расклассифицированы. Над некоторыми из них тоже разработана теория решёток, и мы кратко обсудим её в последней лекции. А сейчас, не пытаясь выражаться понятно, воспроизведём определение из [**Вейль19??**], стр. 58:

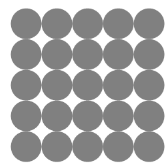
решётка – это компактный открытый подмодуль над максимальным компактным подкольцом в векторном пространстве (над неархимедовым локально-компактным полем).

Даже не вникая в точный смысл этого определения, нетрудно отметить его абсурдность: свойств подмножества векторного пространства быть решёткой и быть открытым представляются абсолютно несовместимыми. Дело в том, что топология неархимедовых полей весьма и весьма неклассична... Тем удивительней, что аналоги многих классических понятий хорошо определены над этими полями.

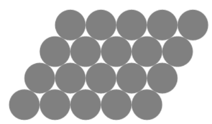
1.2. О плотных упаковках

Фиксируем введённые выше обозначения $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

1.2.0. Очевидное. Случай $n = 1$ тривиален, так что начнём с $n = 2$. Бросающиеся в глаза плотные упаковки дисков – *квадратная*

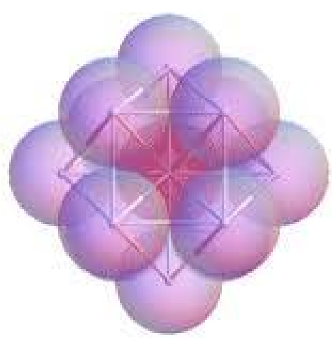


и *шестиугольная*



Подразумевается, что в обоих случаях диски регулярно продолжаются на все четыре стороны. В упражнении **1.3** предлагается определить и сравнить плотности этих упаковок.

1.2.1. Проблема Кеплера. В случае $n = 3$ всё ещё сохраняется "очевидный" ответ



История этой проблемы длинна и по-своему поучительна.

Формулировка Кеплера от 1611 состояла в том, что *оптимальная 3-мерная упаковка шаров задаётся центрами в гранях кубической решётки.* Доказательством он не владел, и оно было получено лишь Гауссом в 1831, однако при дополнительном предположении, что центры шаров расположены в узлах решётки (в нашем курсе рассматриваются только такие упаковки).

Более общий вопрос был поставлен в начале 20-го века Гильбертом в 18-й из его знаменитых проблем, и Милнор в 1976 писал *The corresponding problem in three dimensions remains unsolved. This is a scandalous situation since the (presumably) correct answer has been known since the time of Gauss ... all that is missing is a proof.*

В конце 20-го века разными авторами были предложены доказательства, отвергнутые сообществом, и лишь в [**Hales2005**] было получено общепринятое доказательство, причём оно было одним из основных примеров примеров доказательства трудной теоремы, прошедшей computer-checking.

Один из выводов из этой растянувшейся почти на 400 лет истории заключается в том, что даже самые наглядные и кажущиеся простыми геометрические объекты иногда сопротивляются строгому исследованию и полному пониманию. Формальное доказательство каких-то утверждений о них мало проясняет природу объектов; мы постараемся показать в дальнейших лекциях, что иногда самое ценное в получении долгожданного доказательства – не сам его факт, а идеи и конструкции, приведшие к доказательству.

В задаче **1.5** предлагается поработать с кеплеровой упаковкой.

1.2.2. Определения. Далее мы в основном следуем [**Cohn2022**].

Для любой решётки $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ определим *радиус упаковки* как длину[2] самого короткого ненулевого вектора

$$r_\Lambda := \frac{1}{2} \min_{\lambda \in \dot{\Lambda}} |\lambda|.$$

Нам придётся предположить известной теорию *объёмов* в пространстве $\mathbb{R}^n$, основанной на том, что объём единичного куба равен 1.

Мы будем пользоваться формулой объёма шара радиуса r

$$\mathrm{vol}_n(r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} r^n$$

(вывод этого объёма и, в частности, понимание *факториала полуцелого числа* требует особых рассмотрений, на которые у нас нет времени; однако все объёмы шаров, которые нам встретятся, либо покрываются школьной математикой, либо обсуждаются при *чётных* размерностях n).

Ещё нам понадобится понятие объёма множества, не лежащего в $\mathbb{R}^n$, а именно объём фактор-группы $\mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}\right)$. Для этого необходимо выбрать *базис* в решётке Λ, то есть представить её в виде

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\lambda_i,$$

а затем определить *фундаментальный параллелепипед*

$$\Pi := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \mid x_i \in [0,1] \subset \mathbb{R} \right\}$$

и, наконец, определить объём

$$\mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}\right) := \mathrm{vol}(\Pi),$$

сославшись на какой-нибудь стандартный текст, в котором доказывается, что это число не зависит от выбора базиса $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

[2] Подразумевается, что пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено обычной евклидовой метрикой $dist(x,y) := |x-y|$, где $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

После этого можно определить *плотность решётки*

$$\mathrm{density}(\Lambda) := \frac{\mathrm{vol}_n(r_\lambda)}{\mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}\right)}.$$

В задаче **1.4** предлагается сравнить это строгое определение с предложенным в задаче **1.3** интуитивным.

1.2.3. Упаковки в небольших размерностях. Введём в каждой размерности n *шахматную* решётку[3]

$$\text{Ш}_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid x_1 + \ldots x_n \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Нетрудно проверить, что решётка Ш_3 состоит из центров кеплеровой упаковки.

В размерностях >3 мало что доказано; однако Ш_4 и Ш_5 – наиплотнейшие из <u>известных</u> упаковок в этих размерностях. В задаче **1.6** предлагается поработать с упаковками с центрами в Ш_4 и Ш_5.

Начиная с размерности 8, упаковки Ш_n уже настолько неплотны, что свободные от шаров части пространства можно вставить новые шары; слушателям предлагается убедиться в этом в задаче **1.7**.

Наиплотнейшая из известных упаковок в размерности 10 не связана с решётками.

1.3. Две замечательные решётки

1.3.0. Ещё одно определение решётки. Мы по-прежнему говорим о решётках $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, но сосредотачиваемся на так называемых *целочисленных* решётках. Теперь основная структура в $\mathbb{R}^n$ – не метрика, а *скалярное произведение*

$$(x \cdot y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Требование *целочисленности*, предъявляемое к решёткам, заключается в том, что

$$(\Lambda \cdot \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Объемлющее пространство $\mathbf{V} \simeq \mathbb{R}^n$ вместе со скалярным произведением восстанвливается по формуле (которую не обязательно понимать)

$$\mathbf{V} := \Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}.$$

Двойственная к целочисленной решётке Λ решётка Λ^* определяется формулой

$$\Lambda^* := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x \cdot \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Очевидно, $\Lambda^* \supseteq \Lambda$, и коммутативная фактор-группа $\frac{\Lambda^*}{\Lambda}$ – важная характеристика целочисленной решётки.

Решётки Λ, для которых $\Lambda^* = \Lambda$, называются *самодвойственными.*

Теория целочисленных решёток – важный раздел современной арифметики. Плотные упаковки доставляют замечательный класс примеров, причём целочисленность решёток центров вряд ли априори очевидна.

---

[3]В [**Cohn2022**] она невыразительно обозначается D_n.

1.3.1. Решётка Коркина-Золотарёва E_8. Она была введена в работе [**KorkinZolotarev1873**]. По определению,

$$\mathsf{E}_8 := \left\{ x \in \mathbb{Z}^8 \coprod \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right)^8 \Big| \sum_{i=1}^{8} x_i \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

В задаче **1.7** предлагается доказать самодвойственность этой решётки, а в задаче **1.8** – немного поработать с ней.

1.3.2. Решётка Лича Λ_{24}. Она была введена в работе [**Leech1964**]. Её определение достаточно длинно, и сейчас мы его не приводим.

1.4. Результаты Марины Вязовской (формулировка)

В 2022 году Марины Вязовской была присуждена филдсовская премия за доказательство оптимальности введённых 8- и 24- мерной решёток.

О ссылках и доказательствах мы поговорим в следующей лекции.

Список литературы

[**Cohn2022**] Henry Cohn, *The work of Maryna Viazovska.* ArXiv: 2207,06913v1 [math.MG] 10 Jul 2022.

[**Cope1980**] Thomas D. Cope, *Introduction to lattice QCD.* ArXiv:hep, 1998.

[**Gupta1998**] Rajan Gupta, *The Rittenhouse diffraction grating.* Reprinted in: Rittenhouse, David (1980). Hindle, Brooke (ed.). The Scientific Writings of David Rittenhouse. Arno Press, 1980.

[**Hales2005**] Thomas C. Hales, *A proof of the Kepler conjecture.* Annals of Mathematics, 162 (2005), 1065–1185.

[**KorkinZolotarev1873**] A. Korkin, G. Zolotarev, *Sur les formes quadratiques.* Mathematische Annalen. 6(1873): 366–389.

[**Leech1964**] John Leech, *Some sphere packings in higher space.* Canadian Journal of Mathematics, 16(1964), 657–68.

[**АтьяМакдональд2021**] М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру.* Издательство МЦНМО, 2021.

[**Багбая1972**] И.Д. Багбая, *К истории дифракционной решётки.* Успехи Физических Наук, 108, вып.2 (1972), стр. 335-337.

[**Биркгоф1984**] Г. Биркгоф, *Теория решёток.* М., «Наука», 1984.

[**Вейль19??**] А. Вейль, *Основы теории чисел.* М., «Мир», 19??.