Замечательные решётки
Дубна, 2024
Г.Б. Шабат

Лекция 2, 22 июля
Решётки в $\mathbb{R}^n$

Версия 23 июля 2024

2.0. Обзор доказательств

2.0.0. Условность великих доказательств. Полным доказательствам великих гипотез нередко предшествуют *условные* доказательства, то есть доказательства "по модулю" неких вспомогательных результатов, которые, как правило, заметно моложе великих гипотез, но часто не менее фундаментальны.

Так, доказательству Уайлсом Великой теоремы Ферма предшествовала гипотеза Шимуры-Таниямы, доказательству Перельманом гипотезы Пуанкаре – гипотеза геометризации Тёрстона, (отрицательному) решению Матиясевичем 10-й проблемы Гильберта – результаты Дэвиса и Дж. Робинсон, оставившие Матиясевичу "лишь" задачу доказательства диофантовости экспоненциально-диофантовых множеств.

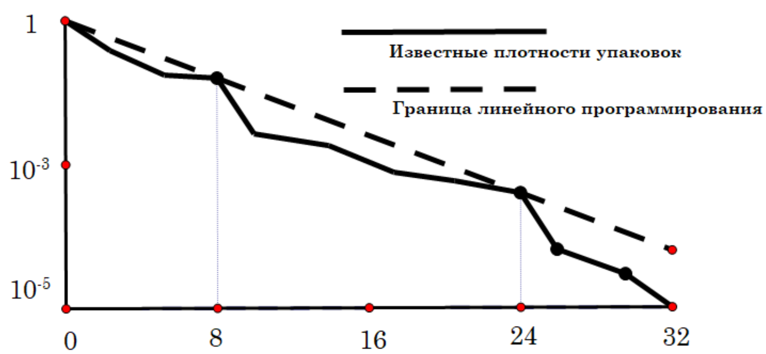
Хотя доказанная Вязовской гипотеза об оптимальности решёток E_8 и Λ_{24} и не была столь же общеизвестна и престижна, как упомянутые, её доказательство проходило по той же схеме. Результаты работы [**CohnElkies2003**] оставили Вязовской "всего лишь" задачу построения *волшебной* функции, о которой мы сегодня и поговорим.

О том, что осталось Марине, приведём цитату из [**Cohn2022**]:

When Elkies and I proposed this method in 1999, Viasovska was still in secondary school. Without realizing how profoundly difficult the remaining step was, I imagined that we had almost solved the sphere packing problem in eight and twent-four dimensions, and our inability to find the magic function was extremely frustrating. At first, I worried that someone else would find an east solution and leave me feeling foolish for not doing it myself. Over time I became convinced that obtaining this function was in fact difficult, and others also reached the same conclusion. For example, Thomas Hales has said that "I felt that it would take a Ramanujan to find it". Eventually, instead of worrying that someone else would solve it, I began to fair that nobody would solve it, and that I would someday die without knowing the outcome. I am grateful that Viasovska found such a satisfying and beautiful solution...

2.0.1. Почему размерности 8 и 24? Ответ будет носить весьма условный характер. В [**Cohn2022**] (в полулогарифмической школе) приведены графики (а) теоретической верхней оценки плотности упаковок в зависимости от размерности, которые восходят к работе [**Delsarte1972**] и названы там *границами линейного программирования*;
(б) графики плотностей известных упаковок.

Вот приближённый вид этих графиков:



Видно, что рассматриваемые плотности совпадают лишь в размерностях 8 и 24.

Известные плотности в этих размерностях соответствуют именно решёткам E_8 и Λ_{24}. О теоретических оценках мы немного поговорим, введя соответствующий аппарат.

2.0.2. Теорема Кона-Элкиса. Мы сейчас дадим предварительное определение *преобразования Фурье*, которое немного подробнее обсудим ниже.

Волшебная функция ищется среди *быстро убывающих* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Точное определение быстрого убывания будет дано ниже, а пока потребуем лишь, чтобы при всех $y \in \mathbb{R}^n$ сходился *интеграл Фурье*

$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x\cdot y)}\mathrm{d}x,$$

который тоже будет обсуждаться ниже; преобразование $f \mapsto \widehat{f}$ и называется *преобразованием Фурье*.

Теорема (см. [**CohnElkies2003**]). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функция, для которой определено преобразование Фурье $\widehat{f}$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ – положительное число. Если*

(1) $f(x) \le 0$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$, *для которых* $|x| \ge r$;

(2) $\widehat{f}(x) \ge 0$ *при всех* $x \in \mathbb{R}^n$;

(3) $f(0) = \widehat{f}(0) = 1$,

то оптимальная плотность упаковки шаров в $\mathbb{R}^n$ не превосходит объёма n- мерного объёма шара радиуса $\frac{r}{2}$, то есть $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}r^n$.

Следствие. *Если существует быстро убывающая функция* $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая условиям* (1)–(3) *теоремы, то упаковка с центрами шаров в* E_8 *оптимальна.*

2.1. Двойственность Понтрягина

Наша задача – описать контекст, в котором определение преобразования Фурье $f \to \widehat{f}$ было бы естественно. Функции, преобразования которых мы будем рассматривать, будут определены не только на $\mathbb{R}^n$, но и на произвольных *локально-компактных группах.*

2.1.0. Отступление о категорном языке. Будем считать определение локально-компактной группы известным (см., например, [**ХьюиттРосс1975**]). Нам надо будет определить процедуру сопоставления каждой локально-компактной абелевой группы другой такой же. Если бы мы могли рассмотреть *множество* локально-компактных групп, то речь шла бы об отображении этого множества в себя.

Но локально-компактные группы, даже рассматриваемые с точностью до изоморфизма, не образуют множества: их слишком много!

Действительно, абстрактные группы с *дискретной* топологией очевидно локально-компактны.Среди них есть группы $\mathbb{Z}^X$, состоящие из $\mathbb{Z}$-значных функций на произвольном множестве X, с покомпонентным сложением.

Пусть абстрактное множество $\mathcal{A}$ локально-компактных абелевых групп содержит представителей классов изоморфизма всех таких групп. Тогда *мощность* $\operatorname{card}(A)$ любой из этих групп не превосходит

$$\operatorname{card}\left(\coprod_{A\in\mathcal{A}} A\right),$$

тогда как мощность группы $\mathbb{Z}^X$ может быть как угодно велика.

Когда хочется рассмотреть все объекты какого-то типа сразу, но они не образуют (подобно, например, упаковкам шаров или студентам вашего университета) множества, обращаются к понятию *категории*[1].

Понятие *быть объектом категории* $\mathcal{C}$ расширяет понятие *быть элементом множества* X. Поэтому первое из понятий мы будем (нестандартно) обозначать $X \in\in \mathcal{C}$, ассоциируя с привычным $x \in X$. Прототипом понятия категории была категория множеств $\mathcal{SET}$, так что мы теперь можем, например, воспользоваться записью $\mathbb{N} \in\in \mathcal{SET}$. Нам понадобится категория *локально компактных абелевых групп*, которую мы обозначим $\mathcal{LCAB}$.

Полное определение категории $\mathcal{C}$ требует ещё для каждой пары объектов $X, Y \in\in \mathcal{C}$ введения множества *морфизмов* $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ вместе с законами *композиции*

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

[1] Мы не будем углубляться в это понятие, а лишь введём минимальные языковые средства для сокращения описания рассматриваемых конструкций. Желающие посерьёзнее познакомиться с категориями могут обратиться к классической книге [**Маклейн2004**].

для каждой тройки $X, Y, Z \in\in \mathcal{C}$. Широко используется наглядная нелинейная запись а которой, предполагая категорию ясной из контекста, принадлежность

$$\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \text{ записывают в виде } X \xrightarrow{\alpha} Y.$$

Простейший класс так называемых *конкретных* категорий, к которому относится интересующая нас категория $\mathcal{LCAB}$, "состоит" из множеств с дополнительными *структурами* (в нашем случае – топологией и групповой операцией), а морфизмы суть отображения множеств, *уважающие* структуры. Обычно уважение понимается однозначно; в случае $\mathcal{LCAB}$ это – непрерывные гомоморфизмы.

В общем случае композиция морфизмов должна удовлетворять аксиомам, позаимствованным из свойств композиции множеств.

Подобно значку $\in$, мы будем дублировать и другие теоретико-множественные значки, вводя категорные аналоги теоретико-множественных понятий.

Аналогом *отображений* множеств

$$f : A \longrightarrow B : a \mapsto f(a)$$

является понятие *функтора*

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{D} : X \mapsto\mapsto F(X).$$

Функтор, впрочем, должен не только сопоставлять объекты объектам, но и морфизмы морфизмам, то есть каждому морфизму $X \overset{\alpha}{\to} Y$ объектов $X, Y \in\in \mathcal{C}$ должен быть составлен морфизм $F(X) \overset{\alpha_*}{\to} F(Y)$ объектов $F(X), F(Y) \in\in \mathcal{D}$. При этом должны выполняться очевидно определяемые условия согласования

$$(\alpha \circ \beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$$

Такие функторы называются *ковариантными.* Наряду с ними, рассматриваются *контравариантные*, "переворачивающие стрелки", то есть сопоставляющие морфизму $X \overset{\alpha}{\to} Y$ морфизм $F(Y) \overset{\alpha^*}{\to} F(X)$, причём требуется

$$(\alpha \circ \beta)^* = \beta^* \circ \alpha^*.$$

Мы будем пользоваться более короткой терминологией, называя ковариантные функторы просто *функторами*, контравариантные – *кофункторами.* В двойственности Понтрягина фигурирует именно кофунктор.

2.1.2. Кофунктор Понтрягина. Центральную роль в двойственности Понтрягина играет единственная одномерная компактная группа Ли *окружность*, которую мы будем понимать как мультипликативную группу комплексных чисел с *нормой* 1 и обозначать

$$\boxed{\mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$$

Двойственная по Понтрягину к локально-компактной абелевой группе A обычно обозначается $\widehat{A}$; мы интерпретируем значок $\widehat{\ }$ как имя кофунктора и даём центральное определение:

$$\widehat{\ } : \mathcal{LCAD} \longrightarrow\longrightarrow \mathcal{LCAD} : \left(A \mapsto\mapsto \boxed{\widehat{A} := \mathrm{Mor}_{\mathcal{LCAD}}(A, \mathbb{C}_1)} \right).$$

Абстрактная группа $\widehat{A}$ наделяется *топологией равномерной сходимости.*

Непрерывному гомоморфизму локально-компактных групп $\alpha : A \to B$ сопоставляется морфизм

$$\alpha^* : \widehat{B} \to \widehat{A} : \chi \mapsto \big(a \mapsto \chi(\alpha(a)\big).$$

В задаче **2.1** предлагается восстановить детали приведённых определений, а в задаче **2.2** – рассмотреть первые примеры.

Кофунктор Понтрягина называется *двойственностью*, поскольку для любой группы $A \in\in \mathcal{LCAB}$ имеет место (*канонический*, что бы это ни значило) изоморфизм

$$\boxed{\widehat{\widehat{A}} \cong A}$$

Он определяется так:

$$A \mapsto \widehat{\widehat{A}} : a \mapsto \big(\chi \mapsto \chi(a)\big).$$

В задаче **2.3** предлагается разобраться в различии между каноническим и неканоническим изоморфизмами конечных циклических групп:

$$\widehat{\widehat{\mathsf{C}_k}} \cong \mathsf{C}_k, \;\; \widehat{\mathsf{C}_k} \cong \mathsf{C}_k.$$

2.1.3. Преобразование Фурье. На каждой локально-компактной группе $A \in \mathcal{LCAB}$ мы выделим пространство "достаточно хороших" комплексно-значных функций[2] $\mathrm{L}(A)$.

Уточнять эти пространства мы не будем: в классическом функционально анализе фигурирует несколько, и не на нашем уровне подробности вдаваться в детали. Выбор подходящих функциональных пространств – очень важная часть работы Вязовской, и проверка того, что её функции попадают в эти пространства – достаточно трудная часть её работы. Мы в этом курсе, однако, всем её утверждениям поверим и ограничимся тем, что выпишем *формулы*, иногда, по возможности, кратко комментируя их.

Пространства функций $\mathrm{L}(A)$ и $\mathrm{L}(\widehat{A})$ на паре двойственных по Понтрягину групп собой *преобразованием Фурье*

$$\mathcal{F} : \mathrm{L}(A) \longrightarrow \mathrm{L}(\widehat{A}) : f \mapsto \left(\chi \mapsto \int_A f(a)\chi(a) \cdot \mathrm{dHaar}(a)\right)$$

(возможны варианты) где через d Haar нетрадиционно обозначена *двусторонне инвариантная* мера, существующая и единственная с точностью до множителя на любой локально компактной, не обязательно коммутативной, группе (см. [**ХьюиттРосс1975**]).

Инволютивность кофунктора Понтрягина приводит к многочисленным *формулам обращения*, которую мы приведём лишь в частном случае $A = \mathbb{R}^n$, а обсуждение общей теории ограничим задачей **2.4**, в которой предлагается поработать со случаем $A = \mathbb{C}_1, \widehat{A} = \mathbb{Z}$.

В наших основных занятиях будет фигурировать группа

$$\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^8,$$

[2] Наш выбор буквы связан с традиционными обозначениями функциональных пространств $\mathrm{L}^2, \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$ и т.п.

и преобразование Фурье для неё мы уже знаем из подраздела **2.0.2**:

$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^8} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x\cdot y)}\mathrm{d}x,$$

Формула обращения для неё хорошо известна:

$$f(x) := \int_{\mathbb{R}^8} \widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(x\cdot y)}\mathrm{d}y$$

(обратите внимание на знаки в экспоненте!)

2.2. Модулярные формы

Мы будем работать с множеством <u>всех</u> решёток в $\mathbb{C}$. Рассмотрим диаграмму множеств и отображений

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{PAR}^+ \arrow[r, "/\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})"] \arrow[d, "/\mathbb{C}^\times"] & \mathcal{LAT} \arrow[d, "/\mathbb{C}^\times"] \\
\mathcal{H} \arrow[r, "/\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})"] & \mathcal{M}_1(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

В ней фигурируют

- Множество *ориентированных параллелограммов*

$$\mathcal{PAR}^+ := \left\{ (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{C}^2 \middle| \left(\mathrm{Im}\frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 0 \right) \right\};$$

- Множество $\mathcal{LAT}$ определённых выше *решёток* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ (одно из главных действующих лиц нашего курса);
- *Верхняя полуплоскость* $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$;
- $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ – множество *классов подобия* решёток (обозначение взято из алгебраической геометрии, где оно читается как *пространство модулей комплексных кривых рода 1*).

На трёх из этих множеств действуют следующие группы:

- На множестве параллелограммов действует *группа подобия*

$$\mathbb{C}^\times \times \mathcal{PAR}^+ \longrightarrow \mathcal{PAR}^+ : (\kappa; \lambda_0, \lambda_1) \mapsto (\kappa\lambda_0, \kappa\lambda_1);$$

- На множестве параллелограммов действует *группа замены базисов решётки*

$$\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{PAR}^+ \longrightarrow \mathcal{PAR}^+ : \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \lambda_0, \lambda_1 \right) \mapsto (a\lambda_0 + b\lambda_1, c\lambda_0 + d\lambda_1);$$

Здесь $\mathsf{SL}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$

- На множестве решёток действует *группа подобия*

$$\mathbb{C}^\times \times \mathcal{LAT} \longrightarrow \mathcal{LAT} : (\kappa, \Lambda) \mapsto (\kappa\Lambda);$$

- На множестве классов подобия решёток действует *группа замены базисов*

$$\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} : \left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d};$$

Здесь $\mathsf{PSL}_2 := \dfrac{\mathsf{SL}_2}{\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$

ВСЕ СТРЕЛКИ В ДИАГРАММЕ ЯВЛЯЮТСЯ ФАКТОРИЗАЦИЯМИ ПО СООТВЕТСТВУЮЩИМ ГРУППАМ.

Нижняя стрелка представляет собой замечательную спецфункцию, называемую *j-инвариантом.*

***

Модулярной формой веса k называется в некотором точном смысле *достаточно хорошая*[3] функция $f : \mathcal{LAT} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая соотношению

$$\boxed{f(\kappa\Lambda) \equiv \kappa^{-2k} f(\Lambda)}$$

Очевидной серией примеров являются *ряды Эйзенштейна*

$$\boxed{\mathrm{G}_k(\Lambda) := \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^{2k}}}$$

Они имеют <u>несомненный</u> смысл (сходятся) при $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, что предлагается доказать в задаче **2.5**. (Специалисты умеют придать смысл также *квазимодулярной* форме G_1). Затем в задаче **2.6** предлагается с помощью компьютерных средств чуть-чуть поработать с $\mathrm{G}_k(\mathbb{Z}\mathrm{i} + \mathbb{Z})$.

Далее используется *сечение* $\tau \mapsto \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ отображения $\mathcal{PAR}^+ \to \mathcal{H}$. Поскольку группа преобразований полуплоскости H содержит *сдвиг* $\tau + 1$, удобно использовать переменную

$$\boxed{q := \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \tau}}$$

С её помощью определяются *нормализованные ряды Эйзенштейна*

$$\boxed{\mathrm{E}_k(\tau) := \frac{1}{2\zeta(2k)} \mathrm{G}_k(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})} = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{m-1}(n) q^{2n}$$

Имеет место замечательный факт, вырождающийся в сенсационный результат Эйлера $\zeta(2k) \in \mathbb{Q}[\zeta(2)]$ при $k \geq 2$:

При $k \geq 4$

$$\mathrm{E}_k \in \mathbb{Q}[\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3].$$

Этим объясняется то, что в приводимых ниже формулах Вязовской фигурируют только E_2 и E_3 вместе с их замечательной упомянутой выше комбинацией

$$\boxed{\boxed{\mathrm{j} := \frac{1728 \mathrm{E}_2^3}{\mathrm{E}_2^3 - \mathrm{E}_3^2}}} = q^{-2} + 744 + 196884 q^2 + \ldots$$

---

[3]Мы не приводим определений, поскольку используемые нами модулярные формы буду определяться явными формулами.

Невозможно не сообщить, что коэффициенты этого q-разложения тесно связаны с размерностями неприводимых представлений Монстра, причём это было обнаружено ДО того, как существование Монстра было обнаружено!

2.3. Волшебная функция

Мы фрагментарно почти полностью воспроизведём построение этой функции $f : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}$ по [**Vyazovska2017**] в несколько шагов.

Шаг 1.

$$f(x) := g(\sqrt{2}x)$$

Шаг 2. Вводятся главные вспомогательные функции $a, b : \mathbb{R}^8 \to \mathrm{i}\mathbb{R}$, удовлетворяющие $\widehat{a} = a, \widehat{b} = -b$, и

$$g := \frac{\pi \mathrm{i}}{8640} a + \frac{i}{240\pi} b.$$

Шаг 3. Вводятся четыре вспомогательные модулярные формы (обратите внимание на два написания буквы "фи"!)

$$\varphi_{-2} := -\frac{1728 \mathrm{E}_2 \mathrm{E}_3}{\mathrm{E}_2^3 - \mathrm{E}_3^2},$$

$$\varphi_{-4} := -\frac{1728 \mathrm{E}_2^2}{\mathrm{E}_2^3 - \mathrm{E}_3^2};$$

$$\phi_{-4} := \varphi_{-4},$$

$$\phi_{-2} := \varphi_{-2} + \mathrm{E}_2 \varphi_{-2}.$$

Шаг 4. Вводится квазимодулярная функция

$$\phi_0 := \varphi_{-4} \mathrm{E}_1^2 + 2\varphi_{-2} \mathrm{E}_1 + \mathrm{j} - 1728$$

Шаг 5. При $r > \sqrt{2}$ сходится интеграл

$$a(r) = -4 \left(\sin\left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \right)^2 \int_0^{\mathrm{i}\infty} \phi_0 \left(-\frac{1}{z}\right) z^2 \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} r^2 z} \mathrm{d}z.$$

Выражение для $b(r)$ использует тета-функции, которые мы введём лишь на следующей лекции.

Список литературы

[**Cohn2022**] Henry Cohn, *The work of Maryna Viazovska.* ArXiv: 2207,06913v1 [math.MG] 10 Jul 2022.

[**CohnElkies2003**] Henry Cohn, Noam Elkies *New upper bounds on sphere packings.* Ann. of Math.(2), 157 (2003), no. 2, 689-714.

[**Delsarte1972**] P. Delsarte, *Bounds for unestricted codes, by linear programming.* Philips Res. Rep. 27 (1972), 272-289.

[**Hales2005**] Thomas C. Hales, *A proof of the Kepler conjecture.* Annals of Mathematics, 162 (2005), 1065–1185.

[**KorkinZolotarev1873**] A. Korkin, G. Zolotarev, *Sur les formes quadratiques.* Mathematische Annalen. 6(1873): 366–389.

[**Leech1964**] John Leech, *Some sphere packings in higher space.* Canadian Journal of Mathematics, 16(1964), 657–68.

[**Vyazovska2017**] Marina Vyazovska, *The sphere packings problem in dimension* 8. Annals of Mathematics(2), **185** (2017), no. 3, 991-1015.

[**Маклейн2004**] С. Маклейн, *Категории для работающего математика.* Физматлит, 2004.

[**ХьюиттРосс1975**] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ, тт. 1-2.* М., "Мир", 1975.