Замечательные решётки
Дубна, 2024

Г.Б. Шабат

Лекция 3, 24 июля
Решётки в $\mathbb{C}^g$

Версия 26 июля 2024

3.0. Различие между решётками в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{C}^g$

3.0.0. Внутренняя и внешняя структуры. Поверхности – в $\mathbb{R}^3$ и абстрактные, вложенные и абстрактные пространства, канторово множество.

Решётки как алгебраические объекты – конечно-порождённые свободные абелевы группы. Единственный инвариант – ранг.

3.0.1. Структуры на $\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}$ и на $\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}$. Именно здесь – главные различия между вещественной и комплексной теорией.

Вещественные торы $\frac{\mathbb{R}^n}{\Lambda}$ – компактные коммутативные группы Ли. Единственный инвариант – размерность.

Наоборот, на комплексных торах $\frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$ есть *комплексная структура* – придётся приближённо или точно понять, что это такое. Имеется иерархия "замечательности", интересные инварианты и много открытых проблем.

3.1. Решётки в $\mathbb{C}$

3.1.0. Изоморфизмы решёток и торов. Какие решётки $\Lambda \subset \mathbb{C}$ считать одинаковыми и в какой степени? Какие структуры есть на множестве классов изоморфизма решёток?

Если исходить из равенства решёток, то в прошлой лекции для их различения было введено множество

$$\mathcal{LAT} := \frac{\mathcal{PAR}^+}{\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

На множестве $\mathcal{PAR}^+$ есть очевидная *комплексная структура.* Поскольку действие $\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathcal{PAR}^+$ имеет неподвижные точки на решётках, подобных *гауссовым* и *эйзенштейновым* числам (вот чёткий сигнал их *замечательности*), на факторе $\mathcal{LAT}$ имеется структура не (комплексного) многообразия, а так называемого *орбиобразия.*

На нижней строке диаграммы имеют место аналогичные рассмотрения, касающиеся *подобия* решёток и *конформной эквивалентности* факторов по ним.

Другие виды изоморфизма решёток не рассматриваются.

3.1.1. Автоморфизмы и эндоморфизмы. Если рассматривать комплексные торы $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ просто как одномерные комплексные многообразия (*римановы поверхности*), то на каждом из них, как и на любой *комплексной группе Ли*, транзитивно действует *группа сдвигов* (в силу коммутативности неважно – левых или правых).

Если же рассматривать эти торы именно как *группы*, то сдвиги не являются автоморфизмами: они не сохраняют нейтральный элемент. У большинства групп $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ группа автоморфизмов тривиальна. Исключение снова составляют *гауссовы* и *эйзенштейновы* числа: умножение на i и на $\mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$ коммутируют с соответствующими группам сдвигов и потому определяют нетривиальные автоморфизмы торов.

Что же касается *эндоморфизмов*, их кольцо определяется как

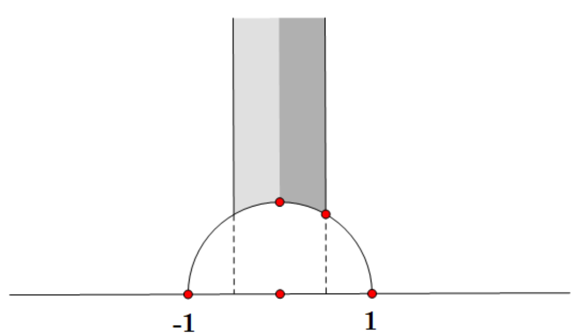
$$\mathrm{End}(\Lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu\Lambda \subseteq \Lambda\}$$

и нетривиально во многих интересных случаях. Подробнее поговорим об этом в подразделе **3.1.6**.

3.1.2. j-инвариант. Вспомним из предыдущей лекции

$$\mathrm{j} := \frac{1728\mathrm{E}_2^3}{\mathrm{E}_2^3 - \mathrm{E}_3^2} = q^{-2} + 744 + 196884q^2 + \dots,$$

где $q = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\tau}$. Эта функция классифицирует решётки с точностью до подобия в следующем смысле: *любая решётка подобна решётке вида $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, где τ, где τ лежит в модулярной фигуре*



$-\frac{1}{2} \le \mathrm{Re}(\tau) \le \frac{1}{2}, |\tau| \ge 1$ (иначе говоря, эта фигура является) *фундаментальной областью* для действия группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ на $\mathcal{H}$ по формуле

$$\left(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1$. Обсуждаемый j-инвариант может быть определён как голоморфная функция на верхней полуплоскости, осуществляющей *конформную эквивалентность* между правой (затемнённой) половиной модулярной фигуры и нижней полуплоскостью и переводящей

$$\mathrm{i}\infty \to \infty, \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} \mapsto 0, \mathrm{i} \mapsto 1728.$$

3.1.3. $\wp$-функция Вейерштрасса и вложение $\frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\mathbb{C})$. Для обсуждаемой функции (наряду со значками $\int$ и $\hbar$) введён специальный типографский символ

$$\wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Производная $\wp$-функции выглядит проще,

$$\wp'_\Lambda(z) := -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$$

(возможно, и ряд для самой $\wp_\Lambda$ хотелось бы записать в таком компактном виде, но тогда он расходился бы).

Пара Λ-периодических функций

$$(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda) : \mathbb{C} \setminus \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

задаёт вложение проколотого тора

$$[(\wp_\Lambda, \wp'_\Lambda)] : \frac{\mathbb{C} \setminus \Lambda}{\Lambda} \hookrightarrow \mathbb{C}^2,$$

а заклеивается оно с помощью вложения в *проективную* плоскость

$$(1 : \wp_\Lambda : \wp'_\Lambda) : \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \hookrightarrow \mathbf{P}_2(\mathbb{C}).$$

Образ аффинного вложения удовлетворяет *уравнению Вейерштрасса*

$$(\wp'_\Lambda)^2 \equiv 4\wp^3 - 60\mathrm{G}_2(\Lambda)\wp_\Lambda - 140\mathrm{G}_3(\Lambda),$$

в силу которого комплексно-аналитическая теория одномерных комплексных торов вписывается в классическую алгебро-геометрическую теорию *плоских кубических кривых.*

Многомерных аналогов у вложения комплексных торов с помощью $\wp$-функций нет!

3.1.4. Тета-функции. Основная тета-функция в *мультипликативной* версии имеет легко запоминаемый вид[1]:

$$\mathbf{\Theta}(Z|q) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2} Z^n.$$

Легко проверяется сходимость этого ряда при $Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{C}, |q| < 1$.

В *аддитивной* версии используются обозначения

$$Z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}, \text{ снова } q = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} \tau}.$$

---

[1] Обозначения в течение двухсот лет не согласовались. Мы частично следуем [**Мамфорд1988**], а частично используем собственные обозначения.

Функция $z \mapsto \theta(z|\tau)$ оказывается $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$-*квазипериодичной*:

$$\theta(z+1|\tau) \equiv \theta(z|\tau),$$
$$\theta(z+\tau|\tau) \equiv \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}(\tau+2z)}\theta(z|\tau),$$

Функция $\theta =: \theta_{11}$ часто рассматривается вместе с её *тремя сестрами* $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}$, которые определяются сдвигами аргумента на полупериод и ещё некоторыми модификациями, см. [**Мамфорд1988**]. Все четыре обладают свойством

$$\left[\theta_{ab}(z|\tau) = 0\right] \Longleftrightarrow \left[z \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} + \frac{a\tau + b}{2}\right].$$

3.1.5. Вложение $(\theta_{00} : \theta_{01} : \theta_{10} : \theta_{11}) : \frac{\mathbb{C}}{2\Lambda} \hookrightarrow \mathbf{P}_3(\mathbb{C})$**.** Оно корректно определено в силу схожих квазипериодических свойств функций θ_{ab}, см. [**Мамфорд1988**]. Образом этого вложения является *пересечение двух квадрик.*

Многомерные аналоги описанного вложения комплексных торов существуют, но далеко не для всех $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$, а только для ХОРОШИХ, образующих $\frac{g(g+1)}{2}$-мерные семейства при каждом g, многомерных решёток Λ.

3.1.6. Комплексное умножение и мнимые квадратичные поля. Выше для решётки $\Lambda \subset \mathbb{C}$ было определено её *кольцо эндоморфизмов*

$$\mathrm{End}(\Lambda) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu\Lambda \subseteq \Lambda\}.$$

В задачах предлагается установить связь таких колец в случае $\mathrm{End}(\Lambda) \supsetneq \mathbb{Z}$ с арифметикой мнимых квадратичных иррациональностей.

Хотя эта теория восходит к 18-му веку, в ней остаются открытые вопросы. С точки зрения нашего курса, то есть *замечательных решёток*, речь идёт о том, какие умножения можно определить на свободной абелевой группе ранга 2, то есть $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$.

Нас интересуют, во-первых, умножения *без делителей нуля*, а, во-вторых, индуцированные вложениями $\Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}$. Получающиеся кольца весьма специальны, в частности, и их алгебраические свойства достаточно близки к свойствам кольца обычных целых чисел[2] $\mathbb{Z}$; один из традиционных вопросов заключается в том, выполняется ли *основная теорема арифметики* об однозначности разложения на простые множители.

Оказывается, что, как правило, теорема не выполняется, и отклонение от её выполнения измеряется некоторой конечной абелевой группой, так называемой *группой классов идеалов.* Бо́льшую часть того, что современные математики знают об этой группой, получено с помощью применения несколько загадочных трансцендентных методов.

Начать приобщение к этим методов предлагается с нескольких задач к этой лекции, решение которых предполагает проведение нетривиальных компьютерных экспериментов.

---

[2]Это несколько странное употребление слова "обычно" объясняется тем, что рассматриваемые кольца являются подкольцами конечного индекса в так называемых *кольцах целых* своих олей частных.

3.2. Решётки в $\mathbb{C}^g$ при $g > 1$

Мы приведём здесь лишь краткие формулировки в надежде сообщить некоторые подробности в последней лекции.

Общая решётка $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ при $g > 1$ определяет весьма "бедный" комплексный тор $\frac{\mathbb{C}^g}{\Lambda}$. На нём нет ни кривых, ни мероморфных функций; и речи не может быть о том, чтобы вложить его в какое-либо проективное пространство $\mathbf{P}_N(\mathbb{C})$.

Тем не менее, при каждом $g > 1$ существует упомянутое выше $\frac{g(g+1)}{2}$-мерное семейство ХОРОШИХ решёток, факторы о которым допускают вложения в проективные пространства. Такие многообразия называются *абелевыми*, и хорошо развита их теория над произвольными полями.

Упомянутые вложения осуществляются *многомерными тета-функциями*, представляющими собой весьма прямые обобщения одномерных.

Среди хороших решёток содержатся $3g-3$-мерные семейства *решёток периодов* комплексных алгебраических кривых рода g. Факторы по этим решёткам называются *якобианами* кривых и могут быть также определены алгебраически над произвольными (алгебраически замкнутыми) полями.

Проблема выделения якобианов из абелевых многообразий называется *проблемой Шоттки*; она пришла из 19-го века и имеет смысл над произвольным (алгебраически замкнутым) полем. Над $\mathbb{C}$ она решена несколько десятилетий назад: *Гипотеза Новикова*, превратившаяся в *теорему Шиоты-Кричевера*, грубо говоря, утверждает, что решётка задаёт якобиан тогда и только тогда, когда, когда её тета-функции удовлетворяют одному из известных уравнений математической физики, уравнению *Кадомцева-Петвиашвили.*

Алгебраическая характеризация соответствующих торов – одна из важных и трудных роблем современной математики.

Список литературы

[Cox1989] David A Cox, *Primes of the form* $x^2 + ny^2$. Wiley& Sons, 1989.
[Мамфорд1988] Д. Мамфорд, *Лекции о тета-функциях.* М., "Мир", 1988.