Вопросы и упражнения на закрепление материала

. . . .

1. Выпишите аксиомы теории групп и теории колец.[1] С помощью теоремы о полноте покажите, что $-x = (-1) \cdot x$ выводима в теории колец.

2. Верно ли, что всякий биективный гомоморфизм является изоморфизмом?

3. Проведите аккуратное доказательство утверждения об изоморфизмах, используя формальное определение для «$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$».

4. Верно ли, что всякая подстуктура абелевой группы является абелевой группой? Аналогичный вопрос для полей.

5. Докажите, что всякое предложение, истинное во всех полях характеристики 0, будет также истинно во всех полях характеристики p для достаточно больших простых p.

6. Проведите полное доказательство теоремы о разрешимости $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{C})$, считая известной разрешимость $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$.

7. Докажите, что модели геометрии в сигнатурах $\langle B^3, \cong^4, =^2\rangle$ и $\langle C^3, =^2\rangle$ (которые были описаны на первой лекции) взаимно определимы друг в друге.

8. Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, где σ конечна, допускает (неэффективную) элиминацию кванторов. Предположим, что $[\Gamma]$ перечислимо. Докажите, что Γ доп. эффективную элиминацию кванторов.

9. Предположим, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ доп. элиминацию кванторов. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — модели Γ, ξ — вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Докажите, что для любых σ-формулы Φ и означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\nu \circ \xi],$$

т.е. «ξ является элементарным вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$».

10. Покажите, что $0 < z \wedge x < y \to x \cdot z < y \cdot z$ выводима в теории упорядоченных колец.

11. Разберите доказательство леммы о «хорошем» делении с остатком в кольце полиномов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. *%лемма 3.6*

12. Завершите доказательство «основной» леммы (т.е. разберите все оставшиеся случаи), которая используется для элиминации кванторов в $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$. *%лемма 3.7*

13. Покажите, что для упорядоченных полей полиномиальная версия теоремы о среднем значении влечёт вещественную замкнутость.

[1] У нас все кольца с единицей.

14. Покажите, что полиномиальная версия теоремы о среднем значении выводима в теории вещественно замкнутых полей.

15. Докажите, что проекция полуалгебраического над $\mathfrak{R}$ множества полуалгебраична над $\mathfrak{R}$.

16. Докажите, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ является о-минимальной.

17. Заполните пробелы в доказательстве теоремы Артина.

. . . .