Краткий экскурс в элементарную логику

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

(МЦМУ МИАН)

Дубна 2024

Структуры

Под сигнатурой понимают четвёрку вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где Const_σ, Func_σ, Pred_σ — попарно непересекающиеся множества, а arity_σ — функция из $\mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы Const_σ, Func_σ и Pred_σ называются соответственно константными, функциональными и предикатными символами σ.

Для данного символа $\varepsilon \in \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ число $\mathrm{arity}_\sigma(\varepsilon)$ называют местностью ε, или арностью ε, или его валентностью.

Когда из контекста ясно, о какой сигнатуре σ идёт речь, индекс $\cdot_\sigma$ может, разумеется, опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\mathrm{Const}_\sigma = \{c_1, \dots, c_i\},$$
$$\mathrm{Func}_\sigma = \{f_1, \dots, f_j\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Pred}_\sigma = \{P_1, \dots, P_k\},$$

то σ удобно представить как

$$\langle c_1, \dots, c_i; f_1^{n_1}, \dots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \dots, P_k^{m_k} \rangle,$$

где n_1, ..., n_j и m_1, ..., m_k — местности соответственно f_1, ..., f_j и P_1, ..., P_k.

Пример

Сигнатура строгих ч.у.м. — $\langle <^2 \rangle$, абелевых групп — $\langle 0; +^2, -^1; =^2 \rangle$.

Под σ-структурой понимают пару вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A — непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ — функция с областью определения $\mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ такая, что:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$;
- для любого n-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^n \to A$;
- для любого m-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^m$.

При этом A называется носителем $\mathfrak{A}$, или универсумом $\mathfrak{A}$, а $I_{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией для σ в $\mathfrak{A}$. Для наглядности вместо $I_{\mathfrak{A}}(c)$, $I_{\mathfrak{A}}(f)$ и $I_{\mathfrak{A}}(P)$ пишут $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ и $P^{\mathfrak{A}}$ соответственно.

Кроме того, если σ представляется как

$$\langle c_1, \ldots, c_i; f_1^{n_1}, \ldots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \ldots, P_k^{m_k} \rangle,$$

то $\mathfrak{A}$ удобно представить как

$$\langle A; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_j^{\mathfrak{A}}; P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых стандартных структур $\mathfrak{A}$ даже индекс $\cdot^{\mathfrak{A}}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

Замечание

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые структуры нормальны, т.е. $=$ всегда интерпретируется обычным образом.

Раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь счётное множество

$$\mathrm{Var} \; := \; \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Элементы Var мы будем называть предметными переменными, или просто переменными; в метаязыке их роль будут играть x, y, z, $\ldots$ (возможно, с индексами).

Пусть σ — произв. сигнатура. Язык $\mathscr{L}_\sigma$ элементарной логики над σ состоит из элементов $\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- $\forall$ и $\exists$ (символы кванторов);
- (,) и , (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \mathrm{Var}$ слова $\forall x$ и $\exists x$ называют кванторами по x.

Обозначим через Term_σ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$f(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma.$$

Элементы Term_σ называют σ-термами. Говорят, что σ-терм является замкнутым, если он не содержит вхождений переменных.

Пример

Пусть σ — сигнатура колец. Тогда

$$\cdot(+(x, 0), +(x, 1))$$

является σ-термом, который удобнее записать как $(x + 0) \cdot (x + 1)$.

Обозначим через At_σ множество всех слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$ вида

$$P\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$. Такие выражения называют σ-атомами, или атомарными σ-формулами.

Обозначим через Form_σ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $\Phi \in \mathrm{At}_\sigma$, то $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ и $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, то $(\Phi \circ \Psi) \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, то $\neg\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то $\{\forall x\, \Phi, \exists x\, \Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$.

Элементы Form_σ называют σ-формулами.

Связанные и свободные переменные

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение $\mathrm{Q}x$ в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют областью действия данного вхождения $\mathrm{Q}x$.

Вхождение x в Φ называется связанным, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и свободным иначе.

Далее, говорят, что x является свободной переменной в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Для удобства введём обозначение

$$\mathrm{FV}(\Phi) \;:=\; \left\{ z \in \mathrm{Var} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{у } z \text{ имеется хотя бы одно} \\ \text{свободное вхождение в } \Phi \end{array} \right\}.$$

Интуитивно элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ играют роль параметров для Φ. Запись $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$ указывает на то, что $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$.

Наконец, обозначим

$$\mathrm{Sent}_\sigma \;:=\; \{\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma \mid \mathrm{FV}(\Phi) = \varnothing\}$$

Элементы Sent_σ называют σ-предложениями, реже — замкнутыми σ-формулами. Они могут выступать в качестве нелог. аксиом.

Пример

Возьмём в качестве σ сигнатуру колец/полей, т.е.

$$\sigma \ := \ \langle 0, 1; +^2, -^1, \cdot^2; =^2 \rangle.$$

Рассмотрим σ-формулы

$$\Phi \ := \ \exists u \left(u \neq 0 \wedge x + u^2 = y \right) \quad \text{и}$$

$$\Psi \ := \ \exists u \left(y_0 + y_1 \cdot u + y_2 \cdot u^2 = 0 \right),$$

где u^2 — сокращение для $u \cdot u$. Тогда

$$\mathrm{FV}(\Phi) \ = \ \{x, y\} \quad \text{и} \quad \mathrm{FV}(\Psi) \ = \ \{y_0, y_1, y_2\}.$$

Поэтому можно писать $\Phi(x, y)$ и $\Psi(y_0, y_1, y_2)$.

Замечание

Можно провести аналогию между кванторами и операторами суммирования, интегрирования и т.д. Так, в выражении

$$\int_0^x y \cdot z \, dy$$

оба вхождения y связаны; вместо них нельзя подставить конкретные числа. Вместе с тем x и z свободны и фактически играют роль параметров. Далее, в выражении

$$2y + \int_0^x y \cdot z \, dy$$

первое вхождение y является свободным, а другие два — нет. Интуитивно данное выражение равносильно

$$2y + \int_0^x u \cdot z \, du.$$

Семантика для элементарной логики

Под означиваниями переменных в $\mathfrak{A}$, или просто означиваниями в $\mathfrak{A}$, понимаются функции из Var в A. Каждое означивание ν в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{\nu} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(x) &:= \nu(x); \\ \overline{\nu}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \overline{\nu}(f(t_1, \ldots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)). \end{aligned}$$

В дальнейшем для любых $x \in \mathrm{Var}$ и $a \in A$ через ν_a^x будет обозначаться означивание, получающееся из ν по правилу

$$\nu_a^x(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x, \\ a & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ (читается как: Φ истинно в $\mathfrak{A}$ при ν) индукцией по построению Φ:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \Vdash P(t_1, \ldots, t_n)\,[\nu] &\iff (\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}};\\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \wedge \Theta\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ и } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu];\\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \vee \Theta\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu];\\
\mathfrak{A} \Vdash \neg\Psi\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu];\\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \to \Theta\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \text{ или } \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu];\\
\mathfrak{A} \Vdash \exists x\, \Psi\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для некоторого } a \in A;\\
\mathfrak{A} \Vdash \forall x\, \Psi\,[\nu] &\iff \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu^x_a] \text{ для всех } a \in A.
\end{aligned}
$$

Стоит отметить, что (не)верность $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ не зависит от того, какие значения ν сопоставляет элементам $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{FV}(\Phi)$.

Если Φ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$, т.е. $\mathrm{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$, то вместо $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ нередко пишут

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[x_1/\nu(x_1), \ldots, x_\ell/\nu(x_\ell)],$$

или же $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu(x_1), \ldots, \nu(x_\ell)]$. В частности, для $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является моделью Γ, и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — кольцо. Если $\mathfrak{A} \Vdash \forall x \, \forall y \, (x \cdot y = y \cdot x)$, то $\mathfrak{A}$ коммутативно; если $\mathfrak{A} \Vdash \forall y \, (x \cdot y = y \cdot x)[\nu]$, то $\nu(x)$ коммутирует со всеми эл-ми.

Для произвольного класса σ-структур $\mathcal{K}$ положим

$$\mathsf{Th}\,(\mathcal{K}) \;:=\; \{\Phi \in \mathsf{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $\mathsf{Th}\,(\{\mathfrak{A}\})$ обычно пишут $\mathsf{Th}\,(\mathfrak{A})$.

Утверждение

Пусть ξ — изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Тогда для каждой σ-формулы Φ и любого означивания ν в $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad\Longleftrightarrow\quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\nu \circ \xi].$$

В частности, $\mathsf{Th}\,(\mathfrak{A})$ совпадает с $\mathsf{Th}\,(\mathfrak{B})$. □

Выполнимость и общезначимость

σ-Формулу Φ называют:

- выполнимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и ν;
- общезначимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всех $\mathfrak{A}$ и ν.

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{A}$ бегает по σ-структурам, тогда как ν — по означиваниям в $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\Phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Чёрча)

Проблема выполнимости — или общезначимости — для элем. логики в сигнатуре $\langle 0; \mathsf{s}^1, +^2, \cdot^2; <^2, =^2 \rangle$ алгоритмически неразрешима.

Семантические следование и эквивалентность

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ семантически следует из Γ, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\,\Phi,$$

Вместо $\varnothing \vDash \Phi$ обычно пишут $\vDash \Phi$. Очевидно,

$$\vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ общезначима.}$$

Наконец, формулы Φ и Ψ называют семантически эквивалентными, если $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Выводимость в элементарной логике

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ запись $\Gamma \vdash \Phi$ означает, что сущ. вывод из Γ с заключением Φ. Вместо $\varnothing \vdash \Phi$ обычно пишут $\vdash \Phi$.

Замечание

Под выводом здесь понимается вывод в гильбертовском исчислении для элементарной логики. Тем не менее, имеются и другие — порой куда более удобные — типы исчислений.

Говорят, что: Φ опровержима в Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$; Φ независима от Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$. Так, Коэн и Гёдель доказали, что:

- C независима от ZF, а CH — от ZFC;
- в частности, $\neg$C не опровержима в ZF, а $\neg$CH — в ZFC.

$\models = \vdash$

Теорема о сильной полноте $\vdash$

Для любых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \Phi.$$

Пример

Пусть Γ — множество всех аксиом теории групп. Тогда $\Gamma \vdash \Phi$ равносильно тому, что Φ истинно во всех группах при всех означиваниях.

Из теоремы о сильной полноте легко следует

Теорема о компактности (Гёделя–Мальцева)

Для любого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, если у каждого конечного $\Delta \subseteq \Gamma$ есть модель, то и у самого Γ есть модель. Обратное очевидно. $\square$

Упражнение

Всякое предложение Φ, истинное во всех полях характеристики ноль, будет также истинно во всех полях характеристики p для достаточно больших простых p.

Наша основная цель

Возьмём в качестве σ сигнатуру упорядоченных колец/полей, т.е.

$$\sigma \;:=\; \langle 0, 1; +^2, -^1, \cdot^2; <^2, =^2 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{R}$ стандартую σ-структуру с носителе $\mathbb{R}$.

Теорема (Тарского)

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{R})$ алгоритмически разрешима.

Доказательство будет потом.

Как-нибудь с помощью метода элиминации кванторов. ...

Теория поля комплексных чисел

Возьмём в качестве ς сигнатуру (неуп.) полей. Обозначим через $\mathfrak{C}$ стандартную ς-структуру с носителем $\mathbb{C}$.

Теорема

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{C})$ разрешима.

Схема доказательства.

Достаточно найти алгоритм, который по каждому ς-предложению Φ строит ς-предложение Φ' такое, что

$$\Phi \ \in \ \mathrm{Th}\,(\mathfrak{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi' \ \in \ \mathrm{Th}\,(\mathfrak{R}).$$

...

Схема доказательства.

Такой алгоритм можно получить с помощью следующих ς-формул:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_0(\vec{x}) \quad &:= \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = 0;\\
\mathrm{F}_1(\vec{x}) \quad &:= \quad x_1 = 1 \wedge x_2 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_+(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \quad &:= \quad \underbrace{x_1 + y_1 = z_1 \wedge x_2 + y_2 = z_2}_{\text{«}(x_1 + ix_2) + (y_1 + iy_2) = z_1 + iz_2\text{»}};\\
\mathrm{F}_-(\vec{x},\vec{y}) \quad &:= \quad \underbrace{y_1 = -x_1 \wedge y_2 = -x_2}_{\text{«}y_1 + iy_2 = -(x_1 + ix_2)\text{»}};\\
\mathrm{F}_\cdot(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \quad &:= \quad \underbrace{x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 = z_1 \wedge x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 = z_2}_{\text{«}(x_1 + ix_2)\cdot(y_1 + iy_2) = z_1 + iz_2\text{»}}.
\end{aligned}$$

[. . .] $\square$

Элементарная геометрия

Рассмотрим сигнатуру

$$\varepsilon \ := \ \langle B^3, \cong^4, =^2 \rangle.$$

Обозначим через $\mathfrak{G}$ ε-структуру с носителем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такую, что:

- $B^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(a, b, c) \ \in \ B^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad b \text{ лежит между } a \text{ и } c \text{ на прямой;}$$

- $\cong^{\mathfrak{G}}$ определяется по правилу

$$(a, b, c, d) \ \in \ \cong^{\mathfrak{G}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{отрезки } ab \text{ и } cd \text{ равны.}$$

Пример

В вышеупомянутой структуре $\mathfrak{G}$ отношения

- «x лежит на прямой yz» и
- «прямые xx' и yy' и параллельны»

определимы посредством соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) &:= B(x,y,z) \vee B(z,x,y) \vee B(y,z,x) \quad \text{и} \\ \Psi(x,x',y,y') &:= x \neq x' \wedge y \neq y' \wedge \neg\exists z\,(\Phi(z,x,x') \wedge \Phi(z,y,y')). \end{aligned}$$

При этом аксиому о параллельных можно выразить так:

$$\begin{aligned} \text{Euclid\_5} := \forall x,y,z\,(x \neq y \wedge \neg\Phi(z,x,y) \to \\ \forall u,v\,(\Psi(z,u,x,y) \wedge \Psi(z,v,x,y) \to \Phi(u,z,v))). \end{aligned}$$

Разумеется, она будет истинна в $\mathfrak{G}$.

Упражнение

Рассмотрим сигнатуру
$$\dot{\varepsilon} \; := \; \langle C^3, =^2 \rangle.$$

Обозначим через $\dot{\mathfrak{G}}$ $\dot{\varepsilon}$-структуру с носителем $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ такую, что
$$(a, b, c) \; \in \; C^{\dot{\mathfrak{G}}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{длины отрезков } ab \text{ и } ac \text{ равны.}$$

Тогда в $\mathfrak{G}'$ определимы:

- $\Big\{(a, b, c) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^3 \mid a, b \text{ и } c \text{ лежат на одной прямой}\Big\}$;
- $\Big\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^4 \mid \text{прямые } ab \text{ и } cd \text{ параллельны}\Big\}$;
- $\Big\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^4 \mid \text{длины отрезков } ab \text{ и } cd \text{ равны}\Big\}$.

Теорема

$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{G})$ разрешима.

Схема доказательства.

Пусть σ — сигнатура упорядоченных полей. Тогда нужный алгоритм можно получить с помощью следующих σ-формул:

$$\mathrm{F}_B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \quad := \quad \exists u\,\exists v\,(0 \leqslant u \wedge 0 \leqslant v \wedge u+v=1 \wedge \vec{y} = u\cdot\vec{x} + v\cdot\vec{z});$$

$$\mathrm{F}_{\cong}\,(\vec{x},\vec{y},\vec{u},\vec{v}) \quad := \quad (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2,$$

где $\vec{y} = u\cdot\vec{x}+v\cdot\vec{z}$ — сокращение для

$$y_1 = u\cdot x_1 + v\cdot z_1 \wedge y_2 = u\cdot x_2 + v\cdot z_2.$$

□

Appendix A: Гомоморфизмы между структурами

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две σ-структуры. Говорят, что $\xi : A \to B$ является гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, если выполнены след. условия:

i. для любого m-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_m) \in A^m$,

$$(a_1, \ldots, a_m) \ \in \ P^{\mathfrak{A}} \quad \Longrightarrow \quad (\xi\,(a_1), \ldots, \xi\,(a_m)) \ \in \ P^{\mathfrak{B}};$$

ii. для любого n-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ и всех $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\xi\left(f^{\mathfrak{A}}\,(a_1, \ldots, a_n)\right) \ = \ f^{\mathfrak{B}}\,(\xi\,(a_1), \ldots, \xi\,(a_n));$$

iii. для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$,

$$\xi\left(c^{\mathfrak{A}}\right) \ = \ c^{\mathfrak{B}}.$$

Инъективный гомоморфизм ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$**, если выполнено усиление (i), где $\Longrightarrow$ заменена на $\Longleftrightarrow$, т.е.

$$\xi^{-1}\left[P^{\mathfrak{B}}\right] \;=\; P^{\mathfrak{A}} \quad \text{для каждого } P \in \mathrm{Pred}_{\sigma}.$$

Сюръективное вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ называют **изоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$**. Наконец, говорят, что **$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны**, и пишут $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$, если сущ. изоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Замечание

Гомом. ξ из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ является изоморфизмом, е.т.е. найдётся обратный к нему гомоморфизм, т.е. гомоморфизм η из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ такой, что

$$\xi \circ \eta \;=\; \mathrm{id}_A \quad \text{и} \quad \eta \circ \xi \;=\; \mathrm{id}_B.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — σ-структуры. Говорят, что $\mathfrak{A}$ явл. подструктурой $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — расширением $\mathfrak{A}$, и пишут $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$, если $A \subseteq B$ и id_A является вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Итак, $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда:

- $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;
- $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \restriction_{A^n}$ для каждого n-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$;
- $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} \cap A^m$ для каждого m-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$.

Понятно, что $S \subseteq B$ является носителем (некоторой) подструктуры $\mathfrak{B}$, если и только если:

i. $c^{\mathfrak{B}} \in S$ для каждого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$;
ii. $f^{\mathfrak{B}}[S^n] \subseteq S$ для каждого n-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$.

Замечание

В случае, когда $S \subseteq B$ удовлетворяет (i–ii), соотв. подструктура определяется однозначно; поэтому *подструктуры нередко отождествляют с их носителями* при условии, что объемлющая $\mathfrak{B}$ фиксирована.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — ч.у.м. Тогда все подструктуры $\mathfrak{A}$ также суть ч.у.м. Кроме того, такие свойства как линейность и фундированность будут наследоваться при переходе к подструктурам.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа в сигнатуре $\langle 0; +^2, -^1; = \rangle$. Тогда подструктуры $\mathfrak{A}$ суть в точности подгруппы $\mathfrak{A}$. Без $-$ в сигнатуре, однако, это было бы неверно, поскольку могут отсутствовать обратные.

Подробности

https://homepage.mi-ras.ru/~speranski/

Teaching » Mathematical Logic I » Spring 2020