Метод элиминации кванторов

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
(МЦМУ МИАН)

Дубна 2024

Обозначим за $\mathsf{Form}_\sigma^\circ$ множество всех бескванторных σ-формул.

Пусть $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$. Говорят, что Γ допускает (эффективную) элиминацию кванторов, если существует (вычислимая) функция τ, которая по каждой $\Phi \in \mathsf{Form}_\sigma$ строит $\tau(\Phi) \in \mathsf{Form}_\sigma^\circ$ такую, что

$$\Gamma \vdash \Phi \leftrightarrow \tau(\Phi) \quad \text{и} \quad \mathsf{FV}(\tau(\Phi)) \subseteq \mathsf{FV}(\Phi).$$

Замечание

Для удобства мы будем считать, что в нашем языке имеются специальные логические константы

$$\top \quad \text{и} \quad \bot,$$

которые являются замкнутыми атомарными σ-формулами. Поэтому $\mathsf{Atom}_\sigma \cap \mathsf{Sent}_\sigma$ будет непусто даже в случае, когда $\mathsf{Const}_\sigma = \varnothing$.

Для каждого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ обозначим $\{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \Gamma \vdash \Phi\}$ через $[\Gamma]$.

Утверждение

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ допускает эф. элиминацию кванторов, и $[\Gamma] \cap \mathrm{Form}^\circ_\sigma$ разрешимо. Тогда $[\Gamma]$ разрешимо.

Доказательство.

Пусть τ реализует эффективную элиминацию кванторов в Γ. Тогда, в частности, для любого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \tau(\Phi),$$

что можно переписать как

$$\Phi \ \in \ [\Gamma] \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(\Phi) \ \in \ [\Gamma] \cap \mathrm{Form}^\circ_\sigma.$$

Поэтому из разрешимости $[\Gamma] \cap \mathrm{Form}^\circ_\sigma$ следует разрешимость $[\Gamma]$. $\square$

Утверждение

Пусть существует вычислимая функция ρ, которая по каждой σ-формуле Φ вида $\exists x\,\Psi$, где Ψ бескванторная, строит бесквант. σ-формулу $\rho(\Phi)$ такую, что

$$\Gamma \vdash \Phi \leftrightarrow \rho(\Phi) \quad \text{и} \quad \mathrm{FV}(\rho(\Phi)) \subseteq \mathrm{FV}(\Phi).$$

Тогда Γ допускает эффективную элиминацию кванторов.

Доказательство.

Определим нужную τ по рекурсии следующим образом.

- Если Φ бескванторная, то $\tau(\Phi) := \Phi$.

...

Доказательство (продолжение).

- Если $\Phi = \Psi \circ \Theta$, где $\circ \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, то $\tau(\Phi) := \tau(\Psi) \circ \tau(\Theta)$.
- Если $\Phi = \neg\Psi$, то $\tau(\Phi) := \neg\tau(\Psi)$.
- Если $\Phi = \exists x\, \Psi$, то $\tau(\Phi) := \rho(\exists x\, \tau(\Psi))$.
- Если $\Phi = \forall x\, \Psi$, то $\tau(\Phi) := \neg\rho(\exists x\, \neg\tau(\Psi))$.

Легко проверить, что для всех $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \leftrightarrow \tau(\Phi) \quad \text{и} \quad \mathrm{FV}(\tau(\Phi)) \subseteq \mathrm{FV}(\Phi),$$

т.е. τ реализует эффективную элиминацию кванторов в Γ. $\square$

Упражнение

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ допускает элиминацию кванторов, $[\Gamma]$ перечислимо. Тогда Γ допускает эффективную элиминацию кванторов.

Упражнение

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ доп. элиминацию кванторов. Предположим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — модели Γ, ξ — вложение $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Тогда для любых σ-формулы Φ и означивания ν в A,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{B} \Vdash \Phi\,[\nu \circ \xi]$$

— в таком случае говорят, что вложение ξ является элементарным.

Общие комментарии

Эффективная элиминация кванторов в $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$, если она возможна, нередко позволяет:

- получить явный разрешающий алгоритм для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$;
- дать исчерпывающее описание определимости в $\mathfrak{A}$;
- построить разрешимое множество аксиом для $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$.

Эффективная элиминация кванторов в Γ также нередко позволяет получить явный разрешающий алгоритм для $[\Gamma]$. Тут уже полнота может как иметь, так и не иметь места; так или иначе, бескванторные предложения куда проще, чем произвольные.

Здесь всюду речь идёт о «естественных» структурах и теориях.

Appendix: Кольца и поля

Пусть ς — сигнатура колец. Обозначим через Ring множество, состоящее из универсальных замыканий след. ς-формул:

- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- $x + 0 = 0 + x = x$;
- $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
- $x + y = y + x$;
- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
- $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Модели Ring называют кольцами. Отметим, что у нас все кольца с единицей. Часто считается, что $0 \neq 1$.

Чтобы получить коммутативные кольца, нужно добавить

- $x \cdot y = y \cdot x$;

Далее, коммутативное кольцо называют полем, если в нём истинно универсальное замыкание ς-формулы

- $x \neq 0 \to \exists u\, x \cdot u = 1$.

Более того, можно добавить порядок, согласованный со структурой — так получаются упорядоченные кольца и поля. При этом ς обогащается посредством добавления $<$, чьё поведение регулируют след. естественные формулы:

- $x \not< x$; $\quad$ %$\neg x < x$
- $x < y \land y < z \to x < z$;
- $x \neq y \to x < y \lor y < x$;
- $x < y \to x + z < y + z$;
- $0 < x \land 0 < y \to 0 < x \cdot y$.

Обращаю внимание, что порядок тут линейный. Очевидно, ς-обеднения упорядоченных колец/полей суть (неуп.) кольца/поля.

Упражнение

В теории упорядоченных колец выводима

$$0 < z \land x < y \to x \cdot z < y \cdot z.$$