Алгебра многогранников и обращение рядов

А.П. Веселов

Летняя школа "Современная математика", Ратмино, 25 июля 2024

Обращение рядов (задача Лагранжа)

Рассмотрим степенной ряд $f(x) = x + \sum_{n\geq 2} f_n x^n$ и его обратный относительно подстановки $g(x) = x + \sum_{n\geq 2} g_n x^n$:

$$f(g(x)) = g(f(x)) \equiv x.$$

Коэффициенты g_n выражаются как некоторые многочлены от $f_1, \dots, f_n$ с целыми коэффициентами: $g_2 = -f_2$, $g_3 = -f_3 + 2f_2^2$,

$$g_4 = -f_4 + 5f_2f_3 - 5f_2^3, \qquad g_5 = -f_5 + 6f_2f_4 + 3f_3^2 - 21f_2^2f_3 + 14f_2^4.$$

Обращение рядов (задача Лагранжа)

Рассмотрим степенной ряд $f(x) = x + \sum_{n\geq 2} f_n x^n$ и его обратный относительно подстановки $g(x) = x + \sum_{n\geq 2} g_n x^n$:

$$f(g(x)) = g(f(x)) \equiv x.$$

Коэффициенты g_n выражаются как некоторые многочлены от $f_1, \dots, f_n$ с целыми коэффициентами: $g_2 = -f_2$, $g_3 = -f_3 + 2f_2^2$,

$$g_4 = -f_4 + 5f_2 f_3 - 5f_2^3, \qquad g_5 = -f_5 + 6f_2 f_4 + 3f_3^2 - 21f_2^2 f_3 + 14f_2^4.$$

Пример: $f(x) = \operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots,$

$$g(u) = \operatorname{tg} u = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^3 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Обращение рядов (задача Лагранжа)

Рассмотрим степенной ряд $f(x) = x + \sum_{n \geq 2} f_n x^n$ и его обратный относительно подстановки $g(x) = x + \sum_{n \geq 2} g_n x^n$:

$$f(g(x)) = g(f(x)) \equiv x.$$

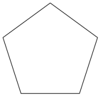
Коэффициенты g_n выражаются как некоторые многочлены от $f_1, \dots, f_n$ с целыми коэффициентами: $g_2 = -f_2, \;\; g_3 = -f_3 + 2f_2^2,$

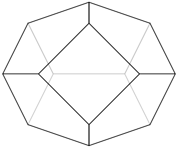
$$g_4 = -f_4 + 5f_2 f_3 - 5f_2^3, \qquad g_5 = -f_5 + 6f_2 f_4 + 3f_3^2 - 21f_2^2 f_3 + 14f_2^4.$$

Пример: $f(x) = \operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \dots,$

$$g(u) = \operatorname{tg} u = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^3 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Loday 2005: связь задачи Лагранжа с комбинаторикой **ассоциэдров**





Ассоциэдр: многогранник Сташефа

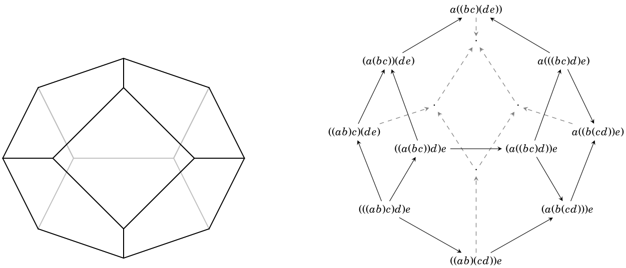


Рис.: 3D ассоциэдр K_5

Число вершин - **числа Каталана**: $1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \dots,$ задаваемые рекурсией

$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} C_{n-i}, \quad C_0 = 1,$$

или явно как $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Мультипликативное обращение рядов и пермутоэдры

Рассмотрим теперь экспоненциальный ряд $A(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$ и его обратный по умножению $B(x) = \frac{1}{A(x)} = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n \frac{x^n}{n!}$:

$$b_1 = -a_1, \;\; b_2 = -a_2 + 2a_1^2, \;\; b_3 = -a_3 + 6a_1 a_2 - 6a_1^3,$$

$$b_4 = -a_4 + 8a_1 a_3 + 6a_2^2 - 36a_1^2 a_2 + 24a_1^4.$$

Рассмотрим теперь экспоненциальный ряд $A(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$ и его обратный по умножению $B(x) = \frac{1}{A(x)} = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n \frac{x^n}{n!}$:

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2 + 2a_1^2, \quad b_3 = -a_3 + 6a_1a_2 - 6a_1^3,$$
$$b_4 = -a_4 + 8a_1a_3 + 6a_2^2 - 36a_1^2a_2 + 24a_1^4.$$

$$A(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!}x^n, \quad B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}x^n,$$

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730},$$

Мультипликативное обращение рядов и пермутоэдры

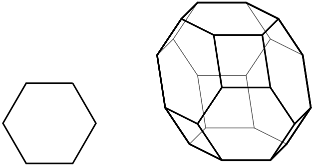
Рассмотрим теперь экспоненциальный ряд $A(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} a_n \frac{x^n}{n!}$ и его обратный по умножению $B(x) = \frac{1}{A(x)} = 1 + \sum_{n\geq 1} b_n \frac{x^n}{n!}$:

$$b_1 = -a_1, \quad b_2 = -a_2 + 2a_1^2, \quad b_3 = -a_3 + 6a_1a_2 - 6a_1^3,$$
$$b_4 = -a_4 + 8a_1a_3 + 6a_2^2 - 36a_1^2a_2 + 24a_1^4.$$

$$A(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!}x^n, \quad B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}x^n,$$

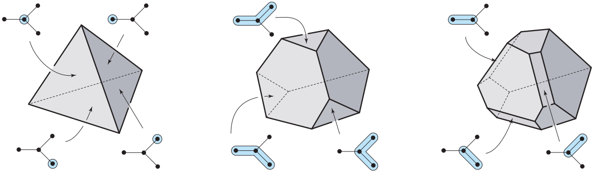
$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730},$$

Aguiar, Ardila 2017: связь с комбинаторикой **пермутоэдра** Π_n с вершинами $\sigma(\rho) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S_n$, $\rho = (1, 2, \ldots, n)$.

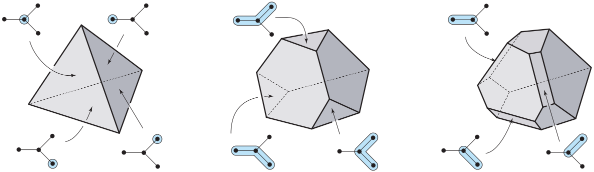


Граф-ассоциэдры

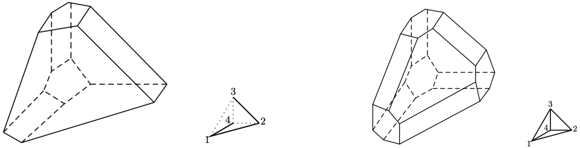
Carr, Devadoss 2006: Граф-ассоциэдр как усеченный симплекс



Carr, Devadoss 2006: Граф-ассоциэдр как усеченный симплекс

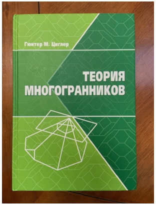


Важные примеры: *ассоциэдр и пермутоэдр отвечают простой цепи и полному графу соответственно*.



Про дифференциальную алгебру многогранников:

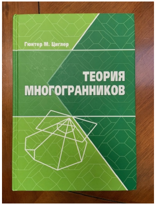
В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, Т.Е. Панов *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников*, Приложение в книге Циглера:



Что почитать

Про дифференциальную алгебру многогранников:

В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, Т.Е. Панов *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников*, Приложение в книге Циглера:



Про связь с обращением рядов:

V.M. Buchstaber, A.P. Veselov *Differential algebra of polytopes and inversion formulas*, arXiv 2402.07168.

Про связь с интегрируемыми системами:

В.Э. Адлер Разбиения множеств и интегрируемые иерархии, ТМФ, 2016, том 187, номер 3, 455–486.