Задачи к курсу «Алгебраические моноиды»

ЛШСМ 2024

1. Докажите, что если $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ — замкнутые (в топологии Зарисского) подмногообразия, то $X_1 \cup X_2$ тоже.

2. Пусть $Y = \{x^3 - y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ и морфизм $\varphi\colon \mathbb{C}^1 \to Y$ задан формулой $\varphi(t) = (t^2, t^3)$.

   2.1 Докажите, что φ^{-1} — не морфизм.

   2.2 Докажите, что $\mathbb{C}^1 \ncong Y$.

3. Проверить, что умножение
$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1^a + y_2 x_1^{a'}),$$
где $a, a' \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, определяет структуру аффинного алгебраического моноида на $\mathbb{C}^2$.

4. Докажите, что любой алгебраический моноид на $\mathbb{C}^1$ изоморфен либо $(\mathbb{C}, +)$, либо $(\mathbb{C}^\times, \times)$.

5. Докажите, что если X и Y — неприводимые аффинные алгебраические многообразия, то $X \times Y$ тоже неприводимо.

6. Разложить на неприводимые компоненты аффинное алгебраическое многообразие
$$\{y^2 = xz,\ y^3 = z^2\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

7. Проверить, что $\varphi\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad+bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}$ — гомоморфизм алгебраических моноидов.

8. Пользуясь аналогичным утверждением про моноиды, доказать, что любая аффинная алгебраическая полугруппа изоморфна замкнутой подполугруппе в полугруппе матриц.

9. Доказать, что $\mathbb{C}^1$ — нормальное аффинное алгебраическое многообразие.

10. Найти все структуры аффинных алгебраических моноидов на торическом многообразии X_σ для
$$\sigma = \{(x, y) \mid x, y \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{Q}^2.$$
Сверить с ответом с первой лекции.

Для связи: @yzaitseva или yzaytseva@hse.ru