

Н. Константинов

Введение в математический анализ

курс задач для 9 - 10 класса.

1971 г.
Москва

Как эта книжка возникла.

Математический анализ можно преподавать таким способом, что основное внимание уделяется самостоятельному решению задач, в том числе доказательству основных теорем. Раз в два или три занятия (занятия двух- и трёхчасовые) ученикам выдаются очередные задания (листочки). Учащиеся решают задачи в классе и дома и сдают все решения преподавателям. При этом почти не применяется обычная форма урока с рассказом материала и проверкой усвоения методом опроса. Не задаются задания "выучить такую-то теорему" или "прорешать к следующему разу такие-то примеры". За сданные задачи не ставится отметка. Отметки ученики получают не за то, как они учатся, а за то, как выучиваются, что проверяется на контрольных и самостоятельных работах.

Из таких листочков с заданиями, переписанных подряд, однажды был составлен сборник, подобный предлагаемому (М.Л. Гервер, Н.Н.Константинов, А.Г.Кушниренко, "задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся 9 и 10 классов", сборник "Обучение в математических школах", издательство "Просвещение", 1965 г.; в этом сборнике в ряде статей освещается методика такого преподавания анализа). Но преподавание в каждом классе отличается от других. Возникают новые задачи и новые варианты построения курса. Один из таких вариантов нашёл отражение в предлагаемом сборнике. Редактируя сборник, я старался учесть положительный опыт нескольких математических и физических классов московских школ № 7 и 57, при этом широко пользовался задачами, придуманными или собранными учителями этих классов, в особенности задачами И.Н. Бернштейна.

Часть I. Описание действительных чисел.

Чтобы заниматься математическим анализом, нужно знать свойства действительных чисел. Из курса алгебры 8-го класса вы знаете, что действительные числа бывают рациональные и иррациональные, что среди рациональных чисел имеются целые, а среди целых натуральные (1, 2, 3, ...). Вы умеете производить над числами арифметические операции и знаете многие свойства этих операций. Вы знаете также, что действительные числа упорядочены, то-есть имеет смысл говорить, что одно число больше другого, и знаете многие свойства этого понятия. Нам понадобится много новых свойств действительных чисел. Мы будем выводить их, исходя из известных свойств. При этом было бы весьма неприятно, если бы возникали сомнения, какие свойства считать известными, а какие требующими вывода. Наша математика тогда потеряла бы характер формальной игры с чёткими правилами. Чтобы она была такой игрой, мы выпишем полный список "известных" фактов - аксиом действительных чисел, и все остальные свойства (как бы они ни казались "очевидными") будем формально выводить из этих аксиом. Полный список аксиом (основных свойств) действительных чисел содержится в листках I - I9. Кроме того, там приведено много вспомогательных (производных) свойств действительных чисел. Все производные свойства являются задачами, которые нужно решать, исходя из всех сформулированных до этого основных и производных свойств.

От учащихся требуется умение правильно строить логические рассуждения. Такие речевые обороты, как "следует", "или", "для любого", "найдётся" и т.п. нужно понимать в том точном смысле, как это принято в математике. Равенство понимается в следующем смысле: $a=b$ есть запись утверждения, что "а" и "в" - обозначения одного и того же объекта рассматриваемой теории, в случае равенства чисел - это обозначения одного и того же числа.

Сложение и вычитание.

Множество $\mathbb{D}$ действительных чисел содержит элемент 0, и в этом множестве определены операции сложения и вычитания, то-есть $a+b$ и $a-b$ суть вполне определённые числа, если a и b - числа.

При этом имеют место следующие основные свойства (аксиомы):

- 1). $a+b=b+a$
- 2). $(a+b)+c=a+(b+c)$
- 3). $a+0=a$
- 4). Из $a-b=c$ следует, что $b+c=a$.

Замечание. Во всех аксиомах вхождение "свободной переменной буквы" означает, что аксиома есть верное утверждение при всех допустимых значениях этой буквы. Если про букву ничего не сказано, то допустимыми являются все предметы рассматриваемой теории, в данном случае все действительные числа.

Упражнения (производные свойства).

- I. Доказать, что $((a+b)+c)+d = a+(b+(c+d))$

Замечание. В сумме $a+b+c+d$ можно не ставить скобок, так как результат не зависит от того, как эти скобки поставлены. Точная формулировка этого утверждения в общем виде дана в листке 9, где вы будете иметь базу для доказательства этого факта. Во всех листках, кроме I-го и 9-го этим фактом разрешается пользоваться без оговорок.

Определение. $-a$ означает 0-а ($-a$ называется числом, противоположным для a).

2. $a+(-a) = 0$.
3. Только одно число обладает свойством нуля, то-есть существует только одно число x такое, что для любого a $a+x=a$.
4. Для чисел a и b существует только одно такое число x , что $a+x=b$ (то-есть для данных a и b только одно число обладает свойством их разности; в случае $b=0$ этот факт означает, что только одно число обладает свойством противоположного числа для a).
5. $a-b = a+(-b)$.
6. Обосновать сокращение левой и правой части равенства на одно и то же слагаемое. Обосновать перенос слагаемого в другую часть равенства с противоположным знаком.
7. Если к обеим частям неверного равенства прибавить одно и то же число, то получится неверное равенство.
8. $-(-a) = a$.
9. Доказать, что $-(a+b-c+d-e)=-a-b+c-d+e$ (выражение $a+b-c+d-e$ нужно понимать так: $((a+b)-c)+d-e$).

Так обосновывается правило знаков при раскрытии скобок. В дальнейшем им разрешается пользоваться без оговорок.

Умножение.

В множестве $\mathbb{D}$ действительных чисел есть число I , не равное 0 , и определена операция умножение, то-есть символ $a \cdot b$ обозначает определённое число, если a и b — числа. При этом выполняются аксиомы:

- 5). $a \cdot b = b \cdot a$
- 6). $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 7). $a \cdot I = a$
- 8). $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Упражнения.

I0. $((ab)c)d = a(b(cd))$ (если между рядом написанными выражениями нет точки, она подразумевается).

Замечание, аналогичное замечанию к упражнению I листка-I.

II. Только одно число обладает свойством единицы (то-есть имеется только одно такое число x , что для любого a $ax = a$).

I2. $2 \cdot 2 = 4$ ("2" называется $I+I$, "3" называется $2+I$, "4" называется $3+I$).
 $a+a = 2a$.

I3. $a \cdot 0 = 0$.

I4. $a \cdot (-I) = -a$.

I5. $(-I) \cdot (-I) = I$; $(-a) \cdot (-a) = a^2$ (a^2 — это $a \cdot a$) .

I6. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

I7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

I8. Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Этими и подобными задачами обосновываются все обычные правила раскрытия скобок и приведения подобных. В дальнейшем мы будем свободно пользоваться этими правилами.

Деление.

В множестве $\mathbb{D}$ действительных чисел определена операция деление на число, не равное 0, то-есть для любых данных чисел a и b ($b \neq 0$) символ $a:b$ обозначает вполне определённое число. При этом выполнена аксиома:

9). Из $a:b=c$ следует, что $b.c = a$.

Определение: $I:b$ обозначается через b^{-I} и называется числом, обратным к b .

Упражнения.

19. $a.a^{-I} = I$.

20. Для чисел a и b ($a \neq 0$) существует только одно такое число x , что $a.x = b$ (то-есть для данных a и b только одно число обладает свойством их разности; в случае $c=I$ этот факт означает, что только одно число обладает свойством обратного числа для a).

21. $a:b = a.(b^{-I})$ (при $b \neq 0$).

22. Обосновать сокращение левой и правой части равенства на один и тот же отличный от нуля сомножитель. Обосновать перенос сомножителя из одной части равенства в знаменатель другой части равенства.

23. Если обе части неверного равенства умножить на одно и то же число, то получится неверное равенство.

24. $(a^{-I})^{-I} = a$ (при $a \neq 0$).

25. Доказать, что $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$ ($b, d, f \neq 0$).

Так обосновываются обычные правила работы с дробями. В дальнейшем этими правилами разрешается пользоваться без оговорок.

Итак, я попросил вас доказать 25 теорем. Но среди них есть две неверных. Одну из них я хочу разобрать. Речь идёт о задаче I8: если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. Дело в том, что этот факт не следует из аксиом I - 8. Для доказательства этого рассмотрим множество из четырёх элементов, которые мы обозначим через 0, 1, 2, 3. Определим операции сложения и умножения для них таблицами:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(то-есть для того- чтобы произвести такую операцию, нужно произвести её в обычной арифметике, а затем взять остаток от деления на 4). Определите сами операцию вычитания так, чтобы выполнялась аксиома 4. Легко проверить, что для этих операций будут выполняться аксиомы I - 8. Значит, будут выполняться и следствия из этих аксиом, приведённые в упражнениях, так как в доказательствах вы не пользовались ничем, кроме аксиом. А утверждение задачи I8 в этой арифметике не выполнено, так как $2 \cdot 2 = 0$. Это и доказывает, что это утверждение не является следствием аксиом I - 8. Описанная арифметика из 4-х элементов с такими операциями "+" и "." называется 4-арифметикой.

Приведённое рассуждение - одно из типичных рассуждений для тех случаев, когда требуется установить, что какое-то утверждение не является следствием некоторой системы аксиом. Строится модель этой системы аксиом - в данном случае - 4-арифметика - то-есть объект, для которого выполняются все эти аксиомы, а потому и их следствия, причём модель подбирается таким образом, чтобы рассматриваемое утверждение для неё не было верно.

Но утверждение задачи I8 можно доказать, если пользоваться аксиомой 9). Значит, мы восстановим истину, если переместим эту задачу в начало следующего листка.

Сделайте эту задачу, пользуясь аксиомой 9).

Следующая группа свойств относится к натуральным числам. Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, 4, ... (2 равно по определению $1+1$, 3 равно по определению $2+1$, 4 равно по определению $3+1$ и т.д.). Загадочные слова "и т.д." заменяют бесконечное описание. Натуральные числа — это те самые числа, к которым мы с детства привыкли, числа, которыми мы считаем. Но из аксиом I — 9 это не следует, так как в 2-арифметике все аксиомы I — 9 выполнены, между тем при счёте числами 0 и 1 не обойдётся (в 2-арифметике $2=0$). Нужны новые аксиомы. Они вместе с некоторыми следствиями приведены в следующем (дополнительном) листке 4. Результатом этого листка является то, что к натуральным числам можно применять рассуждение по индукции. Затем в листке 8 говорится о том, что означает "считать" и почему можно считать с помощью натуральных чисел.

Следующая группа свойств относится к соотношению между натуральными, целыми и рациональными числами. Целые числа охватывают натуральные, 0 и натуральные со знаком "-", рациональные — это частные от деления целых. Подробно об этом говорится в листке 5. Следствием этого листка является то, что с действительными числами можно обращаться во всех отношениях так, как вы привыкли в младших классах. В листках до 5-го включительно нет только двух вещей: нет понятий "меньше" и "больше" и ничего нет об иррациональных числах.

Теперь, если качественное описание ситуации с натуральными числами, приведённое на этой странице, вас устраивает (так же, как слова о целых и рациональных числах), пропустите листки 4 и 5 и переходите к листку 6, где говорится о порядке.

Натуральные числа.

В множестве $\mathbb{D}$ действительных чисел выделено подмножество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, так что при этом выполнены аксиомы:

- IO). 0 не входит в $\mathbb{N}$
- II). 1 входит в $\mathbb{N}$
- I2). Если a входит в $\mathbb{N}$, то $a+1$ входит в $\mathbb{N}$
- I3). Если 1 входит в множество M и для любого натурального числа a из того, что a входит в M следует, что $a+1$ входит в M , то все натуральные числа входят в M (аксиома индукции).

Замечание. В формулировке аксиомы индукции вместо того, чтобы говорить о том, что число входит в множество, можно говорить о том, что для числа выполняется свойство. Свойство числа x обозначается через $P(x)$; в зависимости от x $P(x)$ принимает значения "истина" или "ложь". Аксиому индукции можно схематически записать так:

$$\frac{P(1), P(x) \rightarrow P(x+1)}{P(x)}$$

Упражнения.

- 26. -5 не есть натуральное число.
- 27. Сумма двух натуральных чисел есть натуральное число.
- 28. Произведение двух натуральных чисел есть натуральное число.
- 29. Если a и b натуральны, то $a+b \neq 1$.
- 30. Если x натурально, и $x \neq 1$, то $x-1$ натурально.
- 31. $\frac{1}{3}$ не есть натуральное число.

Целые и рациональные числа.

В множестве $\mathbb{D}$ действительных чисел есть подмножество $\mathbb{R}$ рациональных чисел, в нём подмножество $\mathbb{Z}$ целых чисел, в нём подмножество $\mathbb{N}$ натуральных чисел (замечу, что понятие "подмножество" не исключает возможности, что подмножество совпадает со всем множеством). При этом выполнены аксиомы:

- I4). Если a и b натуральны, то $a-b$ целое.
 I5). Если x целое, то найдутся натуральные a и b такие, что $a-b = x$.
 I6). Если a и b целые, и $b \neq 0$, то $\frac{a}{b}$ рациональное.
 I7). Если x рациональное, то найдутся целые a и b ($b \neq 0$) такие, что $x = \frac{a}{b}$.

Упражнения.

32. Сумма двух целых чисел есть целое число. Разность и произведение двух целых чисел суть целые числа. 0 и 1 суть целые числа.

Замечание. Мы видим, что целые числа есть объект, для которого выполняются аксиомы I - 8. Такой объект называется алгебраическим кольцом (коммутативным с единицей; коммутативностью называется свойство, выраженное аксиомой 5).

33. Если x - целое, то имеет место одно и только одно из трёх обстоятельств: $x=0$, x натурально, $-x$ натурально.

Из этого следует, что целые числа представляют собой объединение трёх непересекающихся множеств: множества натуральных чисел, множества, состоящего из одного нуля, и множества натуральных чисел, взятых со знаком "-".

34. Сумма, разность и произведение двух рациональных чисел есть рациональное число. 0 и 1 суть рациональные числа (то-есть множество рациональных чисел есть алгебраическое кольцо).

35. Частное от деления двух рациональных чисел a и b ($b \neq 0$) есть рациональное число.

Замечание. Мы видим, что в множестве рациональных чисел выполняются аксиомы I - 9. Такой объект называется полем. Так как всё множество действительных чисел является полем, то можно сказать, что множество рациональных чисел является подполем поля действительных чисел.

Действительное число, которое не является рациональным числом, называется иррациональным числом.

Заметим, что существование иррациональных чисел не следует из аксиом I - I7, так как поле рациональных чисел удовлетворяет этим аксиомам, а в нём нет иррациональных чисел.

Неравенства.

В множестве действительных чисел определено отношение " $<$ " (меньше), так что при этом выполняются следующие аксиомы (основные свойства):

- 18). Для любых двух чисел a и b имеет место одно и только одно из утверждений: " $a < b$ ", " $a = b$ ", " $b < a$ ".
- 19). Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
- 20). Если $a < b$, то $a + c < b + c$.
- 21). Если $a < b$, и $0 < c$, то $ac < bc$.

Замечание. Наряду со значком " $<$ " мы пользуемся значком " $>$ " в следующем смысле: $a > b$ означает $b < a$.

Упражнения.

36. $1 > 0$.
37. Обосновать сокращение обеих частей неравенства на одно и то же слагаемое и перенос слагаемого из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.
38. $a > b$ в ттк (тогда и только тогда, когда) $a - b$ положительно (положительно - значит больше нуля).
39. Если $a \neq 0$, то $a^2 > 0$.
40. Если $a > 0$, то $\frac{1}{a} > 0$.
41. Обосновать сокращение обеих частей неравенства на один и тот же положительный сомножитель.
42. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$ (неравенства одинакового смысла можно складывать).
43. Если $0 < a < b$, то $a^2 < b^2$.
44. Если $0 < a < b$, и $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ существуют, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ (корни берутся положительные).

Дополнительные.

45. Всякое натуральное число положительно.
46. Всякое положительное целое натурально.
47. Доказать, что среди натуральных чисел $a < b$ в ттк $b - a$ натурально.

Листок 7 (НН)
дополнительный

Задачи о независимости аксиом неравенств.

48. Доказать, что аксиому 2I нельзя доказать, исходя из аксиом I - 20.
49. Доказать, что аксиому 20 нельзя доказать, исходя из аксиом I - 19 и 2I.
50. Доказать, что аксиому 19 нельзя доказать, исходя из аксиом I - 18, 20 и 2I.

Указание.

Эти задачи можно решать с помощью моделей, аналогично тому, как это описано на стр. 7. За основу при построении модели можно взять поле рациональных чисел с обычными операциями, тогда все аксиомы I - 17 выполняются. Затем нужно придумать отношение "меньше", отличающееся от обычного, так, чтобы из аксиом 19, 20, 2I не выполнялась ровно одна, и именно та, независимость которой доказывается.

Дополнительная задача.

- 5I. Придумать такое алгебраическое действие, то-есть правило, по которому двум числам a и b однозначно сопоставляется третье, обозначаемое через $a \S b$, чтобы было:

- 1) $a \S b = b \S a$
- 2) $(a \S b) \S c = a \S (b \S c)$
- 3) $(a \S b) + c = (a + c) \S (b + c)$.

Если вы одно такое действие придумали, то придумайте ещё одно. Если же вы придумали второе, то имейте в виду, что существует и третье. Запомните себе эту задачу на будущее.

Счёт с помощью натуральных чисел.

52. Всякое непустое подмножество множества натуральных чисел содержит первый (наименьший) элемент (для всего множества натуральных чисел наименьшим элементом является 1).
53. Докажите, что можно пользоваться следующей формой индукции:
Пусть $Y(k)$ – свойство, зависящее от натурального номера k (свойство числа k). Если для всякого натурального k верно утверждение:
"если для всех натуральных p , меньших k , верно $Y(p)$, то верно $Y(k)$ ",
то $Y(k)$ верно для всех натуральных k .
54. Ограниченное сверху множество, состоящее из натуральных чисел, имеет наибольший элемент.
(Множество M называется ограниченным сверху, если существует такое число C , что всякий элемент M меньше C).

Определение. $\mathbb{N}$ -отрезком натурального ряда называется множество натуральных чисел x , удовлетворяющих неравенствам $1 \leq x \leq \mathbb{N}$.

Определение. Взаимно-однозначным соответствием множеств A и B называется правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один определённый элемент множества B , так что при этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие одному определённому элементу множества A .

Это определение является основой всякого счёта, так как даёт возможность заменить точным понятием взаимно-однозначного соответствия интуитивное представление об одинаковости числа элементов двух множеств. Такая замена нам необходима, так как мы должны сказать об этой одинаковости раньше, чем сказали, что такое счёт.

Определение. Если существует взаимно-однозначное соответствие множества M и $\mathbb{N}$ -отрезка натурального ряда, то множество M называется конечным и содержащим $\mathbb{N}$ элементов.

55. Если множество M содержит k элементов, и в то же время оно содержит p элементов, то $k=p$.
56. Если M и P – два непересекающиеся множества, содержащие соответственно m и p элементов, то объединение этих множеств содержит $m+p$ элементов.

Листок 9 (СМ)
дополнительный

Суммирование № чисел.

Определение. Для всякого конечного множества чисел $a_1, a_2, \dots, a_r$, содержащего r элементов, определим их сумму

$+_r(a_1, a_2, \dots, a_r)$ (иначе обозначаемую $a_1 + a_2 + \dots + a_r$)

по следующему индуктивному правилу:

$$1) +_1(a_1) = a_1$$

$$2) +_{k+1}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = +_k(a_1 \dots a_k) + a_{k+1}$$

57. Доказать, что по этому правилу можно вычислить сумму для любого конечного набора чисел.

$$58. +_{r+k}(a_1, \dots, a_r, a_{r+1} \dots a_{r+k}) = +_r(a_1 \dots a_r) + +_k(a_{r+1} \dots a_{r+k}) .$$

$$59. \text{ Для всякого натурального } k \quad k = +_k(1, 1, \dots, 1).$$

60. Определите аналогично произведение k сомножителей и докажите теорему, аналогичную 58.

Разложение натуральных чисел на множители.

Определение. Натуральное число k называется составным, если его можно представить как произведение $p \cdot q$, где p и q - натуральны и отличны от 1. Всякое натуральное число, отличное от 1 и не являющееся составным, называется простым.

61. Докажите, что в множестве всех натуральных чисел, кроме 1, наименьшим является 2.

62. Доказать, что 2 - число простое.

63. Доказать, что всякое составное число представляется как произведение конечного числа простых сомножителей.

64. Доказать, что разложение натурального числа на простые сомножители единственно (с точностью до перестановки сомножителей).

Содержательные задачи.

65. Если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Когда достигается равенство?

66. Какое наименьшее значение имеет выражение $a + \frac{9}{a}$ ($a > 0$)?

67. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического (в предположении, что среднее геометрическое существует).

68. (Дополнительная). Аналогичное утверждение для среднего арифметического и среднего геометрического n чисел.

69. Доказать, что $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется слабо выпуклой, если её значение в середине любого отрезка области задания меньше среднего арифметического её значений на концах этого отрезка.

70. Доказать, что функция $y=x^2$ слабо выпукла. Доказать, что функция $y=x^2 + px + c$ слабо выпукла.

71. Решить неравенство: $\frac{(x-2)(x+1)(x+3)}{(x-5)} \geq 0$

Пояснение. Говорят, что число x_0 удовлетворяет неравенству, содержащему x , если в результате подстановки в это неравенство числа x_0 вместо x получается верное неравенство. Решить неравенство, содержащее x , - значит дать явное описание всех x , которые ему удовлетворяют.

72. Пусть трёхчлен ax^2+bx+c имеет два различных корня x_0 и x_1 , причём a положительно и x_0 меньше x_1 . Какой знак принимает трёхчлен для x , меньших x_0 , какой для x между x_0 и x_1 и какой для x , больших x_1 ? Что можно сказать о знаке трёхчлена, который не имеет корней или имеет только один двойной корень?

73. Решить неравенство $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3} \geq 2$.

Модули.

Определение. Модулем числа x (обозначение $|x|$) называется число x , если $x \geq 0$, и число $-x$, если $x < 0$.

74. Доказать, что для любого x $|x| \geq 0$.

75. Доказать, что модуль произведения равен произведению модулей, модуль частного равен частному от деления модулей.

76. Доказать, что $|x-a| < b$ в тогда и только тогда, когда $a-b < x < a+b$.

77. Доказать неравенство треугольника $|a+b| \leq |a| + |b|$
Другая форма неравенства треугольника: $|a-b| \leq |a-x| + |x-b|$.
Модуль $a-b$ есть расстояние на числовой прямой между точками с координатами a и b . Неравенство треугольника выражает тот факт, что расстояние между точками не больше, чем сумма расстояний от них до третьей точки.

78. Доказать, что $|a-b| \geq |a| - |b|$.

79. Решить неравенство $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| \geq 3$.

80. Нарисовать график функции $y = |x-1| + |1-x|$.

81. Подобрать a и b так, чтобы множество значений x , удовлетворяющих неравенству $|x-a| < b$ совпадало с отрезком с концами 1 и 2,5.

82. Даны три неравенства: 1) $|x-1| < 1$, 2) $|x-2| < 1$, 3) $|x-\frac{3}{2}| < 1$. Верно ли, что одно из этих неравенств есть следствие двух других?

Неравенства в геометрии.

В этих задачах предполагается, что вы будете пользоваться интуитивными представлениями о площади и длине и формулами, известными вам из геометрии. Но если подходить к делу строго, вы сейчас не имеете основ для решения этих задач, так как определения длины и площади не только не сформулированы, но их и нельзя сформулировать, опираясь только на те свойства действительных чисел, которые описаны в предыдущих листочках. В дальнейшем эти определения формулируются (см. листки 39, 97, 98).

83. Среди треугольников, вписанных в окружность, правильный имеет наибольшую площадь.
84. Какой треугольник из вписанных в данную окружность имеет наибольший периметр?
85. Среди прямоугольных треугольников с данной гипотенузой найти треугольник с наибольшим периметром.
86. Доказать, что в треугольнике сумма квадратов сторон меньше половины квадрата периметра.
87. Доказать, что в треугольнике меньшей медиане соответствует большая сторона.

Индукция в геометрии.

88. Дан выпуклый многогранник. Обозначим через Γ число граней, через P — число рёбер, через B — число вершин. Доказать, что $\Gamma - P + B = 2$.
89. На сколько частей делят плоскость k прямых в общем положении? (см. задачу 90).
90. На сколько частей делят пространство k плоскостей в общем положении? (к плоскостей (прямых) находятся в общем положении, если любые три (две) из них пересекаются в единственной точке, и ни в какой точке не пересекаются четыре (три) из них).
91. Дан треугольник. Система точек, лежащая внутри него, называется правильной, если расширенная система точек, полученная присоединением к нашей системе вершин треугольника, обладает тем свойством, что никакие три точки этой системы не лежат на одной прямой. Треугольник правильно разбит на треугольники, если множество вершин этих треугольников совпадает с расширенной системой точек. Сколько треугольников в правильном разбиении, если дана правильная система из k точек?
92. На сколько частей делят выпуклый многоугольник его диагонали, если никакие три из них не пересекаются в одной внутренней точке многоугольника?

Упражнения на индукцию.

$$93. 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$94. 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$95. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = ?$$

$$96. 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{6^k} = \frac{6}{5} - \frac{1}{6^{k+1}} \cdot \frac{6}{5}$$

$$97. 1+p+p^2+p^3+\dots+p^k = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}.$$

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность вида $x_k = a + vk$ (нумерация начинается с 1).

Геометрической прогрессией называется последовательность вида $x^k = a \cdot v^k$.

98. Доказать, что сумма k первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_k = \frac{x_1 + x_k}{2} \cdot k$.

99. Доказать, что сумма k первых членов геометрической прогрессии выражается формулой $S_k = \frac{x_1 - x_{k+1}}{1-v}$ (при $v \neq 1$).

100. Доказать формулу бинома Ньютона $(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} x^r + \dots + x^k$.

Дополнительные.

101. Доказать, что при натуральном k $(1 + \frac{1}{k+1})^{k+1} > (1 + \frac{1}{k})^k$

102. Последовательность Фибоначчи образуется следующим образом: первые два числа равны единице, а дальше каждое число является суммой двух предыдущих. Доказать, что а) каждое пятое число последовательности Фибоначчи делится на 5; в) для каждого k найдётся член, делящийся на k .

103. Рассмотрим числа

1^k	$2^k - 1^k$	$(3^k - 2^k) - (2^k - 1^k)$	$\dots$
2^k	$3^k - 2^k$	$(4^k - 3^k) - (3^k - 2^k)$	$\dots$
3^k	$4^k - 3^k$	$\dots$	$\dots$
4^k	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n-1)^k$	$n^k - (n-1)^k$	$\dots$	$\dots$
n^k	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Доказать, что все числа $k+1$ -го столбца равны.

Важные задачи.

I04. Доказать, что при действительном $a \geq -1$ и натуральном k $(1+a)^k \geq 1+ka$.

I05. Доказать, что найдётся такое p , что для любого натурального $k \geq p$ $1000 \cdot 2^k < k!$.

I06. Доказать, что н. р л. $k \geq p$ $k^2 < 2^k$.

(н. - сокращение для словосочетания "найётся...такое, что", л. - сокращение для словосочетания "для любого...").

I07. Доказать, что н. р л. $k \geq p$ $k^3 < 2^k$.

I08. Доказать, что н. р л. $k \geq p$ $k^{10} < 2^k$.

I09. Даны числа a , b и c . Доказать, что существует такое k , что $k^3 + ak^2 + b \geq k^2 + c$.

II0. Доказать, что существует такое натуральное k , что $1,0001^k \geq 1000000$.

III. Доказать, что существует такое натуральное k , что $0,999^k < 0,0000001$.

II2. Доказать, что для любого положительного числа ϵ найдётся число N такое, что для любого k , большего N ,

$$\frac{2}{3} - \epsilon < \frac{2k+1}{3k+6} < \frac{2}{3} + \epsilon.$$

Ограниченные множества.

Определение 1. Числовое множество M называется ограниченным сверху, если существует такое число C , что для всякого x из M $x \leq C$.

Определение 2. Числовое множество M называется ограниченным снизу, если существует такое число C , что для всякого x из M $x \geq C$.

Определение 3. Числовое множество M называется ограниченным, если существует такое число C , что для всякого x из M $|x| \leq C$.

Упражнения.

- II3. Сформулировать, что означает, что множество M не ограничено сверху.
- II4. Доказать, что для того, чтобы множество M было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено сверху и снизу.
- II5. Даны числовые множества A и B . Множество C образуем следующим образом: C состоит из всевозможных сумм $a+b$, где a принадлежит множеству A , b принадлежит множеству B . Доказать, что множество C ограничено тогда и только тогда, когда A и B оба ограничены.

Дополнительные.

- II6. Гармоническим рядом называется бесконечная сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$. Доказать, что сумма первых 500 членов гармонического ряда больше 5.
- II7. Обозначим через P_k сумму $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$. Рассмотрим множество M чисел P_k при всевозможных натуральных k . Доказать, что M — неограниченное множество.
- II8. Если возвести в квадрат члены гармонического ряда, то сумма любого их количества не превышает 2.

Дополнительные задачи на неравенства.

I19. Доказать, что $\frac{1.3.5.7. \dots 99}{2.4.6.8. \dots 100} < \frac{1}{12}$.

I20. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} < \frac{3}{4}$$

(к натурально).

I21. В гармоническом ряде выброшены все слагаемые, в написании которых участвует цифра 9. Доказать, что сумма любого количества членов полученного ряда меньше 100.

I22. Имеется неограниченное количество одинаковых кирпичей, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда. Первый кирпич кладётся на горизонтальную плоскость, второй кирпич кладётся на первый, третий на второй и так далее. Кирпичи можно класть друг на друга с некоторым сдвигом, но так, чтобы они не падали. Для каждой такой конечной постройки определим расстояние от середины проекции на плоскость верхнего кирпича до середины проекции нижнего. Будет ли множество всех таких расстояний ограничено?

I23. Решить предыдущую задачу, если кирпичи могут иметь неодинаковый вес. Будем предполагать, однако, что каждый кирпич однороден, то-есть его плотность во всех его точках одинакова (это предполагалось и в предыдущей задаче), и что плотности различных кирпичей заключены в пределах от 1 до 2.

Точные грани множества.

Определение. Пусть M — числовое множество. Число C называется точной верхней гранью множества M (твг M), если выполняются два условия:

1. для всякого x из M $x \leq C$,
2. для всякого $C_1 < C$ найдётся x из M такой, что $x > C_1$.

Аналогично определяется точная нижняя грань (тнг) множества M .

Упражнения.

- I24. Сформулировать, что означает, что число C не является твг множества M (не употребляя отрицаний).
- I25. Если каждое из множеств A и B имеет твг, то объединение этих множеств имеет твг.
- I26. Включаем в множество M всякое такое число x , которое можно представить как сумму двух положительных чисел. Доказать, что 0 является тнг множества M .
- I27. Число 3 является твг множества сумм $a+b$, где $a < 1$, $b < 2$.
- I28. Если каждое из множеств A и B имеет твг, то множество C , состоящее из всевозможных сумм $a+b$, где a — элемент множества A , b — элемент множества B , имеет твг.
- I29. Верно ли то же самое для множества произведений av ?
- I30. Если множества A и B состоят только из положительных чисел и имеют твг, то множество C произведений av , где a — элемент множества A , v — элемент множества B , имеет твг.
- I31. Если каждое из множеств A и B имеет твг и тнг, то множество C произведений av (a из A , v из B) имеет твг и тнг.
- I32. Каждое множество может иметь только одну твг.
- I33. Какой интервал заполняют суммы $a+b$, если $-2 < a < 2,5$, $-3 < b < 1,5$? (a и b могут принимать любые значения в указанных границах).

Аксиома полноты.

Вы видите, что в аксиомах I - 2I содержится уже так много сведений о действительных числах, что из этих аксиом следует большое количество содержательных фактов арифметики. Однако, некоторые привычные факты не получаются. Например, из этих аксиом не следует, что в множестве действительных чисел существует $\sqrt{2}$ (то-есть число, квадрат которого равен 2). Действительно, множество рациональных чисел удовлетворяет всем аксиомам I - 2I, между тем

I34. Среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равен 2.

Из аксиом I - 2I не следует также, что каждый отрезок имеет длину (вопрос о длине разбирается в листке 39).

Далее, в листке 14 в задаче II0 требуется найти такое k , что k -тая степень числа 1,0001 больше 1000000. Напрашивается обобщение, что и для всякого $C > 1$ существует такое k . Действительно, если C рационально, это можно доказать. Но если про C ничего не сказано, то оказывается, что доказать это не удаётся. Это связано с тем, что в наших аксиомах слишком мало сказано о взаимоотношениях рациональных и иррациональных чисел. Например, нельзя доказать, что для всякого действительного x найдётся рациональное y , которое больше x .

Из всего этого видно, что для того, чтобы множество действительных чисел было таким, каким его принято считать, нужны ещё аксиомы. Оказывается, достаточно присоединить ещё одну аксиому (аксиому полноты):

22). Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Эта аксиома не является следствием аксиом I - 2I. Для доказательства этого факта достаточно

I35. Привести пример такого множества рациональных чисел, которое ограничено сверху и не имеет твг среди рациональных чисел.

Упражнения.

I36. Доказать, что нет рационального числа, квадрат которого равен 5.

I37. Всякое ограниченное снизу множество имеет тнг.

I38. Пусть k натуральное. Тогда если $\sqrt{k}$ есть рациональное число, то это число целое.

Следствия аксиомы полноты.

- I39. Доказать, что для всякого действительного C найдётся натуральное N такое, что $N > C$ (аксиома Архимеда).
- I40. Доказать, что для всякого положительного E найдётся натуральное N такое, что $\frac{1}{N} < E$.
- I41. Пусть $C > 1$. Доказать, что найдётся натуральное p такое, что $C^p > 1000$.
- I42. Доказать, что для любого $E > 0$ найдётся N такое, что для любого $k > N$ $\frac{1000 \cdot 2^k}{k!} < E$.
- I43. Дано p , удовлетворяющее неравенству $0 < p < 1$.
Доказать, что для любого $E > 0$ найдётся N такое, что для любого $k > N$ $p^k < E$.
- I44. Последовательность отрезков числовой прямой называется вложенной, если для всякого натурального k отрезок с номером $k+1$ целиком принадлежит отрезку с номером k (в отрезок включаются его концы). Доказать, что для всякой вложенной последовательности отрезков найдётся точка, принадлежащая всем отрезкам (аксиома о вложенных отрезках).

Утверждения задач I39 и I44 названы в скобках аксиомами потому, что это название закрепилось за ними исторически. Это связано с тем, что во многих учебниках по анализу они включены в число аксиом (наряду с аксиомами I - 2I или им эквивалентными), а наша аксиома 22 в этих учебниках является теоремой.

Упражнения (дополнительные).

- I45. Доказать аксиому 22, используя аксиомы I - 2I, аксиому Архимеда и аксиому о вложенных отрезках.
- I46. Построить на прямой систему попарно не пересекающихся отрезков единичной длины так, чтобы во всякой арифметической прогрессии нашёлся член, лежащий на одном из отрезков.

В последней задаче под "прямой" понимается арифметическая прямая, то-есть просто множество всех действительных чисел. Отрезком $[a, b]$ называется множество чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. Длиной непустого отрезка $[a, b]$ называется число $b-a$ (отрезок непуст, если $a \leq b$).

Часть 2. Построение действительных чисел.

Описание действительных чисел, данное в предыдущих листках, достаточно для построения анализа. Но это описание имеет некоторые недостатки. Прежде всего, ниоткуда не следует, что система действительных чисел, описываемая аксиомами I - 22, существует. Можно убедиться в её существовании, если эту систему построить. Но построить её можно, исходя из чего-то более простого. Обычно поступают так. Аксиоматически задают систему натуральных чисел. Затем строят из них целые числа, рациональные и, наконец, действительные. При этом убеждаются, что построенные числа удовлетворяют всем аксиомам I - 22. Тем самым существование действительных чисел основывается на существовании натуральных чисел, которое остаётся недоказанным. Так что таким способом доказывается не абсолютное существование действительных чисел, а так называемое относительное существование (существование в предположении, что существует другой объект). Но так как другого существования доказать нельзя, то и это считается достижением.

Вторым недостатком является сложность нашей системы аксиом, обилие аксиом и основных понятий, про которые в них говорится. Такое обилие в некоторых вопросах, связанных с обоснованием, неудобно. По этим причинам, мы в ближайших дополнительных листках кратко наметим путь построения действительных чисел, исходя из натуральных. Всем, кто не имеет специального интереса к этим вопросам, рекомендуется эти листки пропустить.

Но присутствие этих листков в этой книжке полезно и по той причине, что намеченный в них путь построения действительных чисел излагается по многим учебникам. Эти листки могут помочь тем ученикам, кто пользуется учебниками, уловить связи учебников с этой книжкой. Кроме того, увеличиваются возможности преподавателя, пользующегося книжкой, по-разному строить курс, выбирая соответствующий материал.

Аксиомы Пеано.

Натуральный ряд есть множество, в котором выделен элемент "1", и определена операция "взятие непосредственно следующего", то-есть для каждого натурального числа x определено одно определённое "непосредственно следующее за ним" число x' , не равное x . При этом выполняются аксиомы:

- 1). Нет такого элемента x , что $x'=1$.
- 2). Если $x'=y'$, то $x=y$.
- 3). Если 1 входит в множество M и для всякого x из того, что x входит в M , следует, что x' входит в M , то все натуральные числа входят в M .

Упражнение

1. Докажите, что для каждого числа x , отличного от 1, существует непосредственно предшествующее число y (то-есть такое, что $y'=x$).

Операция сложение для натуральных чисел определяется по индуктивному правилу (индукция по v): 1) $a+1=a'$, 2) $a+v'=(a+v)'$ (сравните с индуктивным определением листка 9). Аналогично определяется умножение натуральных чисел.

Упражнения.

2. Доказать для натуральных a и v аксиомы 1) и 2) листка 1.
3. В каждом непустом подмножестве натурального ряда найдётся элемент, у которого нет непосредственно предшествующего в этом подмножестве.
4. Для любых неравных друг другу натуральных чисел x и y либо найдётся натуральное s такое, что $x = y + s$, либо найдётся натуральное s такое, что $y = x + s$.

На основе последней задачи в натуральном ряде вводится порядок.

Определение. $x < y$, если найдётся натуральное s такое, что $x+s=y$.

Упражнения

- 5, 6, 7, 8. Докажите, что это отношение " $<$ " удовлетворяет аксиомам неравенств 18 - 21 (листок 6), причём мы сейчас считаем, что эти аксиомы сформулированы только для натуральных чисел, в связи с чем в аксиоме 21 не нужно требовать $s \neq 0$.

Целые числа.

Теперь, беря за основу натуральный ряд, можно построить множество целых чисел. Для этого нужно, во-первых, расширить множество чисел, добавив к натуральным символ 0 и натуральные числа со знаком "-" (минус-натуральные). Затем нужно определить в построенном множестве операции сложение, вычитание и умножение так, чтобы получилось то, что нам надо. Эти определения операций не должны противоречить определениям сложения и умножения, уже введенным для натуральных чисел, и знак "-" перед натуральным числом должен обозначать противоположный элемент. Слова "что нам надо" уточняются тем, что мы формулируем систему аксиом, которым должна удовлетворять построенная система вещей. Эта система аксиом (будем называть её "аксиомы Ц") такова:

Аксиомы Ц.

В множестве Ц целых чисел выделены 2 различных элемента 0 и -1 и подмножество Н натуральных чисел, и определены операции сложение, вычитание и умножение так, что при этом выполняются аксиомы

I) - 8) листов I и 2,

IO) - I3) листка 4 и

аксиома ц): если x целое и $x \neq 0$, то x натурально или $-x$ натурально.

Упражнения.

9. Докажите, что аксиома II системы аксиом Ц является следствием остальных аксиом Ц.

IO. Определить сумму, разность и произведение в множестве целых чисел так, чтобы выполнялись аксиомы Ц (при этом должен сохраниться смысл операций "+" и ".", уже введенных для натуральных чисел, и $-k$, где k натурально, должно означать элемент, противоположный k).

II. Если $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

I2. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет не более одного решения (в области целых чисел).

I3. Определите понятие "<" (меньше) в области целых чисел так, чтобы выполнялись аксиомы I8 - 2I для неравенств.

I4. Докажите, что порядок, удовлетворяющий аксиомам I8-2I, можно ввести только одним способом.

В дальнейшем, говоря о целых числах, мы будем иметь в виду систему вещей, для которых выполняются аксиомы Ц (и их следствия, в частности можно считать, что введен порядок, удовлетворяющий аксиомам I8 - 2I).

Дроби.

Следующий шаг в расширении понятия числа - введение рациональных чисел. Мы должны добавить к целым числам новые объекты и определить в полученном множестве P действия "+", "-", ".", ":" так, чтобы смысл ранее введённых действий для целых чисел сохранился, и чтобы полученная система вещей (то-есть множество и введённые в нём операции) удовлетворяла системе аксиом, описывающих рациональные числа (аксиомам P). Вот эти аксиомы:

Аксиомы P . В множестве P рациональных чисел выделены два различных элемента 0 и 1 , подмножество C , и в нём подмножество N , так что при этом выполняются аксиомы I - 17) листов I - 5.

Для определения рациональных чисел сначала вводится понятие дроби.

Определение. Дробью называется упорядоченная пара целых чисел m, n ($n \neq 0$) (упорядоченная - значит мы помним, какой элемент пары стоит на первом месте). (Обозначение дроби - $\frac{m}{n}$).

Определение суммы дробей и произведения дробей.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \text{ опр} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \text{ опр} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

(операции "+" и "." для целых чисел известны).

Определение. Дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{k}$ называются эквивалентными, если $m \cdot k = n \cdot p$ (обозначение: $\frac{m}{n} \sim \frac{p}{k}$).

Упражнения.

15. Соотношение $\sim$ удовлетворяет следующим условиям (аксиомам эквивалентности):

а) $x \sim x$, в) если $x \sim y$, то $y \sim x$, с) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

16. Теорема. Если в множестве M введено соотношение эквивалентности, то-есть соотношение, удовлетворяющее аксиомам эквивалентности, то множество M разбивается на классы такие, что всякие два элемента, принадлежащие одному классу, эквивалентны, а всякие два элемента, принадлежащие разным классам, не эквивалентны (эти классы называются классами эквивалентности).

Рациональные числа.

Соотношение эквивалентности, введенное в предыдущем листке, разбивает множество дробей на классы эквивалентности, по теореме предыдущего листка.

Определение. Эти классы эквивалентности называются рациональными числами.

Определение суммы рациональных чисел. Пусть x и y — рациональные числа. Выбираем дробь $\frac{a}{b}$ из класса x и дробь $\frac{c}{d}$ из класса y . Находим сумму этих дробей по определению предыдущего листка и объявляем суммой $x+y$ рациональное число (класс эквивалентности), в который входит полученная дробь.

Упражнения.

17. Определить аналогично произведение рациональных чисел.
18. Результаты сложения и умножения не зависят от того, какие представители классов эквивалентности выбраны.
19. Определите разность и частное рациональных чисел так, чтобы выполнялись аксиомы 4 и 9.

Сказанного недостаточно, чтобы считать рациональные числа более широким множеством, чем целые числа, потому что пока что это просто разные множества. Рассмотрим такие рациональные числа (классы эквивалентности), в которые входят дроби вида $\frac{p}{1}$. Каждому такому рациональному числу мы сопоставим целое число p . Теперь для операций над целыми числами появилось два определения: старое и новое, когда целое число p рассматривается как рациональное (класс эквивалентности), содержащее дробь $\frac{p}{1}$.

20. Докажите, что два определения операций для целых чисел приводят к соответствующим результатам.
21. Докажите, что аксиомы P выполняются для построенного множества P .

Замечание. В дальнейшем рациональное число (класс эквивалентности), в которое входит дробь $\frac{p}{k}$, мы будем обозначать просто через $\frac{p}{k}$, а рациональное число, сопоставленное целому числу p , — просто через p . Это и есть обычная терминология, при которой не делается различия между рациональным числом и представляющей его дробью и между рациональным числом с целым знаменателем и его числителем.

Задачи о порядке для рациональных чисел.

Определение. Рациональное число x называется положительным, если одна из его записей $\frac{a}{b}$ обладает тем свойством, что a и b оба натуральны. Для рациональных чисел x и y мы говорим, что $x < y$, если $y - x$ положительно.

Задачи.

22. Доказать, что для рациональных чисел с таким порядком выполняются аксиомы I8-2I для неравенств.

23. Между двумя рациональными числами найдётся бесконечно много рациональных чисел.

Определение подобного соответствия. Взаимно-однозначное соответствия двух числовых множеств (определение взаимно-однозначного соответствия см. в листке 8) называется подобным соответствием, если оно сохраняет порядок, то-есть из неравенства $x_1 < y_1$ следует неравенство $x_2 < y_2$ (x_2 и y_2 - элементы множества M_2 , соответствующие элементам x_1 и y_1 множества M_1 ; M_1 и M_2 - два множества, подобное соответствия которых определяется).

24. Пусть M_1 - множество рациональных чисел, больших 0 и меньших 1. Можно ли установить подобное соответствия между множеством M_1 и множеством M_2 рациональных чисел, больших 0 и меньших 2 ?

25. Тот же вопрос, если M_2 есть множество рациональных положительных чисел.

26. (Тонкий вопрос). Тот же вопрос, если M_2 есть объединение интервалов $0 < x < 1$ и $2 < x < 3$.

В качестве строительного материала для дальнейшего расширения системы чисел будут использованы "сечения", определение которых основано на упорядоченности рациональных чисел. Множество действительных чисел, которое будет построено, должно удовлетворять всем аксиомам действительных чисел I - 22 .

Сечения.

Определение. Если A и B — подмножества множества M , причём 1) каждый элемент множества M входит в одно и только одно из них, 2) в каждое из этих подмножеств входит хотя бы по одному элементу, то говорят, что подмножества A и B образуют разбиение множества M .

Определение. Разбиение множества P рациональных чисел (или любого множества, в котором есть порядок) на два подмножества A и B называется сечением множества P , если каждый элемент одного подмножества меньше каждого элемента другого подмножества. Подмножество, содержащее меньшие элементы, называется нижним классом сечения, другое подмножество — верхним классом.

Сечение обозначается так: (X_N/X_B) . Для сечения имеются 4 логических возможности (4 типа):

- 1) в X_N есть наибольший элемент, в X_B нет наименьшего;
- 2) в X_N нет наибольшего элемента, в X_B есть наименьший;
- 3) в X_N нет наибольшего элемента, в X_B нет наименьшего;
- 4) в X_N есть наибольший элемент, в X_B есть наименьший.

Задачи.

27. Привести пример сечения I-го типа, 2-го типа.
28. Доказать, что не существует сечений 4-го типа.
29. Доказать, что если существует подобное соответствие, которое требуется в задаче 26, то оно порождает сечение 3-го типа в множестве M_I .
30. Отнесём к классу X_N все отрицательные рациональные числа и все такие рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а к классу X_B — все такие положительные рациональные числа, квадрат которых больше 2. Доказать, что это — сечение. Доказать, что оно 3-го типа.
31. Пусть (X_N/X_B) — сечение. Тогда для любого положительного числа ε найдутся числа a из X_N и b из X_B такие, что $b-a < \varepsilon$.

Определение действительного числа
как сечения.

Определения: 1) Действительным числом называется сечение множества рациональных чисел.

2) Действительные числа $x=(X_N/X_B)$ и $y=(Y_N/Y_B)$ считаются равными тогда и только тогда, когда

- а) либо $X_N=Y_N$, $X_B=Y_B$ (то-есть когда они совпадают),
- в) либо в X_N есть наибольший элемент a , в Y_B есть наименьший элемент b и $a=b$,
- с) либо в Y_N есть наибольший элемент a , в X_B есть наименьший элемент b и $a=b$.

Определение. Сечение 3-го типа называется иррациональным числом; сечения 1-го и 2-го типов называются рациональными действительными числами (наибольший элемент X_N в случае в и наименьший элемент X_B в случае с называются рациональными числами, соответствующими данному рациональному действительному числу.

Замечание. До задачи 43 включительно мы делаем различие между рациональными числами и рациональными действительными числами.

Определение. Пусть $x=(X_N/X_B)$ и $y=(Y_N/Y_B)$ - действительные числа. Говорят, что x меньше y , если найдётся два рациональных числа $p_1 \neq p_2$, принадлежащих одновременно X_B и Y_N .

Упражнения.

- 32. Пусть $x_1 = x_2$ и $x_1 < y$. Доказать, что $x_2 < y$. Почему для определения неравенства в области действительных чисел нужно это утверждение?
- 33. Доказать, что среди действительных чисел выполняется первая аксиома неравенств.
- 34. Доказать, что выполняется вторая аксиома (транзитивность).
- 35. Доказать, что между любыми двумя действительными числами найдётся бесконечно много рациональных действительных чисел.

Замечание. В этом и следующем листках точнее была бы следующая терминология: сечения называются эквивалентными в случаях а), в) и с) определения 2) настоящего листка. Это соотношение эквивалентности разбивает множество сечений на классы эквивалентности (каждый класс состоит из одного или двух сечений). Эти классы называются действительными числами. Поупражняйтесь в переводе других определений и задач на эту терминологию.

Операции над действительными числами.

Определение. Пусть $x=(X_H/X_B)$ и $y=(Y_H/Y_B)$ - действительные числа. Определим сечение $z=(Z_H/Z_B)$ следующим образом: к классу Z_H отнесём всякое такое рациональное число r , что найдётся a из X_H и b из Y_H такое, что $r=a+b$, а к классу Z_B - все остальные рациональные числа. (Докажите, что это сечение). Сечение z называется суммой x и y и обозначается через $x+y$ (если есть другое действительное число, равное z , то оно тоже называется суммой x и y).

Определение. Пусть $x=(X_H/X_B)$ и $y=(Y_H/Y_B)$. Если X_H состоит из элементов Y_B , взятых со знаком "-", то говорят, что число y противоположно числу x и пишут $y=-x$.

Упражнения.

36. Доказать, что $x+(-x)=0$.
37. Рассмотрим сумму двух действительных чисел. Доказать, что если заменить слагаемые на равные им числа, то сумма не изменится (с точностью до равенства).
38. Определить произведение действительных чисел.
39. Доказать, что квадрат числа, определённого в задаче 30, есть сечение, производимое двойкой.
40. Определить разность и частное действительных чисел.
41. Пусть x и y - рациональные числа, x_I и y_I - соответствующие им рациональные действительные числа. Тогда, если $x < y$, то $x_I < y_I$.
42. Доказать, что сложение рациональных чисел и соответствующих им рациональных действительных чисел приводят к соответствующим результатам.
43. То же для умножения, разности и частного.

Замечание. Теперь мы не будем делать различия между рациональными числами и соответствующими им рациональными действительными числами.

44. Доказать, что в области действительных чисел верна аксиома 20 для неравенств ("к обеим частям неравенства можно прибавить равные числа").
45. Доказать, что верна аксиома 21 (об умножении неравенства на положительное число).
46. Доказать, что для действительных чисел верны аксиомы I - 9.
47. До сих пор рассматривались сечения в области рациональных чисел. Рассмотрим теперь сечения в области действительных чисел. Доказать, что они не бывают третьего типа.
48. Доказать для действительных чисел аксиому 22 о точной верхней грани.

Десятичная запись рационального числа.

Бесконечной десятичной дробью (бдд) называется запись вида $\pm A, a_1 a_2 \dots$, где A — десятичная запись натурального числа или ноль, а $a_1 a_2 \dots$ — бесконечная строчка (последовательность) цифр (цифры — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Если в этой строчке начиная с некоторого места все нули, то бдд называется конечной десятичной дробью (кдд); нули разрешается не писать. (А вы взяли бы написать все цифры какой-нибудь бдд? Разумеется, на практике заменяют написание бесконечной строчки каким-либо её конечным описанием. В теоретических вопросах отделяются загадочным предположением, что дробь вся написана). К A разрешается приписывать конечное число нулей слева, знак "+" перед бдд разрешается опускать.

Конечной десятичной дроби придаётся следующий арифметический смысл: $\pm A, a_1 a_2 \dots a_k = \pm \left(A + \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{10^k} \right)$.

Задачи.

49. Пусть $\frac{a}{b}$ — обыкновенная дробь (несократимая). Для того, чтобы её можно было представить как конечную десятичную дробь, необходимо и достаточно, чтобы в разложении $\dots$ в на простые множители были только двойки и пятёрки.
Указание: воспользоваться задачей 64 листка 9.

Из младших классов вы знакомы с правилом деления целых чисел уголком. Но там не доказывалось, что в результате деления получается частное.

50. Доказать, что если в результате деления a на b по правилам деления уголком получилась конечная десятичная дробь c , то $b \cdot c = a$.

51. Доказать, что если при делении уголком получилась бесконечная десятичная дробь, то она периодическая.

Определение. Пусть r — бдд. Если все десятичные знаки r , начиная с $k+1$ -го заменить нулями, то полученную дробь назовем десятичным приближением r по недостатку с точностью до k -того знака и обозначаем через $r(k)$. Если r — число положительное, то десятичное приближение по избытку с точностью до k -того знака получается прибавлением к $r(k)$ единицы на k -том месте после запятой: $r(k+) = r(k) + \frac{1}{10^k}$. Если r — отрицательное число, то $r(k+)$ получается из $r(k)$ вычитанием единицы в том же разряде.

52. Пусть a и b — положительные целые числа, и r — бдд, получающаяся при делении уголком a на b . Тогда всякое приближение по недостатку дроби r $\leq$ частного $\frac{a}{b}$, а всякое приближение по избытку больше этого частного.

53. Если a и b — положительные целые числа, то $\frac{a}{b}$ есть твг множества чисел $r(k)$ при всевозможных k и в то же время тнг множества всех $r(k+)$ при всевозможных k . Если a и b разных знаков, то результат аналогичный, но твг и тнг меняются местами.

Десятичная запись действительного числа.

Бесконечной десятичной дроби придаётся следующий арифметический смысл. Пусть $r \geq 0$ — бдд. Она считается равной твг множества чисел $r(k)$ при всевозможных k . Если $r < 0$ (то-есть перед ней стоит знак "-"), то она считается равной тнг чисел $r(k)$ при всевозможных k .

Задачи.

54. Доказать, что твг и тнг, о которых идёт речь в определении, всегда существуют. В случае положительного r доказать, что твг множества $r(k)$ равна тнг множества $r(k+)$, а в случае отрицательного r — аналогичный результат с заменой твг на тнг и наоборот.
55. Если дроби a и b до некоторого места совпадают, а начиная с этого места идут цифры $l+1$ и дальше нули, а в b — l и дальше девятки (такие дроби называются близнецами), то дроби a и b имеют одинаковый арифметический смысл.

Опишем правило, как по действительному числу r найти бдд. Для определённости рассмотрим случай $r \geq 0$. Найдём целое n такое, что $r-1 \leq n \leq r$ и напомним: $n, \dots$. Найдём цифру a_1 такую, что $r-0,1 \leq n, a_1 \leq r$, и напомним: $n, a_1, \dots$. Затем, действуя аналогично, припишем второй знак, и т.д. Формулировка индуктивного правила: если

$$r - \frac{1}{10^k} \leq n, a_1 a_2 \dots a_k \leq r,$$

то a_k — k -тый знак нашей дроби.

56. Докажите, что n , о котором идёт речь в предыдущей формулировке, всегда существует и ≥ 0 , если $r \geq 0$.
57. Доказать, что если $r \geq 0$, то хотя бы один знак дроби, которая получается по предыдущей формулировке, $\neq 0$.
58. Доказать, что построенная бдд равна r .
59. Пусть x и y — две бдд, не близнецы. Если перед x стоит знак "+", а перед y — знак "-", то $x > y$. Если обе дроби начинаются с "+", то та из них больше, у которой первый различающийся знак больше, если же обе дроби начинаются с "-", то та дробь больше, у которой первый различающийся знак меньше.
60. Пусть $a \geq b \geq 0$ — две бдд. Тогда существует рациональное положительное число d и натуральное K такие, что при любом натуральном $p \geq K$ $a(p) - b(p) \geq d$.
61. Если $r \geq 0$ и $t \geq 0$ — две бдд, то твг сумм $r(k) + t(k) =$ тнг сумм $r(k+) + t(k+)$. Если $r \geq 0$, $t < 0$, то твг сумм $r(k) + t(k+) =$ тнг сумм $r(k+) + t(k)$.
62. Привести пример непериодической дроби.

Теорема о том, что всякая периодическая дробь есть изображение рационального числа, рассматривается в листке 70, задача 82.

Определение действительного числа через бдд.

В этом листке считается известным множество P рациональных чисел, то-есть система вещей, удовлетворяющая аксиомам I-2I (аксиомам P). Исходя из P , можно построить множество действительных чисел D , используя в качестве строительного материала бесконечные десятичные дроби (а не сечения, как это делалось в листках 25-27).

Сохраняется определение бдд из листка 28. Сохраняется определение дробей-близнецов, данное в задаче 55.

Определение. Считаём дроби эквивалентными, если они близнецы. Кроме того, эквивалентны дроби $+0,000\dots$ и $-0,000\dots$. Классы эквивалентности называются действительными числами. Иными словами, если дробь не имеет близнеца, то она есть действительное число, если же у неё есть близнец, то каждый из двух близнецов является изображением одного действительного числа.

Мы знаем из листка 28 как изображать в виде бдд рациональные, в частности целые числа. Это делает возможным считать множество действительных чисел более широким множеством, чем множество рациональных чисел.

Определяем в множестве действительных чисел порядок по правилу, описываемому в задаче 59. Теперь имеет смысл говорить о точной верхней грани множества, так как в определении твг используется только порядок.

Основная теорема

63. Доказать, что всякое ограниченное сверху множество M действительных чисел имеет твг (в частности доказать, что твг не зависит от того, какие из близнецов, представляющие числа из M , выбраны).

Теперь определим правила, как производить арифметические операции над бесконечными десятичными дробями.

Определение. Пусть r и t - какие-нибудь бдд. Если они обе со знаком "+", то $x+y$ есть твг сумм $r(k)+t(k)$ при всевозможных k . Если r и t обе с "-", то $x+y$ есть тнг всевозможных сумм $r(k)+t(k)$. Если r с "+", t с "-", то $x+y =$ твг сумм $r(k)+t(k+)$. Если r и t обе с "+" или обе с "-", то $x \cdot y =$ твг произведений $r(k) \cdot t(k)$. Если же r и t имеют разные знаки, то $x \cdot y =$ тнг всевозможных произведений $r(k) \cdot t(k)$.

Задачи.

64. Доказать, что все твг и тнг, используемые в этом определении, существуют и не зависят от выбора бдд r и t , представляющих числа x и y .
65. Определите сами вычитание и деление (трудная задача).
66. Убедитесь, что построенные действительные числа удовлетворяют всем аксиомам I-22.

Часть 3. Начала теории множеств.

Понятия теории множеств используются уже в первых листках настоящего сборника для формулирования определений и задач. Но там это лишь речевые обороты, и их использование, я надеюсь, не вызвало трудностей.

В листке 8 сформулировано понятие взаимно-однозначного соответствия. Там через него определяется, что означает, что в двух множествах одинаковое количество элементов, причём к этому моменту мы ещё не умеем считать. Пока это понятие применяется к конечным множествам, мы не получаем ничего интересного, кроме возможности точно высказаться о некоторых старых вещах. Но понятие взаимно-однозначного соответствия можно применять к бесконечным множествам.

Определение. Два множества A и B называются количественно эквивалентными или равномошными, если существует взаимно-однозначное соответствие между ними.

Для двух конечных множеств A и B можно установить их количественную эквивалентность, пересчитав их с помощью натуральных чисел. Для двух бесконечных множеств этот способ не годится, и мы будем пользоваться сформулированным определением.

Равномошность для бесконечных множеств обладает рядом непривычных свойств, например, всякое бесконечное множество равномошно некоторой своей части, и т.п.

Во всех дальнейших разделах этого сборника теоретико-множественные понятия используются на каждом шагу. На них всё основано в той же мере, как и на логике.

Сведения о множествах собраны главным образом в настоящей, 3-ей части. Но практически этот материал стоит разбросать между другими разделами. Первые задачи можно решать в районе 8 - 10 листов, а последние рекомендуется запомнить на конец курса, если они не получаются сейчас.

Подобные перестановки полезны и в других разделах.

Счётность.

Определение. Множество называется счётным, если можно установить взаимно-однозначное соответствие этого множества с множеством всех натуральных чисел.

Задачи.

1. Множество всех целых чисел (положительных и отрицательных) счётно.
2. Множество всех положительных нечётных чисел счётно.
3. Множество всех простых чисел счётно.
4. Множество всех рациональных чисел счётно.
5. Множество всех упорядоченных пар рациональных чисел счётно (упорядоченные пары (x, y) и (y, x) различны при $x \neq y$).
6. Множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц счётно.
7. Множество всевозможных конечных русских слов счётно ("русским словом" в этой задаче называется произвольная последовательность букв русского алфавита).
8. Множество всевозможных конечных последовательностей рациональных чисел счётно.

Дополнительные.

9. Восьмёркой называется множество всех точек, принадлежащих двум касающимся и несовпадающим окружностям. На плоскости нарисовано некоторое множество восьмёрок, попарно не имеющих общих точек. Доказать, что множество этих восьмёрок конечно или счётно.
10. Если на плоскости нарисовано некоторое множество попарно не имеющих общих точек букв "т", то это множество конечно или счётно.

Побасенки про множества.

1. Однажды ко мне пришло счётное множество гостей. Входя, каждый снял галоши и оставил их в прихожей. Когда гости разошлись, то каждый взял какую-нибудь пару галош, надел их и ушёл. А у меня в прихожей осталось ещё бесконечно много галош. Как я организовал уход гостей?

А в другой раз после того, как часть гостей ушла, галош в прихожей не осталось, и остальным пришлось уйти без галош. Но был и такой случай, когда после ухода гостей осталась ровно одна пара.

2. Даны три ящика А, В и С. В ящике А бесконечно много орехов, а ящики В и С пустые. Коля берёт из ящика А 10 орехов и перекладывает их в ящик В, после этого Петя берёт один орех из ящика В и перекладывает его в ящик С. Затем эти операции повторяются бесконечное число раз. Что будет в ящиках в результате бесконечного числа таких операций?

Прежде всего, вопрос поставлен нечестно. Нужно уточнить некоторые детали. Пусть в ящике А орехов счётное множество. Пусть операции занумерованы: 1, 2, ... (в том порядке, как они производятся). Можно сказать, что "орех x находится в ящике С в результате бесконечного числа операций", если найдётся такое натуральное k , что на k -ном шагу Петя переложил орех x в ящик С. Теперь сами уточните, что означает, что в результате бесконечного числа операций орех находится в ящике В и в ящике А. А теперь подумайте над вопросом задачи.

3. Приходилось ли Вам разбирать какую-нибудь сложную вещь? Если приходилось, то Вы, вероятно, заметили странное явление: после того, как вещь починена, почему-то часть деталей остаётся неиспользованной, хотя всё собиралось правильно. Не думаете ли Вы, что в этом есть что-то общее с историей про галоши? И не говорит ли это о том, что если деталей много, то это "много" начинает приобретать некоторые свойства бесконечности?

Эти явления могут найти и практическое использование. Например, когда в магазине весь товар распродан, может оказаться, что всё-таки часть осталась. А бывает и так, что товара не хватило. Не означает ли это, что товара "много"?

Вы, конечно, можете считать, что всё, что здесь сказано, необычайно глупо. Не стану спорить. Но если у Вас "много" друзей, Вы можете жить за их счёт следующим образом: 1. Берёте у товарища рубль займа и тратите его как хотите. 2. Берёте у двух других товарищей по рублю, один рубль возвращаете первому товарищу, другой тратите как хотите. И так далее. В результате Вы непрерывно тратите чужие деньги, но никто не может пожаловаться, что Вы не возвращаете долги. Так что "глупо" — это ещё не значит "плохо". Правда, Вы можете возразить, что число друзей всё же конечно. Но ведь и жизнь Ваша конечна. Впрочем, последнее зависит от точки зрения.

Алгебра множеств.

Определение. Множество A называется подмножеством множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

В частности, всё множество B является подмножеством самого себя. Люди придумали так называемое "пустое множество" – множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество тоже является подмножеством множества B (проверьте).

Определение. Множество C называется объединением множеств A и B (обозначается $A+B$), если C состоит из тех и только тех элементов x , которые обладают следующим свойством: " x входит в A или x входит в B " ("или" не исключает того, что x входит одновременно в A и в B).

Определение. Множество C называется пересечением множеств A и B , если C состоит из тех и только тех элементов x , которые обладают следующим свойством: " x входит в A и x входит в B ". Обозначение: $A \cdot B$.

Определение. Множество C называется разностью множеств A и B (обозначение: $A-B$), если C состоит из тех и только тех элементов x , которые обладают следующим свойством: " x входит в A и не входит в B ".

Определение. Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Упражнения (дополнительные).

И1. Если $A-B=B-A$, то $A=B$.

И2. $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$.

И3. $(A+B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$ (первый закон дистрибутивности).

И4. $(A \cdot B) + C = (A+C) \cdot (B+C)$ (второй закон дистрибутивности).

Пусть P – множество, $A, B, \dots$ – его подмножества. Множество $P-A$ будем называть дополнением множества A (до P) и обозначать через $\bar{A}$.

И5. $\overline{A+B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$, $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$.

Операции с бесконечным числом множеств.

Определение. Пусть M – множество, состоящее из множеств A . Объединением множества M множеств A (обозначение: $+_M A$) называется множество C такое, которое состоит из тех и только тех x , которые входят хотя бы в одно множество A .

И6. Определите сами пересечение бесконечного числа множеств $\cdot_M A$.

И7. $(+_M A) \cdot C = +_M (A \cdot C)$; $(\cdot_M A) + C = \cdot_M (A + C)$.

И8. $\overline{+_M A} = \cdot_M \bar{A}$; $\overline{\cdot_M A} = +_M \bar{A}$.

И9. Сумма счётного множества счётных множеств есть счётное множество.

Мощность континуума.

Множество называется несчётным, если оно бесконечно и не счётно.

20. Теорема. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно.

Доказательство. Допустим противное. Тогда каждая последовательность получает свой номер. Строим теперь последовательность A по следующему правилу: на i -тое место в A ставим 0, если на i -том месте i -той последовательности стоит 1, и 1 - если там стоит 0. A не может совпадать ни с одной из последовательностей, участвующих в нумерации. Противоречие.

21. Вся числовая прямая равномощна интервалу $0 \leq x \leq 1$ (и, конечно, всякому другому интервалу).

22. Отрезок и интервал равномощны.

23. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равномощно множеству действительных чисел отрезка $[0, 1]$.

24. Множество иррациональных чисел равномощно множеству действительных чисел.

25. Множество точек отрезка $[0, 1]$ равномощно множеству точек квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Вспомогательные задачи.

26. Из всякого бесконечного множества можно выделить счётное подмножество.

27. Если A несчётно, а B счётно, то $A \cup B$ равномощно A .

Определение. Говорят, что множество A более мощно, чем множество B , если существует подмножество множества A , равномощное всему множеству B , и при этом не существует взаимно-однозначного соответствия множеств A и B .

Из приведённых утверждений видно, что множество точек отрезка более мощно, чем множество натуральных чисел. Про всякое множество, равномощное отрезку, говорят, что оно имеет мощность континуума.

Замечание. Слова "множества A и B равномощны", " A более мощно, чем B " и т.п. могут привести на преждевременное убеждение, что мощность множества - это что-то вроде числа, которое характеризует его "размеры", и что любые два множества можно утверждать, что они либо равномощны, либо одно из них более мощно, чем другое. В действительности, теория таких "чисел" (так называемых "кардинальных чисел") существует, и в ней доказывается приведённое утверждение о сравнимости по мощности любых двух множеств. Но на первых порах занятия теорией множеств приходится обходиться без этого утверждения, и для нас пока принципиально возможно существование двух множеств, не сравнимых по мощности.

Задачи о мощностях.

28. Теорема Кантора-Бернштейна (трудная). Если множество A равномощно части множества B , а множество B равномощно части множества A , то A и B равномощны.

Если эта задача не получается, примите утверждение на веру и используйте его в дальнейших задачах. Попробуйте также применить эту теорему для решения тех задач предыдущего листка, которые не получились без неё.

29. Множество бесконечных последовательностей целых чисел имеет мощность континуума.

30. (Трудная). Множество бесконечных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

31. (Трудная). Если объединение двух множеств имеет мощность континуума, то хотя бы одно из них имеет мощность континуума.

32. (Трудная). Если объединение счётного множества M множеств A имеет мощность континуума, то хотя бы одно из множеств A имеет мощность континуума.

33. (Трудная). Множество всех подмножеств данного множества более мощно, чем само множество.

Определение Канторовского множества. Рассмотрим последовательность множеств: P_1 - это множество точек отрезка $[0, 1]$. Разделим P_1 на три равные части, и среднюю треть без концов обозначим через I_1 (то-есть I_1 есть интервал $1/3 \leq x \leq 2/3$). P_2 есть разность $P_1 - I_1$. I_2 есть объединение двух интервалов, которые являются средними третями двух отрезков, из которых составлено P_2 . $P_3 = P_2 - I_2$. И т.д. P_k есть объединение 2^{k-1} отрезков, I_k есть объединение интервалов, являющихся средними третями этих отрезков, $P_{(k+1)} = P_k - I_k$. Канторовским множеством называется множество $K = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots$ (пересечение множеств P_k при всевозможных натуральных k).

34. Доказать, что Канторовское множество имеет мощность континуума.

Решение задачи 31.

Пусть множество $M = A + B$ имеет мощность континуума. Установим взаимно-однозначное соответствие M и множества точек квадрата $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Для всякого x отрезка $[0, 1]$ рассмотрим прямую, параллельную оси y и проходящую через эту точку x . Если для каждого x на такой прямой найдётся точка из A , то множество A имеет мощность континуума. Если же на некоторой прямой точек A не найдётся, то пересечение этой прямой с квадратом состоит только из точек множества B , и множество B имеет мощность континуума.

Открытые и замкнутые множества.

В этом листке рассматриваются множества, являющиеся подмножествами некоторого основного множества — прямой или отрезка. Если множества рассматриваются на прямой, то обобщённым интервалом называется любой интервал, то-есть множество чисел, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$ (a и b — произвольные действительные числа), либо полупрямая $x < a$, либо полупрямая $x > a$, либо вся прямая. Если множества рассматриваются на отрезке, то обобщённым интервалом называется любой интервал, целиком принадлежащий этому отрезку, либо полуинтервал, примыкающий к концам этого отрезка (то-есть множества вида $a < x < c$ и $c < x < b$, где a и b — концы отрезка, c — любое число на этом отрезке), либо весь отрезок.

Пусть точка x принадлежит основному множеству. Окрестностью точки x (в этом основном множестве) называется любой обобщённый интервал, содержащий эту точку.

Определение 1. Точка x называется внутренней точкой множества M , если существует окрестность точки x , целиком принадлежащая M .

Определение 2. Множество M называется открытым, если все его точки внутренние.

Упражнения.

35. Пересечение конечного множества открытых множеств есть открытое множество.
36. Объединение любого множества открытых множеств есть открытое множество.
37. Всякое открытое множество есть объединение конечного или счётного числа попарно непересекающихся обобщённых интервалов.

Определение 3. Точка x называется предельной для множества M , если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M , отличную от x .

Определение 4. Точка x называется предельной для множества M , если любая окрестность точки x содержит бесконечно много точек из M .

38. Докажите эквивалентность определений 3 и 4.

Определение 5. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

39. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.
40. Пересечение любого множества замкнутых множеств есть замкнутое множество.
41. Дополнение к открытому множеству есть замкнутое множество, дополнение к замкнутому множеству есть открытое множество.

Ещё об открытых и замкнутых множествах.

42. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств. Отрезок нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств.
43. Если M_k - последовательность замкнутых множеств отрезка такая, что для любого n M_{n+1} содержится в M_n (такая последовательность называется вложенной), то найдётся точка, общая для всех множеств M_n .

Определение. Пусть M - подмножество прямой или отрезка. Точка x множества M называется изолированной точкой M , если существует окрестность точки x , в которой нет точек M , кроме x .

44. Доказать, что множество изолированных точек любого множества M конечно или счётно.

Определение. Замкнутое множество, не имеющее изолированных точек и не пустое, называется совершенным.

45. Всякое совершенное множество имеет мощность континуума.
46. Если совершенное множество не имеет внутренних точек и ограничено, то можно установить подобное соответствие между ним и Канторовским множеством (подобное соответствие - взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок).
47. Доказать, что для всякого положительного a найдётся пара точек x и y Канторовского множества такая, что $y-x=a$.
48. Будет ли верно это утверждение, если при построении Канторовского множества выбрасывать на каждом шагу из отрезков не треть, а какую-нибудь другую часть, например четверть или половину?

Определение. Множество M называется нигде не плотным, если для каждого интервала I числовой оси найдётся принадлежащий ему интервал J такой, что J не содержит точек M .

49. Замкнутое множество является нигде не плотным тогда и только тогда, когда оно не содержит отрезка.
50. Отрезок нельзя представить как объединение счётного множества нигде не плотных множеств.
51. Доказать, что множество рациональных чисел нельзя представить как пересечение счётного множества открытых множеств.
52. Множество различных замкнутых множеств отрезка имеет мощность континуума.
53. (Трудная). Отрезок нельзя представить как объединение счётного множества попарно непересекающихся замкнутых множеств.

Парадоксы.

1. Множество M называется хорошим, если среди его элементов нет множества M , то-есть его самого. Очевидно, всякое множество должно быть либо хорошим, либо не хорошим. Рассмотрим множество X хороших множеств. Допустим, что X хорошее. Тогда, в качестве такового, X входит в число хороших множеств, то-есть входит в X в качестве элемента, а это по определению означает, что X не хорошее. Если же X не хорошее, то в число хороших множеств оно не входит, то-есть не входит в X , а это признак хорошего множества. Итак, если X хорошее множество, то оно не хорошее, а если x не хорошее множество, то оно хорошее. Противоречие.

2. Чтобы задать натуральное число, нужно истратить сколько-то типографских знаков. При этом разрешается употреблять математические знаки и словесные правила. Несомненно, существует число, которое нельзя задать, истратив меньше, чем 100 знаков. Среди таких чисел есть наименьшее. Фраза "наименьшее натуральное число, которое нельзя задать, истратив меньше, чем сто типографских знаков" определяет такое число, но содержит меньше, чем сто типографских знаков.

Попробуйте понять, где заключена двусмысленность в этом рассуждении.

3. Действительное число отрезка $0,1$ называется вычислимым, если существует конечное правило (заданное в математических знаках или словесное), которое позволяет для каждого натурального k определить k -ый знак этого числа в десятичном разложении. Множество конечных русских фраз счётно, а потому и множество вычисляемых чисел счётно. Занумеруем их. Затем выпишем их десятичные записи. По диагональному методу, как в решении задачи 20, строим дробь, не входящую в список. Мы эту дробь задали конечным словесным правилом, и в то же время её нельзя задать конечным словесным правилом. Противоречие.

На основании противоречий, полученных на предыдущей странице, можно доказать такую общую теорему:

Теорема. Верна любая теорема.

Доказательство. Пусть теорема А относится к некоторой теории Т. Допустим, что теорема А не верна. По правилам доказательств от противного, строим отрицание теоремы А и присоединяем его к исходным положениям (аксиомам) теории Т. Теперь, исходя из этих предпосылок и пользуясь законными логическими рассуждениями, нужно получить противоречие. Для получения противоречия достаточно взять рассуждение пункта I предыдущей страницы. Мы получили противоречие, пользуясь только тем, что разрешается. Тот факт, что получилось противоречие, согласно правилам доказательства от противного, считается доказательством теоремы А.

В этом доказательстве есть одна странная деталь. Для получения противоречия нам не пригодилось предположение, что А не верно. Наше противоречие не имеет отношения к А. Но в правилах доказательства от противного не требуется, чтобы такая связь существовала. Даже если бы мы захотели ограничить область применимости доказательств от противного случаями, когда такая связь имеется, мы не смогли бы этого сделать, так как не имеем формального критерия, который позволяет эту связь обнаружить.

Эти примеры показывают, что в рассуждениях, которые мы считаем законными, что-то не так. Строго говоря, на имеющейся логической базе больше делать нечего, так как мы уже доказали все теоремы. Но такая математика не представляет никакой ценности, так как не позволяет отличать верные утверждения от неверных. Видимо, выход в том, чтобы заняться уточнением правил рассуждений, но это увело бы нас в сторону от курса анализа. Мы будем продолжать. При этом, как это принято во всех классических курсах анализа, будем уповать на то, что найденные противоречия лежат где-то в стороне, и теоремы, которые мы будем доказывать, следуют не из противоречий, заложенных в основах рассуждений, а из аксиом арифметики. К "основам рассуждений" я причисляю логику и теорию множеств.

Часть 4. Элементарные функции.

Пусть даны множество M и множество Γ (произвольной природы). Говорят, что на множестве M задана функция ϕ со значениями в Γ , если дано правило, сопоставляющее каждому x из M ровно один y из Γ . Это записывается так: $y = \phi(x)$ (хотя в этой записи не фигурируют символы множества M и Γ , всегда подразумевается, что заданы). То же самое обозначает фраза: задано отображение $y = \phi(x)$ множества M в множество Γ . x называют аргументом функции.

Мы будем иметь дело, в основном, со случаем, когда M , так же как и Γ , — вся числовая ось или какая-то её часть, например, полупрямая, отрезок, интервал и т.п.

Пусть на множестве M задана функция ϕ со значениями в Γ . Рассмотрим множество упорядоченных пар (x, y) , где x принадлежит множеству M , y — множеству Γ (это множество называется теоретико-множественным произведением множеств M и Γ и обозначается через $M \times \Gamma$). В этом множестве рассмотрим подмножество пар вида $(x, \phi(x))$. Это подмножество называется графиком функции $y = \phi(x)$. Если M и Γ — множества чисел, график можно изобразить на координатной плоскости x, y . График — это множество, принадлежащее координатной плоскости и обладающее следующим свойством: каждая прямая, параллельная оси y и проходящая через точку x , принадлежащую множеству M , пересекает график ровно в одной точке. Если наоборот на координатной плоскости дано множество, обладающее сформулированным свойством, то можно определить функцию, графиком которой является это множество.

Мы уже рассматривали последовательности (чисел и множеств), то-есть объекты, занумерованные натуральными числами. Последовательность — это тоже частный случай функции, именно тот случай, когда M — множество натуральных чисел. Для этого случая применяют специальные обозначения: знак аргумента пишут не в скобках после знака функции, а внизу как индекс: a_k вместо $a(k)$.

Мы будем рассматривать также функции двух и большего числа переменных: $z = \phi(x, y)$ и т.п. Для функции двух переменных должно быть задано два множества: M , которому принадлежит x , и N , которому принадлежит y ; число z определяется для каждой упорядоченной пары (x, y) . У такой функции два аргумента. Но можно считать, что у неё один аргумент: упорядоченная пара (x, y) , и что эта функция определена на множестве $M \times N$.

Значение функции $y = \phi(x)$ при $x = x_0$ записывают так: $\phi(x_0)$. $\phi(x_0)$ — это число, поставленное в соответствие числу x_0 функцией $\phi(x)$.

Извлечение корня.

Основные факты:

1. Существует такое действительное число $x \geq 0$, что $x^2 = 2$.
Такое число только одно (оно обозначается через $\sqrt{2}$).
2. Для каждого $y \geq 0$ существует и притом единственное число $x \geq 0$ такое, что $x^2 = y$ (x обозначается через $\sqrt{y}$).
3. Для каждого натурального p и действительного $y \geq 0$ существует и притом единственное число $x \geq 0$ такое, что $x^p = y$.
Для каждого нечётного натурального p и любого действительного y существует и притом единственное число x такое, что $x^p = y$. Это x обозначается через $\sqrt[p]{y}$.

Докажите эти теоремы. При этом Вам могут помочь следующие вспомогательные задачи:

4. Доказать, что найдётся квадрат целого числа, заключённый между числами $1999 \dots 9000 \dots 0$ (девяток 99, нулей 100) и $2000 \dots 0$ (нулей 199).
5. Доказать, что найдётся квадрат целого числа, заключённый между числами $111 \dots 1$ (1972 единицы) и $999 \dots 9$ (1971 девятка).
6. Пусть дано число $a \geq 0$, и пусть оно увеличилось на $d \geq 0$, так что получилось число $a+d$. Равенство $(a+d)^2 - a^2 = 2ad + d^2$ показывает, как меняется квадрат числа, если известно, как меняется само число. Но этим равенством неудобно пользоваться, так как в правой части стоит d не в первой степени. Это дело можно отчасти исправить. Найдите такое v и такое $c \geq 0$, чтобы при всех d , удовлетворяющих неравенству $0 \leq d \leq c$, выполнялось неравенство $(a+d)^2 - a^2 \leq d \cdot v$.
7. Рассмотрим арифметическую прогрессию $a, a+d, a+2d, \dots$ и последовательность квадратов этих чисел $a^2, (a+d)^2, \dots$. Доказать, что разности между соседними членами этой последовательности образуют арифметическую прогрессию.
8. Даны числа $a \geq 0$ и $E \geq a^2$. В последовательности квадратов, построенной в предыдущей задаче, найдутся два соседних члена M и N такие, что $M \leq E$, $N \geq E$. Доказать, что если d маленькое, то и $N-M$ маленькое. Точнее: для всякого $p \geq 0$ найдётся δ такое, что $N-M \leq p$.
9. Пусть $0 \leq a \leq v$. Найдётся p такое, что $a \leq p^2 \leq v$.
10. Рассмотрим множество M чисел x таких, что $x^2 \leq 2$. Доказать, что квадрат т.ч. этого множества 1) не может быть ≤ 2 , 2) не может быть > 2 .
- 11, 12. Задачи, аналогичные 9 и 10, но для корня произвольной натуральной степени из произвольного $y \geq 0$.

Задачи про корень.

13. Изобразить на одном графике в декартовой прямоугольной системе координат следующие функции:

$$y=x, y=x^2, y=x^3, y=x^4, y=x^5, y=x^{100}, y=\sqrt{x}, y=\sqrt[3]{x}, \\ y=\sqrt[4]{x}, y=\sqrt[5]{x}, y=\sqrt[100]{x}.$$

14. Вычислить $\sqrt[100]{0,999\dots 9}$ (100 девяток) с точностью до $\frac{1}{2 \cdot 10^{100}}$.

При работе с корнями часто бывают полезны следующие формулы: $a-b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$; $a-b =$

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2); a+b =$$

$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2 - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2)$. Упражнения на эти преобразования можно встретить во многих задачниках. Вот пример, как с помощью первой из этих формул можно избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a-b}.$$

При вынесении выражения из-под знака корня не забывайте, что корень чётной степени не бывает отрицательным, так что не верна формула: $\sqrt{a^2} = a$. А формула $\sqrt{a^2} = |a|$ верна при любых действительных a .

Дополнительные задачи.

15. Найти тнг разности $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ при всевозможных натуральных k . (В этой задаче сравниваются значения функции

$y = \sqrt{x}$ в двух точках оси, отстоящих друг от друга на 1).

16. Найти тнг разности $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ при всевозможных натуральных k .

17. Доказать, что тнг множества чисел вида $\sqrt[k]{k}$ при всевозможных натуральных $k \geq 1$ равна 1.

18. Доказать, что множество сумм вида $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{k\sqrt{k}}$ при всевозможных натуральных k ограничено.

19. То же самое для множества сумм вида $1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[100]{2}} + \dots + \frac{1}{k \cdot \sqrt[100]{k}}$.

20. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого x тако-
го, что $0 < x < \delta$, выполняется $1 + \frac{x}{k+\varepsilon} < \sqrt[k]{1+x} < 1 + \frac{x}{k}$.
Уточните график $\sqrt[k]{x}$ вблизи значения $x=1$.

Длина отрезка.

Рассматривается Евклидова плоскость. Пусть дан отрезок E — единица длины. Тогда каждому отрезку x ставится в соответствие действительное число $D(x)$ — длина этого отрезка, так что выполняются следующие свойства:

- 1) $D(E) = 1$;
- 2) $D(x) \geq 0$;
- 3) Если отрезки x и y равны (в том смысле, как понимается равенство в геометрии, то-есть их можно совместить движением), то их длины равны ;
- 4) Если точка C прямой AB лежит между точками A и B , то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC .

Можно ли считать эти факты известными, или их нужно доказывать? Ответ зависит от того, что мы понимаем под "геометрией", точнее — от того, какие аксиомы положены в её основу. Одну и ту же геометрию можно строить по-разному. Различным может быть разделение на аксиомы и теоремы, но набор фактов в конечном счёте должен быть одинаковым (это и означает "одну и ту же геометрию").

Если придерживаться аксиоматики Евклида (точнее — современной её интерпретации, см., например, книжку Д. Гильберта "Основания геометрии"), то геометрический мир строится первоначально без чисел. Но на каком-то уровне развития теории возникает возможность определить длину отрезка, так что выполняются выписанные свойства.

При другом способе построения геометрии понятие числа сразу включается в число основных геометрических понятий, и "длина" участвует в аксиомах. Такое изложение принято в книжке А. В. Погорелова "Элементарная геометрия. Планиметрия". Свойства 2 и 4 там сразу записаны в аксиомы, свойство 1 следует из аксиомы: "каково бы ни было положительное число m , на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить отрезок длины m " (по этой аксиоме, существует отрезок длины 1, один из таких отрезков мы и обозначим через E). Свойство же 3) верно потому, что отрезки тогда и называются совместимыми движением, если их длины равны. Так что при этом способе изложения свойства длины 1) — 4) можно считать данными.

Если же следовать Евклиду-Гильберту (и большинству учебников), то эти свойства нужно доказывать. В следующем листке намечается это доказательство. Но в нашей книжке не излагаются начала геометрии и не зафиксированы точно исходные положения. Поэтому в изложении геометрии имеются неизбежные неточности. Если Вы сейчас не хотите отвлекаться на геометрию, можете считать необходимые геометрические факты известными (неважно, откуда) и, пропустив следующие 2 листка, перейти к теме "измерение дуги".

Измерение отрезка.

Определение. Пусть даны два отрезка: E — единица длины — и AB — отрезок, длину которого мы измеряем. Длиной D отрезка AB называется число, которое строится следующим образом: откладываем E от A в сторону B такое количество раз, что конец k -того отрезка (точка AI) ещё принадлежит отрезку AB , а конец $k+1$ -го отрезка уже не принадлежит ему. Затем откладываем от точки AI отрезок, равный $O,1$ отрезка E , в сторону B такое количество раз $K1$, что конец $K1$ -го отрезка принадлежит отрезку AI, B , а конец $K1+1$ -го отрезка не принадлежит ему, затем откладываем в ту же сторону $O,01$ отрезка E и т.д. . D определяем как бдд $k, K1 K2 \dots$.

В этом определении используется ряд геометрических фактов:

- 1). На данной прямой от данной её точки в данную сторону можно отложить данный отрезок.
- 2). Должно быть понятно, что значит "в данную сторону". Это понятие должно обладать рядом подразумеваемых свойств, например: если я шагнул "в некоторую сторону", а из полученной точки ещё раз "в ту же сторону", то и в итоге я шагнул "в эту же сторону", и, вероятно, некоторыми другими.
- 3). Такое k , о котором идёт речь в определении, найдётся. Этот факт в книге Д.Гильберта считается аксиомой (она именно так и формулируется) и называется аксиомой Архимеда.

Эти вещи можете считать известными. Из всего этого следует, что длина отрезка всегда существует. Ещё можете считать известным следующий факт:

- 4). Система вложенных отрезков на прямой имеет хотя бы одну общую точку.

Нельзя считать, что последний факт доказан в листке 19 (задача 144), так как там он формулируется для мира чисел, а здесь для геометрического мира, который (как предполагается в этом листке) строится независимо от мира чисел.

Задачи.

21. (Тонкий факт). Длина отрезка всегда положительна.
22. Если точка C прямой AB лежит между точками A и B , то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC .
23. Каково бы ни было положительное число m , на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить отрезок длины m .
24. Если определена длина, обладающая свойствами 1) — 4) предыдущей страницы, то она совпадает с длиной, определённой на этой странице.

На этой странице приводится конспективное изложение некоторых добавочных геометрических фактов, нужных для решения задач следующего листка и обычно слабо освещаемых в учебниках (в книжке А.В.Погорелова "Элементарная геометрия. Планиметрия" имеется полное изложение вопроса).

Теорема 1. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

Определения. Ломаной называется система отрезков $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, ..., $[A_{k-1}, A_k]$. Ломаная называется замкнутой, если A_k совпадает с A_1 . Ломаная называется несамопересекающейся, если у составляющих её отрезков нет общих точек, кроме вышеперечисленных общих концов. Ломаная называется выпуклой, если для каждого её отрезка вся ломаная лежит по одну сторону от прямой, содержащей этот отрезок. Мы говорим, что точечное множество M разделяет точки A и B , если всякая ломаная, соединяющая A и B , пересекает M . Точечное множество называется ограниченным, если существует круг такой, что всё множество лежит внутри этого круга.

Теорема 2. Замкнутая несамопересекающаяся ломаная L делит плоскость на две части, одна из которых ограничена (эта часть называется внутренней, другая - внешней).

("делит на две части" - это значит: множество всех точек плоскости, кроме точек L , разбивается на два непустых подмножества A и B , так что любые две точки из A можно соединить ломаной, не пересекающей L , и любые две точки из B можно соединить ломаной, не пересекающей L , и всякая ломаная, соединяющая точку из A с точкой из B , пересекает L).

Определение. Ломаная ΓI : $A_1, A_2', A_3', \dots, A_{k-1}', A_k$ называется объемлющей для выпуклой ломаной $A_1, A_2, \dots, A_p, A_k$ (у них общие начальные и конечные точки), если обе ломаные лежат в одной полуплоскости относительно прямой $A_1 A_k$ и не существует точек ломаной ΓI , принадлежащих внутренней области ломаной $A_1, A_2, \dots, A_p, A_k, A_1$.

Теорема 3. Ломаная ΓI , объемлющая выпуклую ломаную Γ , имеет длину, не меньшую, чем Γ . Если Γ и ΓI не совпадают, то длина ΓI больше длины Γ .

Теорема 4. Пусть окружность разбита точками A и B на две дуги; одна из них - дуга AMB . Пусть точки $A_1, A_2, \dots, A_k$ дуги AMB разбивают эту дугу на дуги $\widehat{A, A_1}$, $\widehat{A_1, A_2}, \dots, \widehat{A_{k-1}, B}$ так, что любые две дуги не имеют общих точек, кроме, быть может, концов. Тогда ломаная $A, A_1, \dots, A_k, B$ выпуклая. Наоборот, если вершины выпуклой ломаной лежат на окружности, то они разбивают соответствующую дугу на неналегающие дуги.

Измерение дуги окружности.

Определение. Пусть A и B - точки окружности, AmB - одна из дуг, на которые окружность разбита точками A и B . Длинной дуги AmB называется твг множества длин всех выпуклых ломаных, имеющих концы A и B , и остальные вершины на дуге AmB .

Задачи.

25. Длина дуги существует.

26. Если дуга AmC разбита на дуги AB и BC , то длина AmC равна сумме длин дуг AB и BC .

Рассмотрим лучи OA и OB (O - центр окружности). Объединение лучей OA и OB разбивает плоскость на две части; ту из них, которая содержит дугу AmB , обозначим через M . Рассмотрим множество L ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M точки A и B , и множество K ломаных, соединяющих вне круга, но внутри M лучи OA и OB .

27. Для каждой дуги L из K найдётся дуга из L , которая не длиннее, чем L .

28. Твг множества длин ломаных множества K равна длине дуги AmB .

Очевидно, что длины двух окружностей относятся как радиусы (из подобия всех построений для этих двух окружностей). Поэтому можно утверждать, что длина дуги равна $k \cdot R$, где k одинаково для всех окружностей (R - радиус). Принято писать, что $k=2\pi$, где $\pi=3,1415926536...$ (доказано, что это число иррациональное).

Определение радианной меры угла. Пусть дан угол. Рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в вершине этого угла и дугу этой окружности, на которую угол опирается как центральный. Длина этой дуги принимается за радианную меру угла.

Дополнительная задача (не простая).

29. Соответствие между радианной и градусной мерой угла даётся формулой:

$$L = \pi \cdot \frac{A}{180},$$

где L - радианная мера угла, а A - его градусная мера.

Этим результатом разрешается пользоваться без доказательства.

Отображение $t(x)$ числовой прямой на окружность. Пусть O - окружность радиуса 1 с выделенной точкой A и выделенным положительным направлением обхода ("против часовой стрелки"); для действительного числа x находим такое целое k , что $2\pi k \leq x < 2\pi(k+1)$; дугу длины $x - 2\pi k$ откладываем на окружности от точки A в положительном направлении; её конец есть точка $t(x)$.

Декартовы координаты на плоскости.

На этой странице (как и на двух следующих) излагается в виде краткого конспекта материал, который хорошо представлен во многих учебниках (см., например, Е.С. Кочетков и Е.С. Кочеткова "Алгебра и элементарные функции").

Пусть на плоскости выбраны две взаимно-перпендикулярные прямые (оси координат), на каждой из них выделено положительное направление, и выбрана единица измерения длин (она может быть для каждой оси своя, но нам понадобится только случай, когда она общая). Точка пересечения O осей называется началом координат, одна из осей - осью абсцисс (осью Ox), другая - осью ординат (осью Oy).

Пусть на плоскости дана точка M . Проведём через неё прямые, параллельные осям. Рассмотрим точки пересечения X и Y этих прямых соответственно с осями Ox и Oy . Рассмотрим расстояние от точки O до точки X и возьмём его со знаком "+", если направление от точки O до точки X совпадает с положительным направлением оси Ox , и со знаком "-" - в противном случае. Полученное число называется абсциссой точки M и обозначается через x . Аналогично определяется ордината " y " точки M . Точка M с координатами x и y обозначается через $M(x, y)$.

Вектором на плоскости называется направленный отрезок. Два вектора называются равными, если их можно совместить параллельным переносом. Поместим начало вектора $\vec{a}$ в точку O ; пусть при этом конец имеет координаты x и y . Числа x и y называются проекциями вектора. Пишут: $\vec{a} = \{x, y\}$, отождествляя тем самым вектор с упорядоченной парой его проекций. Вводится ещё вектор O (нулевой); его проекции: $\{0, 0\}$.

Для векторов вводятся операции сложения и вычитания: $\{x, y\} + \{m, n\} = \{x+m, y+n\}$, $\{x, y\} - \{m, n\} = \{x-m, y-n\}$. При этом выполняются аксиомы 1) - 4) (листок I) и их следствия. Это определение суммы и разности векторов есть арифметическая запись обычных действий с векторами по правилу параллелограмма. Определяется также операция умножения вектора на число: $a \cdot \{x, y\} = \{ax, ay\}$. Нам понадобятся следующие два свойства этой операции: 1) $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$ и 2) $(a+b) \cdot \vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$. (В этой записи буквы с черточками наверху - векторы, буквы без черточек - числа).

Вектор, параллельный оси, направленный в положительную сторону оси и имеющий длину 1, называется единичным вектором этой оси. Обозначим через e_1 и e_2 единичные векторы осей x и y . Пусть вектор $\vec{a}$ имеет проекции x и y . Тогда $\vec{a} = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$.

Пусть теперь имеется две декартовых системы координат с одинаковым масштабом и общим началом: xOy и mOn , причём e_1 и e_2 - единичные векторы осей x и y , и d_1 и d_2 - единичные векторы осей m и n . Пусть $d_1 = \{x_1, y_1\}$, $d_2 = \{x_2, y_2\}$ в системе координат xOy . Если теперь некоторый вектор $\vec{v}$ имеет координаты m и n в системе mOn , то его координаты в системе xOy вычисляются (пользуясь свойствами 1) и 2) умножения вектора на число) по правилу: $\vec{v} = m \cdot d_1 + n \cdot d_2 = m \cdot (x_1 \cdot e_1 + y_1 \cdot e_2) + n \cdot (x_2 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2) = (m \cdot x_1 + n \cdot x_2) \cdot e_1 + (m \cdot y_1 + n \cdot y_2) \cdot e_2$.

Тригонометрические функции.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат xOy с одинаковым масштабом по осям и единичную окружность с центром в точке O . Выделим на окружности в качестве начала отсчёта углов точку пересечения с осью Ox и выберем положительное направление обхода окружности — от этой точки к точке пересечения её с положительным направлением оси y ("против часовой стрелки"). Такую окружность принято называть тригонометрическим кругом.

Определение. Пусть a — действительное число. Рассмотрим точку $t(a)$ (см. листок 40). Пусть x и y — координаты точки $t(a)$. Полагают: $\text{Син } a = y$, $\text{Кос } a = x$. Ещё полагают в случае $x \neq 0$ $\text{Tг } a = \frac{y}{x}$, и в случае $y \neq 0$ $\text{Ктг } a = \frac{x}{y}$. Эти 4 функции от a называются тригонометрическими функциями.

Определение. Говорят, что функция $\phi(x)$ является периодической с периодом T , если для всякого x из области её определения числа $x-T$ и $x+T$ тоже входят в область определения, и для всякого x из области определения $\phi(x) = \phi(x+T)$.

Задачи.

30. Все тригонометрические функции периодические с периодом 2π . Функции $\text{Tг } x$ и $\text{Ктг } x$ периодические с периодом π .
31. Нарисовать на одном чертеже графики всех тригонометрических функций.
32. $\text{Син}^2 x + \text{Кос}^2 x = 1$ (по традиции пишут $\text{Син}^2 x$ вместо $(\text{Син } x)^2$).
33. $\text{Син } x = \text{Кос}(\frac{\pi}{2} - x)$; $\text{Tг } x = \text{Ктг}(\frac{\pi}{2} - x)$; $\text{Кос } x = \text{Син}(\frac{\pi}{2} + x)$; $\text{Син } x = -\text{Син}(-x)$; $\text{Кос } x = \text{Кос}(-x)$; $\text{Tг } x = -\text{Tг}(-x)$; $\text{Ктг } x = -\text{Ктг}(-x)$. Какие свойства графиков выражены этими формулами?

Аргумент тригонометрической функции можно задавать в градусах и в радианах. Формула перевода — в задаче 29.

34. Найти тригонометрические функции от $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
35. Расположить в порядке возрастания величины $\text{Син}(-55^\circ)$, $\text{Син } 600^\circ$, $\text{Син } 1295^\circ$, $\text{Кос } 654^\circ$, $\text{Кос}(-67^\circ)$, $\text{Кос } 295^\circ$.
36. Все величины предыдущей задачи выразить через тригонометрические функции углов, заключённых между 0 и 90° .
37. Решить неравенства: $\text{Tг } x > 1$. $\text{Син } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 $\text{Син}^2 x < \text{Кос } x$.

Синус суммы двух углов.

Теорема:

38. $\text{Син}(a+b) = \text{Син } a \cdot \text{Кос } b + \text{Кос } a \cdot \text{Син } b$.

Указание. В системе координат xOy на тригонометрическом круге найдём точку $M = t(a+b)$. Возьмём систему координат mOn с тем же началом O , тем же масштабом, тем же направлением положительного обхода тригонометрического круга этой системы и с осью Om , проходящей через точки O и $t(a)$ ($t(a)$ взято на круге системы xOy). Точка $t(b)$, взятая на круге системы mOn совпадёт с M . Координаты единичного вектора оси m (в системе xOy) — $\text{Кос } a$ и $\text{Син } a$, координаты единичного вектора оси n в системе xOy — $-\text{Син } a$ и $\text{Кос } a$. Координаты точки M в системе mOn — $\text{Кос } b$ и $\text{Син } b$. Теперь примените рассуждение конца страницы 54.

39. $\text{Кос}(a+b) = \text{Кос } a \cdot \text{Кос } b - \text{Син } a \cdot \text{Син } b$.

40. $\text{Тг}(a+b) = \frac{\text{Тг } a + \text{Тг } b}{1 - \text{Тг } a \cdot \text{Тг } b}$.

41. $\text{Син } 2a = 2\text{Кос } a \cdot \text{Син } a$; $\text{Кос } 2a = \text{Кос}^2 a - \text{Син}^2 a = 1 - 2\text{Син}^2 a$; $\text{Тг } 2a = \frac{2\text{Тг } a}{1 - \text{Тг}^2 a}$.

42. Докажите, что графики функций $\text{Син } x$ и $\text{Син}^2 x$ представляют собой подобные геометрические фигуры.

43. Доказать, что если $0 < a < 90^\circ$, то $\text{Син } 2a < 2 \text{Син } a$.

44. В каких пределах может изменяться выражение $\text{Син } x \cdot \text{Кос } x$?

45. $\text{Син } a = \frac{2 \text{Тг } \frac{a}{2}}{1 + \text{Тг}^2 \frac{a}{2}}$; $\text{Кос } a = \frac{1 - \text{Тг}^2 \frac{a}{2}}{1 + \text{Тг}^2 \frac{a}{2}}$; (если $\text{Тг } \frac{a}{2}$

определено).

46. $2 \text{Кос } a \cdot \text{Кос } b = \text{Кос}(a+b) + \text{Кос}(a-b)$.

$\text{Кос } x + \text{Кос } y = 2 \text{Кос } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Кос } \frac{x-y}{2}$.

47. $2 \text{Син } a \cdot \text{Син } b = \text{Кос}(a-b) - \text{Кос}(a+b)$.

$\text{Кос } x - \text{Кос } y = -2 \text{Син } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Син } \frac{x-y}{2}$.

48. $2 \text{Син } a \cdot \text{Кос } b = \text{Син}(a+b) + \text{Син}(a-b)$.

$\text{Син } x + \text{Син } y = 2 \text{Син } \frac{x+y}{2} \cdot \text{Кос } \frac{x-y}{2}$.

Задачи по тригонометрии.

49. Если $x > 0$, то $\sin x < x$.

50. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $x < \tan x$.

51. Рассмотрим функцию $\phi(x) = \frac{\sin x}{x}$ при $x > 0$.
Доказать, что твг множества значений этой функции равна 1.

52. Рассмотрим функцию $\gamma(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ при $x > 0$.

Найти твг множества её значений.

53. Пусть a и b - постоянные числа. Рассмотрим функцию аргумента x : $\phi(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$. Найти твг множества всех её значений (при всех x).

Указание: воспользоваться вспомогательной задачей:

54. Если хотя бы одно из чисел a и b отлично от 0, то найдётся такое число t , что $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

$$\sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

55. Нарисовать график функции $y = \sin \frac{1}{x}$, определённой при всех x , кроме $x = 0$.

56. Является ли ограниченным множество значений, принимаемых функцией $y = k \cdot \sin k$ при всевозможных натуральных k ?

Колебание функции на интервале.

Определение. Пусть функция определена на каком-либо множестве Γ . Рассмотрим множество M всевозможных разностей $\phi(x_1) - \phi(x_2)$, где x_1 и x_2 - числа из множества Γ . Твг множества M называется колебанием функции $\phi(x)$ на множестве Γ и обозначается через $U(\phi(x), \Gamma)$. Если множество M сверху не ограничено, то говорят, что колебание равно бесконечности.

В большинстве предлагаемых задач Γ есть интервал.

Задачи.

57. $U(\phi(x), (a, b)) = 0$ и равно нулю тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ постоянна на (a, b) .
((a, b) - интервал $a < x < b$).

58. $U(\phi(x), (a, b)) = \text{твг } \phi(x) - \text{тнг } \phi(x) \text{ на } (a, b)$.

59. Если интервал (a', b') целиком принадлежит интервалу (a, b) , то $U(\phi(x), (a', b')) \leq U(\phi(x), (a, b))$.

60. $U(\phi(x), (a, b)) + U(\gamma(x), (a, b)) = U(\phi(x) + \gamma(x), (a, b))$.

61. С помощью неравенства предыдущей задачи можно оценить колебание суммы двух функций, если известны колебания слагаемых. Нам нужно получить что-то аналогичное для произведения. Пусть известно, что на (a, b) функция $\phi(x)$, взятая по модулю, не превышает числа A , а функция $\gamma(x)$ - числа B . Тогда $U(\phi(x) \cdot \gamma(x), (a, b)) \leq U(\phi(x), (a, b)) \cdot B + U(\gamma(x), (a, b)) \cdot A$.

62. Пусть на интервале (a, b) модуль $\phi(x)$ всюду больше положительного числа C . Тогда:

$$U\left(\frac{1}{\phi(x)}, (a, b)\right) \leq \frac{U(\phi(x), (a, b))}{C^2} .$$

Примерная контрольная работа.

63. Пусть $\phi(x)$ определена всюду, (a, b) – интервал, $[a, b]$ – отрезок с теми же концами. Доказать, что $U(\phi(x), (a, b)) \subsetneq U(\phi(x), [a, b])$.
64. Привести пример функции $\phi(x)$ и отрезка $[a, b]$ таких, чтобы в предыдущей задаче было строгое неравенство.
65. Пусть функция $\phi(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что для каждого интервала A найдётся отрезок B такой, что $U(\phi(x), A) \supsetneq U(\phi(x), B)$.
66. Пусть $\phi(x)$ определена на (a, b) , k – положительное число. Доказать, что $U(k \cdot \phi(x), (a, b)) = k \cdot U(\phi(x), (a, b))$.
67. Пусть $\phi(x)$ определена на всей числовой прямой, p – действительное число. Определим функцию $\gamma(x)$ правилом: $\gamma(x) = \phi(x+p)$.
Дано: $U(\phi(x), (a, b)) = C$. Указать такой интервал (m, n) , чтобы было: $U(\gamma(x), (m, n)) = C$.
68. Задача, аналогичная предыдущей, но $\gamma(x)$ определяется правилом: $\gamma(x) = \phi(p \cdot x)$.
69. Пусть M_1 и M_2 – два ограниченных числовых множества, причём известно, что для каждого x из M_1 найдётся y из M_2 такой, что $y \leq x$. Можно ли утверждать, что
1) $\text{тиг } M_2 \subsetneq \text{тиг } M_1$, 2) $\text{тиг } M_2 \subset \text{тиг } M_1$?
Как изменится ответ, если дано, что для каждого x из M_1 найдётся y из M_2 такой, что $y < x$?

Вычисление колебаний.

В задачах, где требуется вычислить колебание, нужно ещё нарисовать график функции в указанном интервале.

70. Вычислить $Y(\text{Кос}(x^2+2x), (0, 3))$.

71. $Y(\text{Кос}(\text{Син } x), (-5, 5))$.

72. $Y(\text{Син}^5 x, (1, \pi))$.

73. $Y(x + \frac{x}{\sqrt{x}}, (-3, 3))$.

Замечание. В последней задаче функция не определена в точке $x=0$, но это не мешает вычислить её колебание: просто при вычислении нужно выбросить из рассмотрения эту точку и считать, что функция рассматривается на множестве, которое получается выбрасыванием из интервала этой точки. В некоторых дальнейших задачах мы будем понимать колебание на интервале в таком расширенном смысле.

74. $Y(\frac{1}{\text{Син}^2 x + 3}, (10, 20))$.

75. $Y(\text{Син } \frac{1}{x}, (\frac{1}{\pi}, +\text{беск}))$ (интервал $(a, +\text{беск})$ - это множество x таких, что $a < x$; аналогично понимается символ $-\text{беск}$ в качестве левого конца интервала).

76. $Y(x \cdot \text{ЦЧ}(\frac{1}{x}), (0, 5))$ ($\text{ЦЧ}(x)$ - целая часть x - наибольшее целое число, которое не больше x ; $\text{ДЧ}(x)$ - дробная часть x - определяется как $x - \text{ЦЧ}(x)$).

77. $Y(\text{Кос}(x - \frac{1}{x}), (0, 10))$.

78. $Y(\frac{1}{2 + \text{Син } x + \text{Кос } x}, (0, 10))$.

79. $Y(\text{Син } \frac{1}{x}, (\frac{1}{2}, +\text{беск}))$.

80. $Y(x^2 \cdot \text{Син } \frac{1}{x}, (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

81. Функция $M(x)$ определяется при всех $x \geq 0$ по формуле: $M(x) = Y(\phi(y), (0, x))$. Найти $Y(M(x), (1, 5))$ (выразить через величины, определяемые через функцию $\phi(x)$).

Колебание функции в точке.

Определение. Пусть дана функция $\phi(x)$ и точка a числовой оси. Для каждой окрестности Δ точки a (окрестностью точки a называется всякий интервал, содержащий эту точку) рассмотрим число $U(\phi(x), \Delta)$. Рассмотрим множество всевозможных таких чисел при различных Δ . Тнг этого множества называется колебанием функции $\phi(x)$ в точке a и обозначается через $U(\phi(x), a)$.

Уточнения. Если $\phi(x)$ определена при всех x , и для каждой окрестности Δ точки a $U(\phi(x), \Delta)$ существует (является числом), то всё, что написано в определении, имеет смысл. Но можно требовать меньше и расширить область применимости определения.

1). Пусть функция определена на таком множестве M , что любая окрестность Δ точки a содержит хотя бы одну точку M . (В этом случае точка a называется точкой прикосновения множества M). Этого достаточно, чтобы для каждой окрестности Δ говорить о колебании функции на этой окрестности.

2). Если для каждой окрестности Δ точки a $U(\phi(x), \Delta)$ не является числом, а является бесконечностью, то будем считать, что колебание $\phi(x)$ в точке a есть бесконечность. Если же хотя бы для одной окрестности колебание на ней является числом (конечным), то и колебание в точке тоже будет числом.

Задачи.

82. Изменится ли смысл определения, если брать 1) тнг по множеству симметричных относительно a интервалов? 2) если заменить интервалы отрезками? 3) симметричными отрезками?

83. Если $U(\phi(x), a)$ конечно, то найдётся окрестность точки a , в которой функция ограничена.

Определение. Если точка a входит в область определения функции $\phi(x)$ и $U(\phi(x), a) = 0$, то функция $\phi(x)$ называется непрерывной в точке a .

84. (Теорема об инерции знака). Если $\phi(x)$ непрерывна в точке a и $\phi(a) \neq 0$, то существует окрестность точки a такая, что всюду в этой окрестности $\phi(x)$ отлична от 0 и имеет тот же знак, что и в точке a .

Колебание в точке (упражнения).

Нарисовать графики и вычислить колебание в указанной точке.

85. $Y(\text{ДЧ}(x), 4)$ (определение функции $\text{ДЧ}(x)$ – дробная часть от x – см. в задаче 76).

86. $Y(2x, \text{ЦЧ}(3-x), 1)$.

87. $Y(\text{Кос}(\text{Кос } \frac{1}{x}), 0)$.

88. $Y(x^2, \text{ЦЧ}(x), 0)$.

89. $Y((x^2+1) \cdot \text{ЦЧ}(x), 2)$.

90. $Y(x \cdot \text{Син}(1 + \text{Ктг}^2 x), 0)$.

91. $Y(\frac{1}{1 + \text{Кос}^2 \frac{1}{x}}, 0)$.

92. $Y(\text{Син } \frac{1}{x}, 0)$.

93. $Y(\text{ДЧ}(x) + \text{Син } \frac{1}{x}, 0)$.

94. $Y(x^2 \cdot \text{Син}(\text{Ктг } x), 0)$.

95. $Y(x \cdot \text{Син } \frac{1}{x}, 0)$.

96. $Y(x^2 \cdot \text{Кос } \frac{2}{x}, 0)$.

97. $Y(x^2 \cdot \text{ЦЧ}(x), 2)$.

98. $Y((1+x^2) \cdot \text{Кос}(\text{Ктг } x), 0)$.

Доказать.

99. $Y(\phi(x), a) \leq Y(\phi(x), a)$.

100. Утверждение: " $Y(\phi(x), 0) = \text{беск}$ " эквивалентно утверждению: " $Y((\phi(x))^2, 0) = \text{беск}$ ".

101. Дано: $Y(\phi(x), 0) \neq 10$. Доказать, что $Y((\phi(x))^3, 0) \neq 125$.

102. Дано: $g(x) = \phi(\frac{1}{x})$, $Y(\phi(x), \frac{1}{2}) = 2$. Найти $Y(g(x), 2)$.

103. Дано: $Y(\phi(x), 3) = 1$, $g(x) = \phi(x^2)$. Найти $Y(g(x), 9)$.

104. Дано: $g(x) = \phi(2x-1)$, $Y(g(x), 1) = 2$. Найти $Y(2\phi(x) - 1, 1)$.

Определение a^p при $a \geq 0$ и рациональном $p \geq 0$.

Считается известным (см. листок 37), что для любого $a \geq 0$ и натурального p существует и притом только одно такое число $x \geq 0$, что $x^p = a$. Такое число обозначается через $\sqrt[p]{a}$ или $a^{\frac{1}{p}}$.

105. Доказать, что $(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$.

106. Доказать, что $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$.

107. Доказать, что $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$.

108. Доказать, что $(a^{\frac{1}{km}})^{\frac{1}{kn}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$.

Определение. $a^p = \sqrt[p]{a^{\frac{1}{p}}}$, где $p = \frac{m}{n}$ ($p \geq 0$).

Казалось бы, мы могли сформулировать это определение до задач 105 - 108. Но тогда это определение было бы некорректным, так как не исключалась бы зависимость результата от того, как число p представлено в виде дроби. Задача 108 исключает такую возможность.

109. $(a^{p_1})^{p_2} = (a^{p_2})^{p_1} = a^{p_1 p_2}$.

110. $a^{p_1 + p_2} = a^{p_1} \cdot a^{p_2}$.

111. Пусть $a \geq 1$ и $p_1 < p_2$. Тогда $a^{p_1} < a^{p_2}$.

Задачи, важные для дальнейшего.

112. Найти тнг множества чисел вида $2^{\frac{1}{n}}$, где n натурально.

113. Рассмотрим арифметическую прогрессию $p, p+d, p+2d, \dots$ (p и d рациональные и положительные). Тогда числа $a^p, a^{p+d}, a^{p+2d}, \dots$ образуют геометрическую прогрессию, причём эта прогрессия возрастает и расстояния между её соседними членами тоже возрастают.

114. Разобьём отрезок $[2, 3]$ на k равных частей, то-есть построим арифметическую прогрессию $2, 2+d, 2+2d, \dots$, которая начинается с 2 и кончается 3. Соответствующая геометрическая прогрессия $2^2, 2^{2+d}, 2^{2+2d}, \dots$ начинается с 4 и кончается 8. Доказать, что k можно подобрать так, что расстояние между любыми соседями этой прогрессии будет $< 0,0001$. Указать одно из таких k .

115. Доказать, что для любых трёх чисел a, b и c , таких что $1 < b < c$ и $a \geq 1$, найдётся рациональное $p \geq 0$ такое, что $b < a^p < c$.

Определение a^x при $a \geq 1$ и x действительном ≥ 0 .

Определение. a^x есть твг множества всех чисел a^p , где p - рациональные числа, большие 0 и меньшие x .
(Докажите, что твг всегда существует).

Задачи.

II6. Доказать, что a^x - монотонно возрастающая функция от x (при $a \geq 1$, $x \geq 0$).

Для рациональных x мы сейчас имеем два определения a^x : то, которое приводится на предыдущем листке, и приведённое выше на этом листке.

II7. Доказать, что новое определение для случая рационального x даёт тот же результат, что и старое определение, то-есть что a^p равно твг множества a^k при всевозможных положительных k , меньших p .

II8. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (при $a \geq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$).

II9. $(a^x)^y = a^{xy}$ (в тех же предположениях).

II0. Нарисовать графики 2^x и 10^x при $x \geq 0$.

Распространение функции a^x на любое $a > 0$ и любое x .

Пусть $a > 1$. Положим $a^0 = 1$. При $x < 0$ положим $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.

Тем самым функция a^x при $a > 1$ определена при всех x .

Положим $1^x = 1$ при всех x .

Пусть $0 < a < 1$. Положим $a^x = \frac{1}{(\frac{1}{a})^x}$ при любом x .

Тем самым функция a^x определена при любом $a > 0$ и любом x .

Функция a^x называется показательной функцией или экспонентой.

Задачи.

I21. Доказать, что при $0 < a < 1$ при любом x $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

I22. Доказать, что при любом a функция a^x монотонна при всех x .

(Функция $\phi(x)$ называется монотонно возрастающей, если для любых x и y из области определения из неравенства $x < y$ следует неравенство $\phi(x) < \phi(y)$. Функция $\phi(x)$ называется монотонно неубывающей, если из неравенства $x < y$ следует неравенство $\phi(x) \leq \phi(y)$. Монотонно убывающая и монотонно невозрастающая функции определяются аналогично. Функция называется монотонной, если она одного из четырёх описанных видов).

I23. Доказать, что всегда $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

I24. Доказать, что всегда $(a^x)^y = a^{xy}$.

I25. Доказать, что $(av)^x = a^x \cdot v^x$ при любых $a > 0$, $v > 0$ и любом x .

I26. Пусть $0 < a < b$, $x > 0$. Доказать, что а) $a^x < b^x$, в) $a^x > b^x$.

I27. Доказать, что для любого $y > 0$ найдётся и притом только одно x такое, что $a^x = y$.

I28. Нарисовать графики функции a^x при $a = 0,1$; $0,5$; 2 ; 10 .

Дополнительная.

I29. Если функция $\phi(x)$ определена на всей числовой прямой и монотонна, и для любых x и y выполняется равенство $\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, то $\phi(x)$ есть показательная функция a^x , где $a = \phi(1)$.

Определения.

Пусть $y=\varphi(x)$ - функция, заданная на множестве M со значениями в множестве Γ .

1. Пусть N - какое-либо подмножество множества M (в частности, может быть, всё M). Через $\varphi(N)$ обозначается подмножество множества Γ , определяемое правилом: y входит в $\varphi(N)$, если существует x из множества M такой, что $\varphi(x)=y$. Множество $\varphi(N)$ называется образом множества N при отображении φ . Множество $\varphi(M)$ называется областью значений функции φ .

2. Для каждого y из множества Γ через $\varphi^{-1}(y)$ обозначается множество всех таких x из множества M , что $\varphi(x)=y$. Это множество называется полным прообразом элемента y при отображении φ . Если N - произвольное множество, то через $\varphi^{-1}(N)$ обозначается множество таких x из M , что $\varphi(x)$ входит в N . $\varphi^{-1}(N)$ называется полным прообразом множества N при отображении φ .

3. Функция $x=g(y)$, определённая на множестве $\varphi(M)$ и такая, что каждому y из множества $\varphi(M)$ поставлен в соответствии один определённый (для этого y) элемент x из множества M , такой что $\varphi(x)=y$, называется обратной к функции $y=\varphi(x)$. Если функция $\varphi(x)$ такова, что полный прообраз каждого элемента y множества $\varphi(M)$ состоит ровно из одного элемента, то обратную функцию можно обозначать через $x=\varphi^{-1}(y)$.

4. Функция $y=\varphi(x)$ называется взаимно-однозначным соответствием множеств M и Γ , если полный прообраз каждого y из множества Γ (непуст и) состоит ровно из одного элемента.

Обратная функция.

- I30. M - вся числовая прямая, Γ - отрезок $[-1, +1]$.
 $y = \phi(x) = \sin x$. Найти $\phi^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\phi^{-1}(-1)$, $\phi^{-1}(A)$, где
 A - интервал $-0,5 < x < 0,5$.
- I31. Пусть γ - функция, обратная к ϕ . Доказать, что для любого x из множества $\phi(M)$ $\phi(\gamma(x)) = x$.
- I32. Верна ли теорема: если γ - функция, обратная к ϕ , то для любого x из множества M $\gamma(\phi(x)) = x$?
- I33. Рассмотрим функцию $y = \phi(x) = x^2$ на всей числовой прямой. Найдите такое числовое множество $\mathbb{N}$, чтобы выполнялись два условия: 1) $\phi(\mathbb{N})$ есть полупрямая $y \geq 0$, 2) если рассматривать функцию $\phi(x)$ только на этом множестве, то обратная функция $x = \gamma(y)$ определяется однозначно. Приведите пример трёх таких множеств $\mathbb{N}$.
- I34. Если обратная функция определяется однозначно, то для всех x из множества M $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$.
- I35. Пусть $y = \phi(x)$ - взаимно-однозначное соответствие числовых множеств M и Γ (x из множества M , y - из множества Γ). Доказать, что график функции $y = \phi^{-1}(x)$ получается из графика функции $y = \phi(x)$ симметричным отражением относительно биссектрисы I-го координатного угла в Декартовой системе координат xOy .
- I36. Построить графики функций, указывая области определения и области значений:
 1) степенные функции $y = x^a$ при $a = 1, 2, 3, 4, 100, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{100}, 0$ и при всех этих же значениях со знаком "-",
 2) показательные функции a^x при $a = 2, 3, 10, 0,5, 0,1$.
 Укажите, какие из этих функций взаимно-обратны.

Контрольные задачи.

- I37. Нарисовать графики $y = 2^{-/x/}$, $y = (\frac{1}{2})^{-/x/}$.
- I38. Решить неравенство $x^y > 1$.
(Область определения функции двух переменных $\phi(x, y) = x^y$ есть полуплоскость $x > 0$, y любое).
- I39. Если $\phi(x)$ определена на некотором подмножестве M числовой оси и строго монотонна (то-есть монотонно возрастающая или монотонно убывающая), то обратная функция определяется единственным образом и строго монотонна.
- I40. При каких a функция $y = x + ax^2$, рассматриваемая на всей числовой прямой, имеет единственную обратную?
- I41. При каких a функция $y = 2^x + ax$ монотонна на всей числовой прямой?
- I42. При каких a функция $y = x^3 + ax^2$ монотонна на всей числовой прямой?
- I43. $\phi(x) = x^2 + kx$. Каким должно быть k , чтобы полный прообраз интервала $(-1, 1)$ был интервалом? Дать описание всех таких k .
- I44. Доказать, что функция $y = a^x$ есть слабо выпуклая функция на всей числовой прямой (функция называется слабо выпуклой, если её значение в средней точке отрезка всегда меньше среднего арифметического её значений на концах этого отрезка, это определение приведено в листке IO).

Логарифмы.

Определение. Функция, обратная к функции $y=a^x$ ($a>0$ и $a\neq 1$), обозначается $\text{Лог}_a y$ (читается: логарифм y по основанию a).

Из задач предыдущих листков следует, что область определения этой функции является полупрямая $y>0$, причём функция определена однозначно.

I45. Построить графики: $y=\text{Лог}_{0,1} x$, $y=\text{Лог}_{0,5} x$,
 $y=\text{Лог}_2 x$, $y=\text{Лог}_{10} x$.

I46. (В этой и следующих четырёх задачах x , y , a , b - положительные, причём a и $b \neq 1$).

Доказать, что $\text{Лог}_a (x \cdot y) = \text{Лог}_a x + \text{Лог}_a y$.

I47. Доказать, что $\text{Лог}_a \frac{x}{y} = \text{Лог}_a x - \text{Лог}_a y$.

I48. Доказать, что $\text{Лог}_a x^c = c \cdot \text{Лог}_a x$, в частности $\text{Лог}_a a^x = x$.

I49. $a^{\text{Лог}_a x} = x$.

I50. $\text{Лог}_a x = \frac{\text{Лог}_b x}{\text{Лог}_b a} = \text{Лог}_a b \cdot \text{Лог}_b x$ (Формула перехода к другому основанию).

I51. Доказать, что если координатную плоскость, на которой нарисован график логарифмической функции, сжать к оси y в C раз, то это равносильно тому, чтобы сдвинуть этот график параллельно оси y .

Дополнительная.

I52. Если функция $y=\phi(x)$ определена при всех $x>0$, монотонна, $\phi(a)=1$ ($a>0$) и при всех положительных x и y $\phi(x \cdot y) = \phi(x) + \phi(y)$, то $\phi(x) = \text{Лог}_a x$.

Задачи на логарифмы.

153. Вычислить $\text{Лог}_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$, $\text{Лог}_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$, $\text{Лог}_{5\sqrt{5}} \frac{1}{5}$,

$9^{\text{Лог}_3 8}$, $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2 \text{Лог}_3 11}$.

154. Доказать, что $\text{Лог}_a x$ ($a > 1$) есть слабо вогнутая функция (определение слабо вогнутой функции получается из определения слабо выпуклой функции заменой знака " $<$ " на знак " $>$ ").

$\text{Лог}_a x$ ($a < 1$) есть слабо выпуклая функция.

155. Нарисовать график функции $y = \frac{\text{Лог}_2 x}{x}$ при $x > 0$.

Найти точную нижнюю грань множества значений этой функции при $x > 2$.

156. Тот же вопрос о функции $y = \frac{\text{Лог}_2 x}{10^{\sqrt{x}}}$.

157. При каких k функция $kx + \text{Лог}_a x$ монотонна в области $x > 0$?

Рассмотреть случаи $a > 1$, $a < 1$.

О выпуклых функциях.

Определение. Функция $\phi(x)$ называется выпуклой, если для любого a и b из области определения выполняется условие: если соединить точки графика $(a, \phi(a))$ и $(b, \phi(b))$ отрезком Δ , взять точку x из области определения, лежащую между a и b , провести через точку x прямую, параллельную оси u и взять точку пересечения M этой прямой с отрезком Δ , то ордината точки M будет больше $\phi(x)$.
(Функция называется вогнутой, если "... ордината точки M будет меньше $\phi(x)$ ").

Это определение отличается от определения слабо выпуклой (слабо вогнутой) функции тем, что здесь значения функции в точках a и b сравниваются со значениями в любой внутренней точке отрезка $[a, b]$, а не только в его середине.

Задачи:

158. Если функция $\phi(x)$ определена на связной части числовой оси (то-есть на всей числовой прямой, на полупрямой, на отрезке, интервале или полуинтервале), слабо выпукла и монотонна, то она выпукла.

До сих пор мы имели утверждения о слабой выпуклости (вогнутости) следующих функций: $y = x^2$, $y = x^2 + px + c$ (задача 70, листок 10), $y = a^x$ (задача 144, листок 53) и $y = \log_a x$ (задача 154 предыдущего листка). На основании задачи 158, эти функции выпуклы (вогнуты) на всей своей области определения.

159. Доказать, что выпуклая функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения.

160. Доказать неравенство $k! > k^{\frac{k}{2}}$ ($k \geq 2$).

Задачи о последовательностях.

I61. Найти твг и тнг последовательности $\frac{2k-1}{k^2+1}$.

I62. Найти твг и тнг последовательности $\frac{k}{2^k}$.

I63. Найти твг и тнг последовательности $\frac{2^k}{k!}$.

I64. Найти тнг последовательности $\frac{\log_2 k}{k} \quad (k \geq 2)$.

Определение. Колебанием числовой последовательности A называется твг множества всевозможных разностей $a_k - a_p$ (k и p - всевозможные натуральные числа). Обозначение: $Y(A, 0)$. (Если множество этих разностей не ограничено сверху, то колебание последовательности равно бесконечности).

Пусть A - последовательность. Отбросим k первых её членов. Колебание оставшейся последовательности обозначим через $Y(A, k)$. Тнг множества всех чисел $Y(A, k)$ (при всевозможных натуральных k) называется колебанием последовательности A на бесконечности и обозначается через $Y(A, \text{беск})$. (Если при каждом k $Y(A, k)$ есть бесконечность, то считаем, что $Y(A, \text{беск})$ есть бесконечность).

I65. Найти колебание на бесконечности для последовательностей из задач I61 - I64.

I66. Что можно сказать о колебании на бесконечности для последовательности, про которую известно, что она монотонна и ограничена?

I67. Доказать, что из каждой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность (монотонно неубывающую или монотонно невозрастающую).

I68. Доказать, что последовательность $a_k = (1 + \frac{1}{k})^k$ монотонно возрастает.

I69. Дано: для любого $k \in \mathbb{N}$ $v_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_k}{10^k}$. Доказать, что $Y(\{v_k\}, \text{беск}) = 0$.

Обратные тригонометрические функции (аркфункции).

Обозначения: Если $\phi(x)$ — функция $y = \sin x$, то полный прообраз числа y , $\phi^{-1}(y)$ обозначается обычно через $\text{Арксин } y$. Соответствующие обозначения для других тригонометрических функций: $\text{АркКос } y$, $\text{Арктг } y$ и $\text{АркКtg } y$.

Определение. Рассматриваем функцию $y = \sin x$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. На этом отрезке эта функция принимает каждое значение только один раз (монотонно возрастает).

Поэтому обратная функция определяется однозначно. Она обозначается так: $x = \text{арксин } y$. Функцию $y = \cos x$ рассматриваем на отрезке $0 \leq x \leq \pi$. Обратную функцию для неё обозначаем так: $x = \text{аркКос } y$. Функцию $y = \text{тг } x$ рассматриваем на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Обратную функцию обозначаем так:

$x = \text{арктг } y$. Функцию $y = \text{Кtg } x$ рассматриваем на интервале $0 < x < \pi$. Обратную функцию обозначаем так: $x = \text{аргКtg } y$.

$\text{арксин } x$ называется главным значением $\text{Арксин } x$, и аналогично для других функций.

Из всего, что до сих пор сказано про функцию $y = \sin x$, не следует, что она принимает все значения от -1 до 1 . Без этого мы не можем утверждать, что функция $y = \text{арксин } x$ определена на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Не можем сделать аналогичные утверждения и для других аркфункций. Это требуется доказывать.

Для доказательства существования какой-то точки можно пользоваться фактом, что на прямой от данной точки в данном направлении можно отложить отрезок данной длины.

Аркфункции (задачи).

I70. На оси y внутри тригонометрического круга возьмём точку. Проведём через неё прямую, параллельную оси x . Эта прямая пересекает круг в двух точках.

I71. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ определены на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Функции $y = \arctg x$ и $y = \operatorname{arKtg} x$ определены на всей числовой прямой.

I72. Нарисовать графики всех четырёх аркфункций.

I73. Построить график функции $y = \operatorname{arKtg} \frac{1}{x}$ и сравнить с графиком функции $y = \arctg x$.

I74. Доказать равенства: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,
 $\arctg x + \operatorname{arKtg} x = \frac{\pi}{2}$.

I75. Доказать тождество: $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(-1 < x < 1)$.

I76. Верна ли формула: $\arcsin x = \operatorname{arKtg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$?
 Как правильно связать эти величины?

I77. $\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \cdot \arcsin x + \pi k$ (k - любое целое),
 $\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi k$ (k - любое целое),
 $\operatorname{Arctg} x = \arctg x + \pi k$ (k - любое целое),
 $\operatorname{ArKtg} x = \operatorname{arKtg} x + \pi k$ (k - любое целое).

($\operatorname{Arcsin} x$ с большой буквы - полный прообраз числа x при отображении $x = \sin y$; $\arcsin x$ с маленькой буквы - главное значение этого полного прообраза).

Часть 5. Непрерывность и предел.

Листок 59 (НЕ)

Определение непрерывности.

Пусть функция $\phi(x)$ определена на некотором числовом множестве M , содержащем точку x_0 . Функция $\phi(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всякого x , принадлежащего множеству M , из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon$.

Это — классическое определение непрерывной функции. Его автором является Коши.

Формальное замечание. Слову "следует" классическая традиция придаёт следующий точный смысл: утверждение "из A следует B " считается верным в двух случаях: 1) если A неверно, или 2) B верно (это "или" не исключающее, то-есть случай " A неверно и B верно" учтён и в 1) и во 2)), и неверным в одном: если A верно и B неверно. При этом не требуется никакой смысловой связи между A и B . Так что утверждение "если снег чёрен, то $2 \cdot 2 = 5$ " считается истинным.

Для правильного пользования этим определением необходимо умение (и привычка) понимать его буквально.

Задачи.

- I. Доказать эквивалентность этого определения и определения листка 47 ("если точка a входит в область определения функции $\phi(x)$ и $U(\phi(x), a) = 0$, то функция $\phi(x)$ называется непрерывной в точке a ").

Следующие две задачи желательно сделать, исходя из нового определения непрерывности (ср. с задачами 83 и 84 листка 47).

2. Если функция $\phi(x)$ непрерывна в точке a , то найдётся окрестность точки a (то-есть интервал, содержащий точку a) такая, что в этой окрестности $\phi(x)$ есть ограниченная функция.
3. Если функция $\phi(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\phi(x_0) \neq 0$, то найдётся окрестность точки x_0 такая, что всюду в этой окрестности (конечно, только в тех точках, где $\phi(x)$ определена) $\phi(x) \neq 0$ и имеет тот же знак, что и $\phi(x_0)$.

Теоремы о непрерывных функциях.

Если задачи этого листка покажутся вам трудными, решайте сначала задачи из следующих трёх листков, а затем возвращайтесь к этому листку.

4. Если функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, непрерывна в каждой точке этого отрезка, и $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то найдётся точка C , принадлежащая отрезку $[a, b]$, такая что $f(C) = 0$.

Другая формулировка: если $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке, и E — число, заключённое между $f(a)$ и $f(b)$, то найдётся точка C отрезка $[a, b]$ такая, что $f(C) = E$.

5. Если функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке, то $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ (то-есть существует число C такое, что для каждого x отрезка $[a, b]$ $|f(x)| \leq C$).
6. (Теорема о достижении максимума). В условиях предыдущей задачи существует точка x_0 отрезка $[a, b]$ такая, что $f(x) \leq f(x_0)$ для всякого x из отрезка $[a, b]$. (Такая точка x_0 называется точкой максимума; верна, конечно, и аналогичная теорема о минимуме).
7. Доказать, что в задачах 4, 5, 6 все данные существенные, то-есть отбросив хотя бы одно из условий, мы получим неверное утверждение.

Указание. Для решения задач 4, 5, 6 можно пользоваться следующими фактами:

- 1). Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань;
- 2). Система вложенных отрезков имеет общую точку (задача I44, листок I9).

Использование этого факта основано на том, что мы рассматриваем такое свойство, которое, если верно для некоторого отрезка, то верно и хотя бы для одной из его половин.

Попробуйте сделать задачи 4, 5 и 6 двумя способами: используя факт 1 и факт 2.

Разрывность.

Функция называется разрывной в точке x_0 , если точка x_0 входит в область определения функции, и при этом функция не является непрерывной в точке x_0 .

8. Привести пример функции, определённой при всех x , разрывной в точках вида $x = \frac{1}{k}$ (k натуральное), а в остальных точках непрерывной (в том числе в точке $x=0$).
9. Привести пример функции, определённой при всех x и разрывной во всех точках.
10. Привести пример функции, определённой при всех x и непрерывной ровно в одной точке (а в остальных точках разрывной).
11. Доказать, что не существует монотонной функции, разрывной во всех иррациональных точках.

Дополнительные.

12. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных точках и непрерывной во всех иррациональных.
13. Привести пример функции, разрывной во всех рациональных, непрерывной во всех иррациональных точках и при этом монотонной.

Логические упражнения.

14. Дайте определение функции, разрывной в точке x_0 , не употребляя отрицаний.
Дать два ответа: исходя из старого и из нового определений непрерывности.
15. Если в новом определении непрерывности не требовать, чтобы ϵ было больше нуля (то-есть "... для любого действительного числа ϵ найдётся $\delta > 0$ такое, что..."), какие функции окажутся "непрерывными" согласно этому определению?
16. Аналогичный вопрос про условие $\delta > 0$.

Непрерывность операций.

17. Если функции $\phi(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то и функции $\phi(x)+g(x)$ и $\phi(x)-g(x)$ непрерывны в точке x_0 .

Замечание. Функция $\phi(x)+g(x)$ определена для тех x , которые входят одновременно в область определения обеих функций $\phi(x)$ и $g(x)$. Из условий задачи следует во всяком случае, что $\phi(x)+g(x)$ определена в точке x_0 . Решая задачу, можете считать (если это вам проще), что обе функции определены в некоторой окрестности точки x_0 . Это замечание относится и к следующим двум задачам.

18. То же для произведения $\phi(x) \cdot g(x)$.

19. Если $\phi(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , и $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{\phi(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0 .

20. (Теорема о непрерывности суперпозиции). Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0 , а $\phi(x)$ непрерывна в точке $g(x_0)$, то функция $p(x) = \phi(g(x))$ непрерывна в точке x_0 . Функция $p(x)$ называется суперпозицией функций ϕ и g . ($p(x)$ определена для всякого такого x_0 , что 1) $g(x_0)$ определена и 2) $\phi(g(x_0))$ определена. Если это вам проще, считайте, что $g(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , а $\phi(x)$ — в некоторой окрестности точки $g(x_0)$).

21. Если функция $y=\phi(x)$ определена на отрезке A , монотонно возрастает или монотонно убывает и непрерывна, то функция $x=\phi^{-1}(y)$ непрерывна на отрезке $\phi(A)$.

22. Если $\phi(x)$ — монотонно неубывающая или монотонно невозрастающая функция, заданная на отрезке, и известно, что она пробегает все промежуточные значения (то-есть из неравенства $\phi(a) < C < \phi(b)$ следует, что найдётся x_0 такое, что $\phi(x_0)=C$), то $\phi(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Непрерывность элементарных функций.

23. Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x = \frac{3}{2}$.
(Указать правило, как по ε найти δ).
24. Доказать, что многочлен $y = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ есть всюду непрерывная функция.
25. Доказать, что функция $y = \sqrt[k]{x}$ ($x > 0$) есть функция, непрерывная при всех $x > 0$.
26. Доказать, что функция $y = x^p$, где $x > 0$ и p - рациональное положительное число, непрерывна при всех $x > 0$.
Доказать то же самое для случая $p < 0$.
27. Доказать, что функция $y = a^x$ ($a > 1$) непрерывна при всех x .
28. Доказать, что функция $y = \log_a x$ непрерывна при всех $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$).
29. Доказать, что функция $y = x^a$, где a действительное число, непрерывна при всех $x > 0$.
30. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна при всех x .
31. Доказать, что функции $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны во всех точках, где они определены.
32. Доказать, что функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arccotg} x$ непрерывны при всех x , при которых они определены.

Индуктивное определение элементарной функции.

- 1). Элементарными функциями являются константы $y = C$, функции $y = a^x$ ($a > 0$), $y = \sqrt[p]{x}$ (p нечётное, x любое), $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = \sin x$, $y = \arcsin x$.
- 2). Если $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ - элементарные функции, то $\phi(x) + \gamma(x)$, $\phi(x) - \gamma(x)$, $\phi(x) \cdot \gamma(x)$, $\frac{\phi(x)}{\gamma(x)}$, $\phi(\gamma(x))$ - элементарные функции.

Это определение нужно понимать так: функция $\phi(x)$ является элементарной, если исходя из функций, элементарных в силу пункта 1, можно прийти к данной функции с помощью конечного числа шагов, на каждом из которых применяется одна из операций пункта 2 к функциям, элементарность которых уже установлена.

33. Проверьте, что все функции задач 23-32 элементарные.
34. Доказать, что все элементарные функции непрерывны всюду, где они определены.
35. (Дополнительная). Вспомните задачу 51 листка 7.

Контрольные задачи на непрерывность.

36. Функция $p(x)$ непрерывна в точке x_0 . Доказать, что функция $\Phi(x) = \sqrt{p(x)}$ непрерывна в точке x_0 .
37. Пусть функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ непрерывны в точке x_0 . Доказать, что функция $\Phi(x) = \max(\phi(x), \gamma(x))$ непрерывна в точке x_0 .
38. Пусть функция $\phi(x)$ непрерывна на всей прямой. Определим функцию $S(x)$ так: пусть $k \neq 0$ — фиксированное число. Положим $S(x) = \phi(x)$, если $|\phi(x)| \leq k$; $S(x) = k$, если $\phi(x) > k$, и $S(x) = -k$, если $\phi(x) < -k$. Доказать, что функция $S(x)$ всюду непрерывна.
39. Функция $\phi(x)$ разрывна в точке x_0 . Можно ли утверждать, что функция $(\phi(x))^2$ разрывна в точке x_0 ?
40. $\phi(x) = p(x) + k(x)$. $p(x)$ непрерывна в точке x_0 , $k(x)$ разрывна в этой точке. Доказать, что $\phi(x)$ разрывна в точке x_0 .
41. $\phi(x) = p(x) + k(x)$. $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0 . Доказать, что $\phi(x)$ разрывна в точке x_0 .
42. $\phi(x) = p(x) \cdot k(x)$. $p(x)$ непрерывна в точке x_0 , $k(x)$ разрывна в этой точке. Доказать, что $\phi(x)$ разрывна в точке x_0 .
43. $\phi(x) = p(x) \cdot k(x)$. $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0 . Доказать, что $\phi(x)$ разрывна в точке x_0 .
44. Пусть $\phi(x)$ определена на всей числовой прямой и такова, что для любых x_1 и x_2 $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq 0,5 \cdot |x_1 - x_2|$. Доказать, что уравнение $\phi(x) = x$ имеет ровно один корень.
45. Сколько решений имеет уравнение $\sin x = \frac{x}{100}$?
46. Если $\phi(x)$ определена при всех x , непрерывна в каждой точке, и для любых x $\phi(x) = \phi(2x)$, то $\phi(x) = \phi(0)$.
47. Если $\phi(x)$ определена при всех x , непрерывна в каждой точке, и для любых x и y $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, то для любого x $\phi(x) = x \cdot \phi(1)$.
48. Если $\phi(x)$ определена при всех x , непрерывна в каждой точке и для любых x и y $\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$, то $\phi(x) = \phi(1)^x$.

Дополнительные.

49. Если $\phi(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то для всякого $d = 1/k$ (k натуральное > 1) найдётся пара чисел x, y , такая, что $0 \leq x - y \leq 1$, $y = x + d$, $\phi(x) = \phi(y)$. Если же d не имеет вид $1/k$, то утверждение неверно.
50. Пусть $\phi(x)$ непрерывна, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ при $0 \leq x \leq 1$; $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ и $\phi(\phi(x)) = x$. Доказать, что при $0 \leq x \leq 1$ $\phi(x) = x$.

Связь с множествами.

51. Пусть функция $\phi(x)$ определена на всей прямой или на отрезке. Пусть E некоторое число. Тогда множество точек x таких, что $Y(\phi(t), x) \subset E$, есть открытое множество (открытое - по отношению к области, на которой задана функция).
52. Пусть функция $\phi(x)$ определена на всей прямой или на отрезке и непрерывна всюду на этом множестве. Пусть C - некоторое число. Тогда множество точек, в которых значение этой функции меньше C , открыто, а множество точек, в которых значение $\geq C$, замкнуто (открытость и замкнутость по отношению к области определения).

Вспомогательная теорема:

53. Пусть A - отрезок, а C - множество интервалов такое, что каждая точка отрезка A принадлежит некоторому интервалу (такое множество интервалов называется покрытием отрезка A). Тогда найдётся конечное подмножество C_1 множества C такое, что каждая точка отрезка A принадлежит одному из интервалов множества C_1 (множество C_1 называется конечным подпокрытием отрезка A).
54. Верна ли эта теорема, если заменить отрезок интервалом? Интервалы отрезками?

Попробуйте применить задачи 52 и 53 к теоремам листка 60.

55. Функция называется ограниченной в точке a , если существует окрестность точки a , в которой функция ограничена. Доказать, что множество точек, в которых функция неограничена, замкнуто.
56. Если функция определена на отрезке и ограничена в каждой его точке, то она ограничена на отрезке.
57. Множество точек непрерывности любой функции, заданной на всей числовой прямой, можно представить как пересечение счётного числа открытых множеств. (Множество точек разрыва - как сумму счётного числа замкнутых).
58. Пусть функция определена на всей числовой прямой. Если для всякого C множество таких x , что $\phi(x) \geq C$, открыто, и множество таких x , что $\phi(x) \leq C$ тоже открыто, то $\phi(x)$ непрерывна.
59. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Предел.

Пусть функция $\phi(x)$ определена на числовом множестве M , и пусть x_0 - предельная точка множества M (то-есть любая окрестность точки x_0 содержит бесконечно много точек из M).

Определение. Число A называется пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 (обозначение: $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любого x из M , отличного от x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\phi(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание. Мы не придаём самостоятельного смысла словам: " x стремится к x_0 " или "предел функции $\phi(x)$ ". Смысл имеет только всё сочетание слов: "предел функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 ", и этот смысл высказан в вышеприведённом определении.

Связь с непрерывностью.

1). Если x_0 - предельная точка для множества M , на котором определена функция $\phi(x)$, и $\phi(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0)$.

2). Если точка x_0 входит в область определения функции $\phi(x)$, и $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0)$, то функция $\phi(x)$ непрерывна в точке x_0 .

(Убедитесь в этом сравнением определения предела и классического определения непрерывности).

Определение. Число A называется пределом последовательности ϕ_k , если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся k_0 такое, что из неравенства $k > k_0$ следует неравенство $|\phi_k - A| < \varepsilon$. (Обозн.: $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$).

Пусть M - множество на прямой, не ограниченное сверху, $\phi(x)$ - функция, определённая на M .

Определение. Число A называется пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к плюс бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число D , что для всякого x из M , которое больше D , выполняется неравенство $|\phi(x) - A| < \varepsilon$.
Обозначение: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$.

Пусть $\phi(x)$ определена на множестве M , и x_0 - предельная точка M .

Определение. Бесконечность (без знака) является пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 , если для любого ε найдётся $\delta > 0$ такое, что для всякого x из M , для которого $|x - x_0| < \delta$ (кроме $x = x_0$), $|\phi(x)| > \varepsilon$. (Обозн.: $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \text{беск.}$).

Упражнения на определение предела.

60. Рассмотрим запись: Пред $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A$. Символу a будем придавать один из четырёх смыслов: 1) a есть число, 2) a есть бесконечность, 3) a есть плюс бесконечность, 4) a есть минус бесконечность. Символу A также будем придавать эти четыре смысла. Произвольно комбинируя указанные четыре смысла a с четырьмя смыслами A , получим 16 понятий (в том числе 3 старых). Дайте определение каждому из них (через ϵ, δ).

61. Примем сокращения: л - "для любого", н - "найдётся... такое, что...".

Рассмотрим условия:

1. л $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
2. л $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
3. л $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
4. л $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
5. л $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
6. л $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
7. л $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
8. л $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
9. н $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
10. н $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
11. н $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
12. н $\epsilon > 0$ л $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
13. н $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
14. н $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ л $x \neq x_0$ из $|x - x_0| < \delta$ следует $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.
15. н $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| < \epsilon$.
16. н $\epsilon > 0$ н $\delta > 0$ н $x \neq x_0$ $|x - x_0| < \delta$ и $|\phi(x) - A| \leq \epsilon$.

Среди этих условий найдите определения знакомых вам понятий и их отрицания. Про каждое из остальных условий скажите, что оно означает.

Составьте квадратную таблицу, у которой 16 строк, занумерованных числами 1 - 16 и 7 столбцов, занумерованных числами 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16. На пересечении k -той строки и n -ного столбца поставьте 1, если из k -того условия следует n -ное условие, и 0 в противном случае. В случае "1" вы должны уметь дать доказательство, а в случае "0" - привести пример.

Верхний и нижний пределы.

Определение. Пусть точка x_0 предельная для множества M , на котором определена функция $\phi(x)$. Для каждой окрестности U точки x_0 рассмотрим множество всех значений функции $\phi(x)$ на этой окрестности, за исключением значения $\phi(x_0)$. Рассмотрим твг этого множества; обозначим его через T_U . Тнг множества T_U при всевозможных окрестностях U точки x_0 называется верхним пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 и обозначается $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$.

Если для каждой окрестности U точки x_0 T_U есть плюс бесконечность, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ равен плюс бесконечности.

Если множество T_U содержит хотя бы одно число (не плюс бесконечность), и не ограничено снизу, то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ равен минус бесконечности.

Аналогично определяется нижний предел ($\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$).

Упражнения:

62. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела последовательности.
63. Сформулировать определения верхнего и нижнего предела функции при x стремящемся к плюс бесконечности, к минус бесконечности, к бесконечности (без знака).
64. Пусть точка x_0 предельная для множества M , на котором определена функция $\phi(x)$, сама же точка x_0 не входит в M (или, иначе, если мы исключаем из рассмотрения значение $\phi(x_0)$). Тогда, если $U(\phi(x), x_0)$ существует (не является бесконечностью), то $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ и $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ существуют (являются числами), и $U(\phi(x), x_0)$ равно их разности.
65. Аналогичная теорема о колебании последовательности.

Критерий Коши.

66. Пусть точка x_0 предельная для множества M , на котором определена функция $\phi(x)$, сама же точка x_0 не входит в M . Тогда для того, чтобы существовал (конечный) предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\forall (\phi(x), x_0) = 0$.

67. (Вторая формулировка критерия Коши). Пусть точка x_0 предельная для множества M , на котором определена функция $\phi(x)$, сама же точка x_0 не входит в M . Тогда для того, чтобы существовал (конечный) предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$ такое, что для любых x_1 и x_2 , отличных от x_0 и удовлетворяющих неравенствам $|x_1 - x_0| < \delta$ и $|x_2 - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \varepsilon$.

Определение. Последовательность a_k называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N , что для любых k и p , больших N , $|a_k - a_p| < \varepsilon$.

68. (Критерий Коши для последовательности). Для того, чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

69. (Другая формулировка критерия Коши для последовательности). Для того, чтобы последовательность имела (конечный) предел, необходимо и достаточно, чтобы её колебание на бесконечности было равно нулю.

70. $a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$. Доказать, что последовательность a_k фундаментальная.

Предельный переход в операциях.

71. Пусть функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (тогда и их сумма определена в этой окрестности). Если существуют (конечные) пределы $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ при x стремящемся к x_0 , то функция $\phi(x) + \gamma(x)$ имеет (конечный) предел при x стремящемся к x_0 , и этот предел равен сумме пределов $\phi(x)$ и $\gamma(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\phi(x) + \gamma(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x).$$
72. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для произведения и частного.
73. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для предела функции при x стремящемся к плюс бесконечности, к минус бесконечности, к бесконечности (без знака).
74. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы о пределах последовательностей.
75. Пусть функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0 . Пусть $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = x_0$.
 Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} \phi(\gamma(t))$ существует и равен $\phi(x_0)$.
76. Сформулируйте и докажите теорему, аналогичную предыдущей 1) для случая, когда $\lim_{t \rightarrow \text{беск}} \gamma(t) = x_0$, 2) для случая, когда предел последовательности $x_k = x_0$.
77. Рассмотрим функцию $\phi(x) = a(x)^{b(x)}$. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = a_0 > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = b_0$. Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x)$ существует и равен $a_0^{b_0}$.
78. Сформулируйте и докажите аналогичные теоремы для случаев, когда $\lim_{x \rightarrow \text{беск}} a(x) = a_0$, $\lim_{x \rightarrow \text{беск}} b(x) = b_0$, когда a_k есть последовательность, и $\lim_k a_k = a_0 > 0$ и т.п.

Задачи на последовательности.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ — последовательность.

Если из неё вычеркнуть часть членов, так что их останется всё-таки бесконечное число, а остальные перенумеровать, сохраняя порядок и так, чтобы номера шли без пропусков, то полученная последовательность называется подпоследовательностью данной последовательности.

79. Если последовательность x_k имеет предел, то и всякая её подпоследовательность имеет тот же предел.
80. Если последовательность x_k имеет предел A , то и последовательность y_k , полученная из последовательности x_k перенумерованием, имеет предел A (перенумерование — взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел на себя).
81. Если последовательность x_k ограничена, то из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность (сходящаяся — значит имеющую предел).

Рядом называется бесконечная сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$. Число S называется суммой ряда: $S = a_1 + a_2 + \dots$, если последовательность частичных сумм этого ряда: $v_1 = a_1$, $v_2 = a_1 + a_2$, $v_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $v_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $\dots$ имеет пределом число S . В этом случае ряд называется сходящимся.

82. Доказать, что ряд $1 + p + p^2 + p^3 + \dots$ ($|p| < 1$) сходится. Найти его сумму.

83. Доказать, что ряд $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots$ сходится. Найти его сумму с точностью до $0,1$. Это число обозначается через e (число Эйлера).

84. Доказать, что e — иррациональное число.

85. Доказать, что последовательность $(1 + \frac{1}{k})^k$ имеет предел.

86. (Трудная). Доказать, что этот предел равен e .

Новое определение непрерывности и предела функции.

В задачах этого листка понятия непрерывности и предела функции выражаются через понятие предела последовательности.

Пусть функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Если x_k — последовательность, сходящаяся к x_0 (то-есть имеющая пределом x_0), то начиная с некоторого k $\phi(x_k)$ имеет смысл, и можно говорить о пределе последовательности $\phi(x_k)$.

87. Для того, чтобы функция $\phi(x)$ была непрерывна в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы для всякой последовательности x_k , сходящейся к x_0 , последовательность $\phi(x_k)$ сходилась к $\phi(x_0)$.
88. Доказать, что в предыдущей задаче достаточно требовать, чтобы последовательность $\phi(x_k)$ сходилась (не указывая, что к $\phi(x_0)$).
89. Число A является пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 в том и только в том случае, если для любой последовательности x_k , имеющей пределом x_0 , но не принимающей значение x_0 , последовательность $\phi(x_k)$ имеет пределом число A .
- Пусть функция $\phi(x)$ определена при всех x , больших некоторого a .
90. Число A является пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к плюс бесконечности, если для любой последовательности x_k , имеющей пределом плюс бесконечность, последовательность $\phi(x_k)$ имеет пределом число A .
91. Сформулируйте и докажите соответствующие теоремы для других случаев предельного перехода (при x стремящемся к минус бесконечности и т.п.; перечень этих случаев — в задаче 60, листок 66).

Дополнительная.

92. Попробуйте доказать теоремы о непрерывных функциях (задачи 5 и 6 листка 60) используя задачу 81 (листок 70) и новое определение непрерывности.

Раскрытие неопределённостей.

93. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{10} \cdot (3x+2)^{20}}{(x-1)^{30}} .$

94. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(2+x)(3+x)-6}{x} .$

95. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-1}{x-1} .$

96. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k}$ в зависимости от p, k, a_0 и b_0 (a_0 и b_0 отличны от нуля).

97. Найти предел отношения двух многочленов при x стремящемся к нулю в зависимости от коэффициентов.

98. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}) .$

99. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} .$ Нарисовать график функции.

100. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} .$

101. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^d} \quad (d > 0) .$

102. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} .$

103. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} .$ Нарисовать график.

104. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Tg} x - \sin x}{x^3} .$ Нарисовать график.

(Во всех этих задачах требуется не только найти предел в предположении, что он существует, но и доказать существование. Задачи на нахождение предела дроби, когда числитель и знаменатель оба стремятся к нулю или оба к бесконечности, называются задачами на раскрытие неопределённостей-вида нуль делить на нуль или бесконечность на бесконечность).

Пределы, связанные с экспонентой.

105. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = a \neq 0$. Если при этом

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x)^{b(x)} = 0$;

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} b(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} a(x)^{b(x)} = +\infty$.

106. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

107. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x}$ в зависимости от a и k ($a > 1$).

108. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^d}$ в зависимости от a и d ($d > 0$).

109. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

110. Доказать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{k})^k = e^x$.

111. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$.

112. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x}$, (p - рациональное число).

Указание: воспользоваться задачей 95.

Дополнительные.

113. Доказать, что $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$.

114. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

115. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_e(1+e^x)}{x}$ (логарифм x по основанию e называется натуральным логарифмом x и в дальнейшем обозначается через $\ln x$).

Асимптоты.

Если линейная функция $y=kx+c$ такова, что предел разности $(\phi(x) - (kx+c))$ при x стремящемся к плюс бесконечности (или к минус бесконечности) равен 0, то прямая $y=kx+c$ называется наклонной асимптотой графика функции $y=\phi(x)$ справа (слева).

Прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=\phi(x)$, если эта функция неограничена в точке x_0 (то-есть не существует окрестности точки x_0 , в которой она ограничена).

Нарисовать графики и найти асимптоты:

II6. $y = x + \frac{1}{x}$.

II7. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$.

II8. $y = \sqrt{x^2+1}$.

II9. $y = \sqrt{x^2+x}$

I20. $y = x \cdot \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

Дополнительные.

I21. $y = \ln(1+e^x)$.

I22. Существует ли прямая, которая лежит выше графика функции $y = x \cdot \ln x$?

I23. Доказать, что графики функций $y = x^{100}$ и $y = e^x$ пересекаются по крайней мере в трёх точках.

Бесконечно-малые.

Функция $\phi(x)$ называется бесконечно-малой при x стремящемся к x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0$. Если $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ -

две бесконечно-малые при x стремящемся к x_0 , определённые всюду в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0), $\phi(x)$ всюду в этой окрестности (кроме, быть может точки x_0) отлично от нуля, и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\gamma(x)}{\phi(x)} = 0,$$

то говорят, что $\gamma(x)$ есть бесконечно-малая более высокого порядка малости, чем $\phi(x)$. В этом случае пишут: $\gamma(x) = o(\phi(x))$ (o малое от ϕ от x).

- I24. $\frac{a(x)}{b(x)}$ и $\frac{a(x) + o(a(x))}{b(x) + o(b(x))}$ имеют одинаковое предельное поведение при x стремящемся к x_0 (то-есть если первое выражение имеет предел, то и второе имеет тот же предел, если первое стремится к плюс бесконечности, то и второе стремится к плюс бесконечности и т.д.).

Говорят, что бесконечно-малые $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ имеют одинаковый порядок малости при x стремящемся к x_0 , если $\frac{\phi(x)}{\gamma(x)}$ определена всюду в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, быть может, самой точки x_0 , и имеет при x стремящемся к x_0 конечный предел, отличный от 0. Это записывается так: $\phi(x) = O(\gamma(x))$ (O большое от $\gamma(x)$). Если же этот предел равен 1, то $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ называются эквивалентными бесконечно-малыми. Это обозначается так: $\phi(x) \sim \gamma(x)$.

- I25. Разность двух эквивалентных бесконечно-малых имеет более высокий порядок малости, чем каждая из них.

Если бесконечно-малая $\phi(x)$ имеет при x стремящемся к x_0 тот же порядок малости, что $(x-x_0)^k$, то говорят, что $\phi(x)$ имеет k -тый порядок малости при x стремящемся к x_0 .

- I26. Пусть $\phi(x) = O(x-x_0)^k$, $\gamma(x) = O(x-x_0)^p$, и $k < p$.

Тогда $\phi(x) + \gamma(x) = O(x-x_0)^k$. Какой порядок малости имеет функция $\phi(x) \cdot \gamma(x)$?

- I27. Найти порядок малости $\sqrt[k]{1+x} - 1$ при x стремящемся к 0.

- I28. Найти порядок малости функций $y = 1 - \cos x$, $y = \tan x - \sin x$ при x стремящемся к 0.

- I29. (Дополнительная). Найти k такое, что $(1+x)^a - 1 \sim kx$ (a - любое действительное число).

Производные некоторых функций.

Пусть функция $y=\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение. Производной функции $y=\phi(x)$ в точке x_0 (обозначение: $\phi'(x_0)$) называется $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x_0+x)-\phi(x_0)}{x-x_0}$.

Геометрический смысл производной - тангенс угла наклона касательной графика в точке $(x_0, \phi(x_0))$ к оси x .

Другое определение производной: производной функции $y=\phi(x)$ в точке x_0 называется такое число k , что разность $\phi(x) - \phi(x_0) - k(x-x_0)$ есть бесконечно-малая более высокого порядка, чем $x-x_0$.

В следующих задачах требуется нарисовать графики и вычислить $\phi'(x)$.

I30. $\phi(x) = x^2$, $\phi(x) = x^k$ (k - натуральное).

I31. $\phi(x) = \sqrt{x}$ в области $x \geq 0$.

I32. $\phi(x) = \sqrt[k]{x}$ (k натуральное) в области $x \geq 0$.

I33. $\phi(x) = \sin x$.

I34. $\phi(x) = \cos x$.

I35. $\phi(x) = \arcsin x$ на интервале $-1 \leq x \leq 1$.

Дополнительные.

I36. $\phi(x) = e^x$ в точке $x_0=0$.

I37. $\phi(x) = a^x$ при любом x .

I38. $\phi(x) = \ln x$ в области $x > 0$.

I39. $\phi(x) = x^a$ в точке $x_0=1$.

Определения.

1. Пусть на связной части T числовой прямой (то-есть на всей прямой, на полупрямой, на отрезке, полуинтервале или интервале) заданы две непрерывные функции $x=\varphi(t)$ и $y=\gamma(t)$. Пусть на плоскости зафиксирована декартова система координат xOy . Будем считать, что пара функций $\varphi(t)$, $\gamma(t)$ задаёт отображение множества T в плоскость, ставя каждому числу t из множества T точку плоскости с координатами $x=\varphi(t)$ и $y=\gamma(t)$. Образ множества T при таком отображении называется кривой, а само отображение - параметрическим заданием кривой.
2. Окрестностью точки плоскости будем называть любой круг с центром в этой точке.
3. Функция двух переменных $t=\varphi(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если она определена в этой точке и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ такая, что для всякой точки $M(x,y)$ этой окрестности, входящей в область определения функции, $|\varphi(x,y) - \varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon$.
4. Отображение $Y=\Phi(X)$ плоского множества M в плоское множество Γ называется непрерывным в точке $X_0(x_0, y_0)$, если для любой окрестности E точки $Y_0=\Phi(X_0)$ существует окрестность точки X_0 такая, что в любой точке X этой окрестности, входящей в область определения функции, $\Phi(X)$ входит в E .

Убедитесь в том, что параметрическое задание кривой есть отображение множества T в плоскость, непрерывное в смысле определения 4, и что непрерывная функция двух переменных есть частный случай непрерывного отображения плоских множеств (именно, случай, когда Γ целиком принадлежит некоторой прямой).

5. Если отображение множества M в множество Γ взаимно-однозначно, непрерывно, и обратное отображение также непрерывно, то такое отображение называется топологическим или гомеоморфным.

Кривая Пеано.

Пусть T - отрезок $0 \leq t \leq 1$, Y - квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Назовём их отрезком и квадратом нулевого ранга. Концам отрезка T поставим в соответствие две вершины квадрата: $\phi(0) = (0,0)$, $\phi(1) = (1,0)$. Разобьём квадрат Y на 4 меньших квадрата (первого ранга) прямыми $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, а отрезок T на 4 отрезка (первого ранга) точками $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{3}{4}$. Положим $\phi(\frac{1}{4}) = (0, \frac{1}{2})$, $\phi(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\phi(\frac{3}{4}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\phi(1) = (1, \frac{1}{2})$.

Ставим в соответствие отрезок $T_1 = [0, \frac{1}{4}]$ квадрату $Y_1 (0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2})$, отрезок $T_2 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ - квадрату $Y_2 (0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq y \leq 1)$, отрезок $T_3 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ - квадрату $Y_3 (\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1)$, отрезок $T_4 = [\frac{3}{4}, 1]$ - квадрату $Y_4 (\frac{1}{2} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2})$. Для каждого отрезка первого ранга и соответствующего ему квадрата первого ранга повторим такое же построение. И так далее. Говоря точнее, действуем по индукции.

Пусть квадрат разбит на 4^k квадратов k -го ранга, а отрезок - на 4^k отрезков k -го ранга, указаны образы концов отрезков и установлено взаимно-однозначное соответствие множества отрезков k -го ранга и множества квадратов k -го ранга, так что каждому отрезку поставлен в соответствие квадрат, в вершинах которого лежат образы обоих концов этого отрезка. Строим отрезки и квадраты $k+1$ -го ранга так же, как построены отрезки и квадраты k -го ранга и аналогичным образом указываем образы концов.

Если число t отрезка T - двоично-рациональное, то-есть имеет вид $\frac{p}{2^k}$, то на некотором шагу этого процесса будет указан его образ.

Пусть t - не двоично-рациональное число. Тогда возьмём систему отрезков 1 -го, 2 -го, ..., k -того, ... рангов, содержащих точку t , и соответствующие им квадраты. Эти квадраты пересекаются по единственной точке. Положим $\phi(t)$ равным этой точке.

Непрерывность в геометрии.

I40. Доказать, что не существует гомеоморфного отображения отрезка $0 \leq t \leq 1$ на квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

I41. Город А и город В соединены двумя дорогами, несамопересекающимися и непересекающимися друг друга (дороги можно считать ломаными). Из города А в город В одновременно выехали по разным дорогам две машины и одновременно прибыли в город В. При этом машины были связаны верёвкой длиной 20 метров, и верёвка не порвалась (машины могли двигаться неравномерно, не сказано даже, что они шли всё время вперёд).

Доказать, что два воза с сеном, каждый радиуса 11 метров, не могут одновременно пройти по разным дорогам один из А в В, другой из В в А, не задев друг друга.

I42. Доказать, что отображение $\phi(t)$, построенное на предыдущей странице, является непрерывным отображением отрезка на квадрат.

Разбиение треугольника T на треугольники T_i называется триангуляцией, если любые два треугольника T_i и T_k либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. Все вершины участвующих в разбиении треугольников называются вершинами разбиения.

I43. Пусть дан треугольник T и его триангуляция. Если вершины T занумерованы цифрами 1, 2, 3, а остальные вершины разбиения как-то занумерованы этими же цифрами, но на стороне 1,2 треугольника T встречаются только цифры 1 и 2, на стороне 2,3 — только цифры 2 и 3, на стороне 1,3 — только цифры 1 и 3, то найдётся треугольник триангуляции, вершины которого занумерованы всеми тремя цифрами.

(Это утверждение носит название "леммы Шпернера").

I44. (Теорема о неподвижной точке). При непрерывном отображении на себя плоского замкнутого треугольника найдётся неподвижная точка (вместо треугольника можно взять квадрат или круг).

I45. Доказать, что при всяком непрерывном отображении отрезка на квадрат найдётся точка квадрата, прообраз которой содержит по меньшей мере три точки.

Ряды.

Если ряд $/a_1/+a_2/+...+a_k/+...$ сходится (к числу), то ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ называется абсолютно-сходящимся. Если ряд $/a_1/+a_2/+...+a_k/+...$ расходится (сходится к бесконечности), а ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ сходится, то ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ называется условно-сходящимся.

I46. Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

I47. Если ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ абсолютно сходится, то ряд $b_1+b_2+...+b_k+...$, полученный перенумерацией ряда $a_1+a_2+...+a_k+...$, тоже сходится, и притом к той же сумме.

(Перенумерация - взаимно-однозначное отображение множества натуральных чисел на себя).

I48. Приведите пример условно-сходящегося ряда.

I49. Если ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ условно сходится, то перенумерованием можно изменить его сумму.

Точнее: для любого числа B существует перенумерация такая, что ряд в результате сходится к B . Существует перенумерация, в результате которой ряд сходится к плюс бесконечности, к минус бесконечности. Существует перенумерация, в результате которой ряд не сходится ни в одном из перечисленных смыслов.

I50. Пусть ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ и ряд $b_1+b_2+...+b_k+...$ состоят из положительных членов, расходятся и монотонно убывают (то-есть для любого k $a_k > a_{k+1}$, $b_k > b_{k+1}$). Положим $c_k = \min(a_k, b_k)$. Доказать, что ряд $c_1+c_2+...+c_k+...$ расходится.

I51. Дан ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$. Если существует положительное $p < 1$ такое, что для каждого k , начиная с некоторого, $\frac{a_k}{a_{k+1}} < p$, то ряд абсолютно сходится.

I52. Если $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = p < 1$, то ряд $a_1+a_2+...+a_k+...$ абсолютно сходится.

Дополнительные задачи по теории функций.

- I53. Построить функцию, определённую на всей числовой прямой и такую, что на любом интервале она принимает все действительные значения.
- I54. Построить функцию, определённую на канторовском множестве, непрерывную во всех его точках и такую, что множество её значений есть отрезок.
- I55. Построить функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определённую на квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ и такую, что она в каждой точке непрерывна как функция от x при фиксированном y и непрерывна как функция от y при фиксированном x , и при этом в некоторой точке разрывна как функция двух переменных.
- I56. (Трудная). Доказать, что функция, описанная в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывна.

Определение. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$, определённых на некотором множестве M , называется сходящейся на множестве M к функции $f(x)$, если для любого x из M и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся N такое, что для любого натурального $k > N$ $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Определение. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$, определённых на некотором множестве M , называется равномерно сходящейся на множестве M к функции $f(x)$, если для любого положительного ε найдётся N такое, что для любого натурального $k > N$ и любого x из M выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

- I57. Привести пример сходящейся, но не равномерно сходящейся последовательности функций.
- I58. Пусть последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$, заданных на отрезке M и непрерывных на M , сходится равномерно к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ непрерывна на M .
- I59. Привести пример сходящейся последовательности непрерывных функций, такой что предельная функция не является непрерывной.
- I60. (Трудная). Доказать, что функция, о которой говорится в предыдущей задаче, не может быть всюду разрывной.

Часть 6. Интеграл, производная, теория объёмов и площадей.

Интеграл. Определения.

1. Функция $y = C(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется ступенчатой, если на отрезке имеется конечное число точек a_i , таких что $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b$, и на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, k-1$) $C(x)$ равно константе C_i .

2. Интегралом от ступенчатой функции $C(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма $C_0 \cdot (a_1 - a_0) + C_1 \cdot (a_2 - a_1) + C_2 \cdot (a_3 - a_2) + \dots + C_{k-1} \cdot (a_k - a_{k-1})$.
Эта сумма обозначается $\int_a^b C(x) dx$.

3. Пусть $y = \phi(x)$ — функция, заданная на отрезке $[a, b]$, а $C(x)$ — ступенчатая функция, заданная на том же отрезке. $C(x)$ называется нижней ступенчатой функцией для $\phi(x)$, если на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $C(x) \leq \phi(x)$. Если при этом на каждом интервале (a_i, a_{i+1}) $C_i = \inf \phi(x)$ на этом интервале, то $C(x)$ называется нижней функцией Дарбу. Аналогично определяется верхняя ступенчатая функция и верхняя функция Дарбу.

4. Интеграл от нижней функции Дарбу называется нижней суммой Дарбу, интеграл от верхней функции Дарбу называется верхней суммой Дарбу.

5. Пусть $\phi(x)$ — функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Число m включаем в множество M , если m равно интегралу от некоторой нижней ступенчатой функции функции $\phi(x)$. Твг множества M называется нижним интегралом функции $\phi(x)$ на $[a, b]$; обозначение: $\int_a^b \phi(x) dx$. Твг множества интегралов от вер-

хних ступенчатых функций функции $\phi(x)$ называется верхним интегралом функции $\phi(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b \phi(x) dx$.

6. Если верхний и нижний интегралы совпадают, то функция называется интегрируемой на $[a, b]$ и верхний (он же нижний) интеграл называется просто интегралом и обозначается $\int_a^b \phi(x) dx$.

Упражнения на определение интеграла.

Пусть функция $\phi(x)$ определена на отрезке $[a, b]$.

- I. а). Для того, чтобы существовала хотя бы одна нижняя ступенчатая функция функции $\phi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\phi(x)$ была ограничена снизу на $[a, b]$.
- в). Для того, чтобы существовала нижняя функция Дарбу, необходимо и достаточно, чтобы функция была ограничена снизу.
- с). Для того, чтобы существовали нижний и верхний интеграл функции $\phi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\phi(x)$ была ограничена.
2. Нижний интеграл $\phi(x)$ на $[a, b]$ равен твг множества НСД (нижних сумм Дарбу) при всевозможных разбиениях отрезка $[a, b]$. Аналогично для верхних.
3. В определениях предыдущей страницы интеграл от ступенчатой функции определяется дважды: первый раз в пункте 2, второй раз - в пункте 6, где определяется интеграл для любой, в том числе ступенчатой функции. Доказать, что эти определения согласованы, то-есть доказать, что ступенчатая функция интегрируема (в общем смысле), что её интеграл (в смысле пункта 6) равен выражению, которое определяет интеграл от ступенчатой функции в пункте 2.
4. Если к разбиению добавить одну точку, то НСД не уменьшится, ВСД (верхняя сумма Дарбу) не увеличится.
5. Для любых двух разбиений А и В существует разбиение С такое, что $\text{НСД}(C) \geq \text{НСД}(A)$ и $\text{НСД}(C) \geq \text{НСД}(B)$.
6. На данном отрезке $[a, b]$ для данной функции $\phi(x)$ всякая $\text{НСД} \leq$ всякой ВСД .
7. Обозначим через НСД_k НСД, получающуюся при разбиении отрезка $[a, b]$ на k равных частей. Доказать, что $\text{твг } \text{НСД}_k = \text{твг } \text{НСД}$ по множеству всех разбиений.
Аналогично для ВСД .
8. Доказать, что интеграл не изменится, если функцию изменить в конечном числе точек.

Основные свойства интеграла.

Рассматриваются функции, заданные на некотором связном подмножестве M числовой прямой и ограниченные на каждом отрезке, входящем в это подмножество. Говоря о каком-либо интеграле, всегда предполагаем, что отрезок интегрирования целиком входит в множество M .

9. Доказать, что
$$\int_a^b (\phi(x) + \gamma(x)) dx \geq \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \gamma(x) dx.$$
 (Для верхних интегралов - обратное неравенство).

10. Доказать, что если функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма тоже интегрируема на отрезке $[a, b]$ и интеграл суммы функций равен сумме интегралов от них.

11. Если интегрируемую функцию умножить на константу C , то получится интегрируемая функция, и интеграл умножится на C .

12. Доказать для интегрируемой функции формулу:

$$\int_a^b \phi(x) dx + \int_b^c \phi(x) dx = \int_a^c \phi(x) dx.$$

Мы придадим смысл интегралу $\int_a^b \phi(x) dx$ также и в том случае, когда $b < a$:
$$\int_a^b \phi(x) dx = - \int_b^a \phi(x) dx.$$

Убедитесь в том, что формула предыдущей задачи верна при любых неравенствах между a , b и c .

13. Если растянуть ось x в k раз и преобразовать соответствующим образом пределы интегрирования, то интеграл

умножится на k :
$$k \cdot \int_a^b \phi(x) dx = \int_{ka}^{kb} \phi\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

Непосредственное вычисление интегралов.

Все задачи этого листка легко решаются с помощью теоремы Ньютона-Лейбница, рассматриваемой в дальнейшем. Но интересно, что многие интегралы можно вычислить до того, как развёрнута теория.

Этот листок (как и два предыдущих) можно решать ещё до теории непрерывных функций и пределов и в основном даже до задач, посвящённых элементарным функциям, сразу после части I настоящего сборника.

I4. Вычислить $\int_0^1 x \, dx$.

I5. Вычислить $\int_0^1 x^2 \, dx$.

I6. Вычислить $\int_0^1 x^3 \, dx$.

I7. В предыдущих трёх примерах вычислить интегралы в пределах от a до b .

I8. Вычислить $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ ($0 < a < b$) .

I9. Вычислить $\int_a^b x^k \, dx$.

20. Рассмотрим функцию $P(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Убедитесь в том, что функция $P(x)$ удовлетворяет функциональному соотношению $P(x)+P(y)=P(x \cdot y)$ и монотонна. Тогда, по задаче I52 (листок 54) $P(x) = \text{Лог } x$ (но пока неизвестно, по какому основанию).

21. Вычислить $\int_a^b e^x \, dx$.

Задачи о существовании интеграла.

22. Привести пример функции $\phi(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, ограниченной, и при этом неинтегрируемой на этом отрезке.
23. Привести пример таких двух функций, чтобы неравенство задачи 9 было строгим.

Определение. Функция $\phi(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется равномерно непрерывной на $[a, b]$, если для любого $\epsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для любых двух чисел x_1 и x_2 , входящих в область определения и таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| < \epsilon$.

24. Всякая функция, непрерывная на $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$.
25. Привести пример функции, непрерывной на всей числовой прямой, ограниченной и не равномерно непрерывной на всей прямой.
26. Доказать, что всякая функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и непрерывная на этом отрезке, интегрируема на нём.
27. Доказать, что функция, определённая на отрезке $[a, b]$, ограниченная и кусочно непрерывная, интегрируема на этом отрезке.
(Функция называется кусочно непрерывной на отрезке, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, на каждом из которых функция непрерывна).

Дополнительная.

28. (Трудная). Для того, чтобы функция $\phi(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, была интегрируема на нём, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a, b]$ и чтобы при этом для каждого $\epsilon > 0$ нашлась система (конечная или счётная) интервалов, покрывающая все точки разрыва функции $\phi(x)$ и такая, что сумма длин этих интервалов меньше ϵ .
(Про множество, которое обладает свойством, сформулированным здесь для множества точек разрыва, говорят, что оно имеет меру нуль.
Сумма бесконечного числа длин понимается как сумма ряда).

Теоремы об интегралах.

29. (Теорема о среднем). Пусть функция $\phi(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в каждой его точке. Тогда на этом отрезке найдётся такая точка x_0 , что

$$\int_a^b \phi(x) dx = \phi(x_0) \cdot (b-a).$$

30. Пусть функция $\phi(t)$ определена на некотором отрезке и интегрируема на нём. Рассмотрим интеграл как функцию его верхнего предела: $P(x) = \int_a^x \phi(t) dt$ (a и x принадлежат отрезку, на котором определена $\phi(t)$). Тогда $P(x)$ непрерывна во всех точках этого отрезка.

31. В условиях предыдущей задачи $P(x)$ имеет производную при всяком x , при котором $\phi(x)$ непрерывна. При этих x $P'(x) = \phi(x)$.

Дополнительные.

32. (Вторая теорема о среднем). Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции $\phi(x)$ и $p(x)$, причём $\phi(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $p(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\phi(x) \cdot p(x)$ тоже интегрируема на $[a, b]$ (на самом деле, по задаче 28, достаточно потребовать, чтобы $p(x)$ была интегрируемой), и $p(x) \neq 0$ при всех x . Тогда найдётся точка x_0 отрезка $[a, b]$ такая, что

$$\int_a^b \phi(x) \cdot p(x) dx = \phi(x_0) \cdot \int_a^b p(x) dx.$$

33. (Второе определение интеграла). Для того, чтобы число C было интегралом функции $\phi(x)$ от a до b , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что как бы отрезок $[a, b]$ ни был разбит на произвольное число N отрезков Δ_i (длина отрезка Δ_i обозначается через Δ_i) и как бы на этих отрезках ни были выбраны точки ξ_i , будет выполняться неравенство:

$$\Delta_1 \cdot \phi(\xi_1) + \Delta_2 \cdot \phi(\xi_2) + \dots + \Delta_N \cdot \phi(\xi_N) - C < \epsilon.$$

Задачи на определение производной.

При изучении производных обычно применяются некоторые специальные термины и обозначения. Если функция $y = \phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует $\phi'(x_0)$, то говорят, что $\phi(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Если она дифференцируема в каждой точке некоторого множества, то говорят, что она дифференцируема на этом множестве.

При рассмотрении производной в точке x_0 часто удобно переходить к новой переменной $\Delta x = x - x_0$ (Δx — единое обозначение для новой переменной, читается: дельта икс; Δx называется приращением аргумента. Тогда определение производной выглядит так: $\phi'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)}{\Delta x}$; разность $\phi(x_0 + \Delta x) - \phi(x_0)$ часто обозначается через Δy (дельта игрек); она называется приращением функции.

Задачи.

34. Если функция $y = \phi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.
35. Привести пример функции, которая определена в некоторой окрестности точки x_0 , непрерывна в точке x_0 , но не дифференцируема в ней.
36. Привести пример функции, которая дифференцируема в точке x_0 и во всех точках, кроме x_0 , разрывна.
37. Если функция $y = \phi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то найдутся такая окрестность I точки x_0 и такие две не-вертикальные прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку $(x_0, \phi(x_0))$, что для всякого x_1 из I , отличного от x_0 , точка $(x_1, \phi(x_1))$ лежит на вертикальной прямой $x = x_1$ между точками пересечения этой прямой с l_1 и l_2 .
38. Если $\phi'(x_0) > 0$, то существует окрестность I точки x_0 такая, что для всякого x , лежащего в этой окрестности справа от x_0 , $\phi(x) > \phi(x_0)$, а для всякого x , лежащего в I слева от x_0 , $\phi(x) < \phi(x_0)$.
39. Верно ли, что если $\phi'(x_0) > 0$, то найдётся окрестность точки x_0 , в которой функция $y = \phi(x)$ монотонно неубывает?
40. Привести пример функции $\phi(x)$, которая определена на всей прямой, имеет всюду производную, но $\phi'(x)$ не является непрерывной функцией (имеет точку разрыва; в этой точке $\phi'(x)$ тоже должна существовать).

Теоремы о производных.

41. Если функция $\phi(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, и всюду внутри него дифференцируема, то всюду внутри этого отрезка $\phi'(x) \geq 0$.
42. Если всюду внутри отрезка $[a, b]$ функция $\phi(x)$ дифференцируема, и $\phi'(x) \geq 0$, то $\phi(x)$ — монотонно возрастающая функция.
43. Будут ли верны утверждения двух предыдущих задач, если в первой из них заменить знак " $\geq$ " на " $>$ ", а во второй — наоборот?

Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $\phi(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для каждого x из этой окрестности, входящего в область определения $\phi(x)$, $\phi(x) \leq \phi(x_0)$.

44. Если функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , дифференцируема в точке x_0 и достигает в этой точке локального максимума, то $\phi'(x_0) = 0$.

Иными словами: если $\phi(x_0)$ — локально максимальное значение функции $\phi(x)$, то либо x_0 не есть внутренняя точка области определения функции $\phi(x)$, либо $\phi(x)$ не дифференцируема в точке x_0 , либо $\phi'(x_0) = 0$.

Аналогично для локально минимальных значений.

Верно ли, что если $\phi'(x_0) = 0$, то x_0 — точка локального максимума или локального минимума функции?

Задачи 41, 42 и 44 позволяют с помощью производных находить участки монотонного роста, участки монотонного убывания и максимальные и минимальные значения функции.

45. Если $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , и $\phi(a) = \phi(b)$, то на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что $\phi'(c) = 0$.

46. Если $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что

$$\frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a} = \phi'(c),$$

(то-есть найдётся касательная, параллельная хорде). Этот факт называется теоремой Лагранжа или формулой конечного приращения. Формулу эту часто записывают так: $\Delta y = \phi'(c) \cdot \Delta x$.

47. Если $\phi(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $\phi'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала, то $\phi(x)$ есть константа.
48. Производная пробегает все промежуточные значения. Точнее: если $\phi(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и в точках c и d этого интервала $\phi'(x)$ принимает значения M и N , то для всякого P , заключённого между M и N , найдётся точка p между c и d такая, что $\phi'(p) = P$.

Производные справа и слева.

Определение. Пусть функция $\phi(x)$ определена в некоторой правой полукрестности точки x_0 . Число A называется пределом функции $\phi(x)$ при x стремящемся к x_0 справа, если для любого положительного ϵ найдётся положительное δ такое, что для любого x , удовлетворяющего неравенствам $0 < x - x_0 < \delta$, выполняется неравенство $|\phi(x) - A| < \epsilon$. Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \phi(x) = A$.

Определение. Правой производной функции $\phi(x)$ в точке x_0 (обозначение: $\phi'_{\text{пр}}(x_0)$) называется предел отношения $\frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{x - x_0}$ при x стремящемся к x_0 справа.

Аналогично определяются предел слева и левая производная.

Задачи.

49. Для того, чтобы существовала производная функции $\phi(x)$ в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовали правая и левая производные в этой точке и они были равны.
50. Для правой производной сформулировать и доказать утверждение, аналогичное задаче 37 (листок 85).
51. Если функция $\phi(x)$ выпукла на интервале (a, b) , то в каждой точке этого интервала у неё есть правая и левая производные.
(Определение выпуклой функции см. в листке 56).
52. Точка x_0 называется точкой строгого локального максимума функции $\phi(x)$, если существует окрестность этой точки такая, что в каждой точке этой окрестности, кроме точки x_0 , $\phi(x) < \phi(x_0)$. Доказать, что для любой функции множество точек строгого локального максимума конечно или счётно.
53. Пусть функция $\phi(x)$ определена на интервале. Доказать, что множество точек, в которых правая и левая производные обе существуют, но не равны друг другу, конечно или счётно.
54. Построить функцию, которая непрерывна на отрезке, имеет всюду, кроме множества меры 0, производную, равную нулю, и при этом не является константой.
(определение множества меры 0 см. в листке 83).
55. Построить функцию, непрерывную на отрезке $[a, b]$, имеющую не интервале (a, b) ограниченную производную, но не имеющую правой производной в точке a .
56. Если в точке x_0 $\phi(x)$ непрерывна, справа от x_0 имеет производную, и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \phi'(x)$ существует, то $\phi'_{\text{пр}}(x_0)$ существует и равна этому пределу.

Дифференцирование операций.

57. Если функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то функция $\phi(x) + \gamma(x)$ дифференцируема в точке x_0 , и её производная равна $\phi'(x) + \gamma'(x)$. Аналогично для разности.
58. Если функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то функция $\phi(x) \cdot \gamma(x)$ дифференцируема в точке x_0 , и её производная равна $\phi'(x) \cdot \gamma(x) + \phi(x) \cdot \gamma'(x)$.
59. Если функции $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , и $\gamma(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{\phi(x)}{\gamma(x)}$ дифференцируема в точке x_0 , и её производная равна
$$\frac{\phi'(x) \cdot \gamma(x) - \phi(x) \cdot \gamma'(x)}{(\gamma(x))^2}.$$
60. Пусть функция $\Phi(x)$ представлена как сложная функция: $\Phi(x) = \Pi(\psi(x))$. Если $\psi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , $\Pi(y)$ дифференцируема в точке $\psi(x_0)$, то $\Phi(x)$ дифференцируема в точке x_0 , и $\Phi'(x_0) = \Pi'(\psi(x_0)) \cdot \psi'(x_0)$.
61. Если функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности I точки x_0 , имеет в точке x_0 производную, отличную от нуля, и существует обратная функция $\gamma(y)$, определённая в некоторой окрестности точки $y_0 = \phi(x_0)$ и имеющая все значения в I , то $\gamma(y)$ имеет в точке y_0 производную, и $\gamma'(y_0) = \frac{1}{\phi'(x_0)}.$

Дальше нам необходима формула $(e^x)' = e^x$ (в дополнительных задачах 136, 137 листка 76 в частности нужно было вывести эту формулу). Этот факт можно получить из задачи 113 (листок 73), которая там предлагалась в качестве дополнительной. Решить задачу 113 можно либо на основе комбинации рассуждений задач 110 (Листок 73) и 85, 86 (листок 70), либо с помощью задачи 129 (листок 51). Во всех случаях для проведения этих рассуждений нужно уже в какой-то степени изощрённое владение типичными конструкциями математического анализа. Если вы пока не в состоянии пройти ни по одному из путей, ведущих к формуле $(e^x)' = e^x$, примите её на веру и используйте в дальнейшем.

62. Найти $(\ln x)'$ ($x > 0$). (Задача 138, листок 76).
63. Найти $(a^x)'$ ($a > 0$, x любое). (Задача 137, листок 76).
64. Найти $(x^a)'$ ($x > 0$, $a \neq 0$).

Для нахождения производной от выражения, содержащего степень, применяют следующий приём: $a(x)^{\psi(x)} = e^{\psi(x) \cdot \ln a(x)}$, и задача свелась к вычислению $(e^x)'$, $(\ln x)'$ и применению задач 58 и 60.

Таблица производных.

Вывести следующие формулы (или вспомнить их вывод):

$$65. \begin{aligned} (x^k)' &= kx^{k-1} \quad (k \text{ целое, отличное от } 0). \\ (x^a)' &= ax^{a-1} \quad (a \neq 0, x \neq 0). \\ (\sqrt[k]{y_x})' &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{y_x^{k-1}}} \quad (k \text{ целое нечётное, } x \text{ любое } \neq 0). \end{aligned}$$

$$66. \begin{aligned} (e^x)' &= e^x. \\ (a^x)' &= a^x \cdot \ln a \quad (a \neq 0). \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$67. \begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x. \\ (\cos x)' &= -\sin x. \\ (\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}. \\ (\operatorname{Ktg} x)' &= \frac{-1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$68. \begin{aligned} (\operatorname{аркСин} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \\ (\operatorname{аркКос} x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \\ (\operatorname{аркТг} x)' &= \frac{1}{1+x^2}. \\ (\operatorname{аркКтг} x)' &= \frac{-1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Исследование на монотонность.

Построить графики следующих функций (с нахождением участков монотонности и локальных максимумов и минимумов).

$$69. \phi(x) = 2+x-x^2.$$

$$70. \phi(x) = 3x-x^3.$$

$$71. \phi(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$72. \phi(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+100} \quad (x \geq 0).$$

$$73. \phi(x) = x + \sin x.$$

$$74. \phi(x) = x + \sqrt{\sin 2x}.$$

$$75. \phi(x) = \cos \frac{\pi}{x}.$$

$$76. \phi(x) = x^k \cdot e^{-x} \quad (k \geq 0, x \geq 0).$$

$$77. \phi(x) = x \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right).$$

78. Доказать, что многочлен есть при достаточно большом x монотонная функция.

$$79. \phi(x) = 2x - \operatorname{Tg} x.$$

$$80. \phi(x) = \operatorname{arctg} x - x.$$

$$81. \phi(x) = \operatorname{arcsin} x - x.$$

Связь с интегралом.

Пусть функции $\phi(x)$ и $P(x)$ определены на некотором связном подмножестве M числовой прямой (интервале, полу-прямой и т.п.). Функция $P(x)$ называется первообразной функции $\phi(x)$, если в каждой точке множества M $P(x)$ дифференцируема и $P'(x) = \phi(x)$.

82. Если $P(x)$ и $\Pi(x)$ - две первообразные одной и той же функции $\phi(x)$, определённой на связном подмножестве M числовой прямой, то $P(x) - \Pi(x)$ есть постоянная.

83. $P(x)$ называется обобщённой первообразной функции $\phi(x)$, если $P(x)$ непрерывна всюду, дифференцируема всюду, кроме множества точек, конечного на каждом интервале, и всюду, где она дифференцируема, $P'(x) = \phi(x)$.

Сделать предыдущую задачу для обобщённых первообразных.

84. (Формула Ньютона-Лейбница). Если $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $P(x)$ - первообразная $\phi(x)$, то

$$\int_a^b \phi(x) dx = P(b) - P(a) .$$

Указание. Воспользоваться задачей 3I листка 84.

85. Обобщить предыдущую теорему на случай, если множество точек разрыва функции $\phi(x)$ конечно на каждом интервале ($\phi(x)$ ограничена).

Дополнительные.

86. (Формула замены переменных). Пусть функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $g(t)$ дифференцируема на отрезке $[c, d]$, монотонно возрастает, $g'(t)$ непрерывна, и $g(c) = a$, $g(d) = b$. Тогда

$$\int_a^b \phi(x) dx = \int_c^d \phi(g(t)) \cdot g'(t) dt .$$

87. Обобщить предыдущую задачу на случай, когда $g(t)$ немонотонна, но отрезок $[c, d]$ распадается на конечное число участков, на которых $g(t)$ монотонна.

88. (Формула интегрирования по частям). Если функции $\phi(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и $\phi'(x)$ и $g'(x)$

непрерывны, то $\int_a^b \phi(x) g'(x) dx = (\phi(b)g(b) - \phi(a)g(a)) - \int_a^b g(x) \phi'(x) dx$.

Таблица первообразных.

Первообразную функции $\phi(x)$ принято записывать как интеграл без указания пределов (и называть неопределённым

интегралом), например: $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Найти первообразную для функций:

89. x^a ($x > 0$, $a \neq -1$).

90. $\frac{1}{x}$ в области $x > 0$ и в области $x < 0$.

91. $\frac{1}{1+x^2}$.

92. Проверить, что $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$.

93. Найти первообразную для функции: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

94. Проверить, что $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$.

Найти первообразные для функций:

95. a^x ($a > 0$).

96. $\sin x$, $\cos x$.

97. $\frac{1}{\sin^2 x}$, $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Исследование на выпуклость.

Второй производной $\phi''(x)$ функции $\phi(x)$ называется производная от функции $\phi'(x)$. $(k+1)$ -й производной называется производная от k -той производной.

98. Если всюду на интервале (a, b) $\phi''(x) > 0$, то $\phi(x)$ выпуклая на этом интервале.
(Определение выпуклости см. в листке 56).

Точкой перегиба графика называется такая точка, в которой участок выпуклости граничит с участком вогнутости.

Построить графики следующих функций (найти участки монотонности, минимумы и максимумы, участки выпуклости и вогнутости и точки перегиба; встречающиеся при этом уравнения разрешается решать приближённо с такой точностью, чтобы уловить характер графика).

99. $3x^2 - x^3$.

100. $x + \sqrt[3]{x^5}$.

101. $\sqrt{1+x^2}$.

102. $x + \sin x$.

103. e^{-x^2} .

104. $\ln(1+x^2)$.

105. $x \sin(\ln x)$ ($x > 0$).

106. x^x ($x > 0$).

107. Сколько решений имеет уравнение $2^x = x^{100}$?

Задачи про гладкие кривые.

Если функции $x=\phi(t)$, $y=\gamma(t)$, параметрически задающие кривую, дифференцируемы, причём производные не равны нулю одновременно, то такая кривая называется гладкой. Вектор с проекциями $\phi'(t)$, $\gamma'(t)$ есть вектор касательной. Если t интерпретировать как время, то вектор касательной имеет физический смысл скорости. Разумеется, каждую гладкую кривую можно проходить с разной скоростью. Это соответствует различным способам параметрического задания одной и той же кривой.

Гладкая кривая называется замкнутой, если её начальная и конечная точки совпадают, и начальный и конечный вектор касательной совпадают. Можно считать, что замкнутая гладкая кривая есть образ окружности при отображении, которое задаётся дифференцируемыми (на окружности) функциями.

108. Если $\phi(t)$ и $\gamma(t)$ имеют непрерывные производные, не обращаются в нуль одновременно при t , принадлежащем отрезку $[a, b]$, то отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число участков таких, что часть кривой, соответствующая каждому участку, представляет собой либо график функции $y=p(x)$, либо график функции $x=c(y)$ (либо и то и другое вместе).

109. Если гладкая кривая, заданная параметрически, соединяет две различные точки плоскости A и B , то на кривой найдётся точка, в которой касательная параллельна отрезку AB .

Аналитическая формулировка:

Если $\phi(t)$ и $\gamma(t)$ — две дифференцируемые функции, определённые на отрезке $[a, b]$, причём их производные не обращаются в нуль одновременно, и $\gamma(a) \neq \gamma(b)$, то найдётся такое число C из отрезка $[a, b]$, что

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\gamma(b)-\gamma(a)} = \frac{\phi'(C)}{\gamma'(C)}.$$

Указание. Если вы будете делать эту задачу в геометрической формулировке, не забывайте, что мы не формулировали геометрического определения касательной. Но вы можете построить "опорную прямую" — прямую, которая имеет хотя бы одну общую точку с кривой, параллельна заданному направлению, и вся кривая лежит от неё по одну сторону.

110. (Правило Лопиталя). Если $\phi(x)$ и $\gamma(x)$ — бесконечно малые при x стремящемся к x_0 , $\phi'(x)$ и $\gamma'(x)$ не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки x_0 , кроме самой точки x_0 , и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi'(x)}{\gamma'(x)}$, то существует и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\phi(x)}{\gamma(x)}$, и эти пределы равны.

Формула Тейлора.

III. Дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$. Доказать, что коэффициенты многочлена связаны со значениями производных этого многочлена в точке 0 формулой $a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$ (здесь через $P^{(n)}(x)$ обозначена n -ая производная функции $P(x)$; сама функция считается нулевой производной).

Пусть функция $\phi(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (в этом листке всегда подразумевается, что x берётся из этой окрестности) и имеет в этой окрестности производные до $k-1$ -го порядка включительно, а в самой точке x_0 ещё и производную k -того порядка. Тогда можно написать:

$$\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{\phi'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\phi''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r(x).$$
 Эта формула бессодержательна, если ничего не утверждается относительно $r(x)$ (функция $r(x)$ равна просто разности между $\phi(x)$ и остальными членами правой части).

II2. Доказать, что $r(x)$ является бесконечно малой при x стремящемся к x_0 , причём её порядок более высокий, чем $(x-x_0)^k$.

Указание: многократно воспользоваться правилом Лопиталя для вычисления предела отношения $\frac{r(x)}{(x-x_0)^k}$. Если вам поможет более сильное предположение, что $\phi^{(k)}(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0 , воспользуйтесь сначала этим предположением, а затем сделайте задачу в общем виде.

II3. Если $\phi^{(k)}(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 , то для каждого x из этой окрестности найдётся $y(x)$, который лежит между x_0 и x , такой что $\phi(x) = \phi(x_0) + \frac{\phi'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{\phi^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} + \frac{\phi^{(k)}(y(x))}{k!}(x-x_0)^k$.

(Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

Указание: Написать эту формулу для функции $\phi^{(k-1)}(x)$:

$\phi^{(k-1)}(x) = \phi^{(k-1)}(x_0) + \phi^{(k)}(y(x)) \cdot (x-x_0)$ (это есть формула конечных приращений), убедиться из этой формулы, что

$\phi^{(k)}(y(x))$ есть непрерывная и ограниченная, а потому интегрируемая функция от x , проинтегрировать обе части в пределах от x_0 до x и воспользоваться второй теоремой о среднем. Всю эту процедуру проделать $k-1$ раз.

II4. Доказать, что $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

(сходимость и равенство имеют место при любых x).

II5. Аналогично, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Дифференциальные уравнения.

Областью на плоскости называется любое открытое связное множество. (Открытым называется такое множество, что если точка M входит в него, то и некоторый круг с центром в точке M целиком входит в него; связным называется такое множество, что любые две его точки можно соединить внутри множества ломаной).

Пусть на области Γ задано поле направлений. Это значит, что каждой точке поставлено в соответствие направление. Направлением называется класс параллельных между собой прямых (так что направления, например, вверх и вниз не различаются). Поле направлений можно задавать формулой вида:

$\frac{dy}{dx} = \frac{\Phi(x,y)}{P(x,y)}$, где $\Phi(x,y)$ и $P(x,y)$ - две функции двух переменных, определённые в области Γ и не обращающиеся в нуль одновременно. Эту формулу нужно понимать так: если в некоторой точке знаменатель отличен от 0, то правая часть есть тангенс угла между осью x и любой прямой этого направления. Если же знаменатель равен нулю, то направление вертикально. Мы будем рассматривать непрерывное поле направлений, которое можно определить, например, тем, что $\Phi(x,y)$ и $P(x,y)$ - непрерывные функции двух переменных.

Гладкая кривая называется интегральной кривой поля направлений, если в каждой точке её вектор касательной имеет направление, соответствующее этой точке (направление вектора мы не отличаем от противоположного направления).

Решить дифференциальное уравнение (дифференциальным уравнением называется вышеприведённая запись поля направлений) - значит найти все интегральные кривые поля направлений. В типичном случае этих кривых бывает бесконечно много. Если известно, что интегральная кривая должна пройти через некоторую фиксированную точку, то такие добавочные сведения обычно позволяют из бесконечного множества интегральных кривых выделить одну кривую. В следующем листке вам предлагаются в виде задач точные теоремы на этот счёт.

По задаче 108 листка 94, вся интегральная кривая представляется в виде суммы участков, каждый из которых есть либо график функции от x , либо график функции от y .

Если дифференциальное уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx} = \Phi(x,y)$, где $\Phi(x,y)$ - непрерывная функция двух переменных, то вся интегральная кривая есть график функции от x . В этом случае определение интегральной кривой принимает вид:

Решением дифференциального уравнения $y' = \Phi(x,y)$ называется такая функция $y = p(x)$, что при каждом x из её области определения $p'(x) = \Phi(x, p(x))$.

Задачи на дифференциальные уравнения.

- II6. Найти все решения уравнения: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ (область Γ - вся плоскость, кроме точки $(0,0)$).
- II7. Привести пример уравнения вида $y' = \phi(x, y)$ с непрерывной правой частью, такого что существуют два решения $p_1(x)$ и $p_2(x)$, проходящие через одну и ту же точку и не совпадающие.
- II8. Пусть функция $\phi(x, y)$ обладает следующим свойством: существует константа K такая, что для любых x , y_1 и y_2 таких, что точки (x, y_1) и (x, y_2) входят в Γ , выполняется неравенство

$$|\phi(x, y_1) - \phi(x, y_2)| \leq K \cdot |y_1 - y_2|;$$
(считайте для простоты, что Γ есть квадрат).
Тогда через любую точку области Γ проходит не более чем одно решение уравнения $y' = \phi(x, y)$.
- II9. Решить уравнение: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (Γ - вся плоскость, кроме точки $(0,0)$).
- I20. Решить уравнение: $y' = y$ (Γ - вся плоскость).
- I21. (Теорема существования). Пусть Γ - квадрат, $\phi(x, y)$ непрерывна на Γ , $M(x_0, y_0)$ - внутренняя точка Γ . Тогда существует окрестность точки x_0 такая, что в ней определена функция $y = p(x)$, удовлетворяющая уравнению $y' = \phi(x, y)$ и проходящая через точку M .

Указание. Рассмотрим некоторую правую полуокрестность точки x_0 . Функция $y = v(x)$, проходящая через точку $M(x_0, y_0)$, называется "верхней", если в каждой точке этой полуокрестности $v'(x) \geq \phi(x, v(x))$. Верхние функции существуют. Теперь для каждого x этой полуокрестности определим число $t(x)$ как тнг значений всех верхних функций в этой точке.

Определение площади и объёма.

Определение площади.

1). Пусть на плоскости выбрана декартова система координат, в частности, выбрана единица длины.

2). Для каждого натурального числа p возьмём число $D = \frac{1}{2^p}$.

Проведём все прямые $x=kD$ и $y=kD$, где k - любое целое число. Этим плоскость разбивается на квадраты со стороной D . Площадь такого квадрата называется числом D^2 . Всякая конечная система таких квадратов при данном p называется элементарной фигурой (квадраты считаются замкнутыми). Площадь элементарной фигуры называется сумма площадей составляющих её квадратов.

3). Пусть A - ограниченное множество на плоскости. Верхней площадью A называется точная нижняя грань площадей всевозможных элементарных фигур, целиком покрывающих фигуру A .

4). Нижней площадью фигуры A называется точная верхняя грань площадей элементарных фигур, целиком содержащихся в A .

5). Если верхняя и нижняя площади фигуры A совпадают, то фигура A называется квадратуемой, а верхняя и нижняя площади её называются площадью фигуры A .

Определение объёма в точности повторяет определение площади. Нужно только все двумерные понятия заменить на соответствующие трёхмерные (плоскость заменить пространством, квадраты - кубами, объёмом куба называть куб его длины, слово "кватуруемость" заменить на "кубуруемость" и слово "площадь" - на "объём").

Точка x входит в границу множества M , если любая окрестность точки x содержит точку из M и точку из дополнения M (окрестностью в пространстве называется любой шар, содержащий нашу точку). Границей множества называется множество точек границы множества.

Квадрируемость и кубируемость.

Исходя из определений предыдущей страницы можно доказать все обычные свойства площади и объёма ограниченного множества (только такие мы рассматриваем); этому посвящены листки 97-99. Но пока эти свойства не доказаны, нужно иметь в виду, что

- 1). Площадь элементарной фигуры имеет два определения, и пока не доказано, что они приводят к одному числу;
 - 2). Не доказано, что площадь квадрата, не являющегося элементарной фигурой, равна квадрату его стороны;
 - 3). Не доказано, что площади равных фигур равны, в частности не доказано, что площадь не меняется при повороте фигуры.
- (Аналогичное замечание для объёмов).

Задачи.

- I22. Доказать, что верхняя площадь любого отрезка равна 0. Верхний объём любого плоского прямоугольника в пространстве равен 0. (Тем самым отрезок на плоскости квадрируем, прямоугольник в пространстве кубируем).
- I23. Если прямоугольник (прямоугольный параллелепипед) является элементарной фигурой (то-есть должным образом расположен), то он квадрируем (кубируем), два определения площади (объёма) для него приводят к одному числу, и его площадь (объём) есть произведение длин его сторон.
- I24. Если стороны прямоугольника параллельны координатным осям, то он квадрируем, и его площадь равна произведению его сторон. Аналогичное утверждение про объём параллелепипеда.
- I25. Элементарная фигура квадрируема (кубируема), и два определения её площади (объёма) приводят к одному числу.
- I26. Для любого множества нижняя площадь (объём) не превышает верхней площади (объёма).
- I27. Придумать плоское множество, у которого верхняя и нижняя площадь не равны.
- I28. Для того, чтобы множество было квадрируемо, необходимо и достаточно, чтобы верхняя площадь его границы была равна нулю. Аналогично для объёмов.
- I29. Верхняя площадь дуги окружности равна нулю. Верхняя площадь графика непрерывной функции, заданной на отрезке, равна нулю (при любой ориентации графика относительно осей).
- I30. Докажите равенство нулю верхних объёмов ограниченного куска плоскости, сферы, ограниченной конической поверхности.

Тем самым квадрируемы (кубируемы) сами эти множества и множества, для которых они служат границей.

Теоремы об объёмах и площадях.

- I31. Пусть A и B — два непересекающиеся множества. Доказать, что сумма нижних площадей A и B не больше, чем нижняя площадь их объединения, сумма верхних площадей не меньше, чем верхняя площадь объединения.
Аналогично для объёмов.
- I32. Привести пример таких множеств, чтобы в предыдущей задаче имели место строгие неравенства.
- I33. Если A и B — два непересекающихся квадратуемых множества, то их объединение есть квадратуемое множество, и его площадь равна сумме площадей A и B .
Аналогично для объёмов.
- I34. Площадь (объём) фигуры не меняется в результате параллельного переноса этой фигуры.
- I35. Если квадратуемая фигура разбита прямой на две части A и B , затем A и B как-то параллельно перенесены (не одинаково) так что получились фигуры A' и B' соответственно, причём общая часть A' и B' имеет площадь, равную нулю, то фигура, состоящая из A' и B' , тоже квадратуема, и её площадь равна площади первоначальной фигуры.
Аналогично для объёмов трёхмерных фигур.
- Операция получения новой фигуры описанным методом называется переслаиванием.
- I36. Пусть на плоскости дан квадрат Q со стороной a , причём его стороны не параллельны осям. Тогда с помощью операции переслаивания, проведённой несколько раз, можно из него получить прямоугольник со сторонами, параллельными осям, причём произведение сторон этого прямоугольника равно квадрату числа a .
- Отсюда следует, что площадь любого квадрата со стороной a равна a^2 . Аналогичная теорема для куба сложнее (см. I39, I40).
- I37. Площади двух равных фигур на плоскости равны.
- I38. Если плоскость растянуть (сжать) в каком-либо направлении в k раз, то все квадратуемые фигуры останутся квадратуемыми, и их площадь увеличится (уменьшится) в k раз.
- I39. Если C — прямоугольный параллелепипед с ребром a , не перпендикулярным и не параллельным плоскости xOy , и такой, что проекция a на ось z больше удвоенной диагонали его поперечного сечения (т.е. сечения, перпендикулярного к a), то существует горизонтальная плоскость (параллельная xOy), которая пересекается с C по параллелограмму, причём площадь его во столько раз больше площади поперечного сечения C , во сколько раз a больше своей проекции на ось z .
- I40. Любой куб с ребром a переслаивается в параллелепипед с параллельными осям сторонами, произведение которых $= a^3$.
- I41. Объёмы равных пространственных фигур равны.

Применение интегралов.

I42. Непосредственно применяя определение площади, вычислить площадь круга радиуса r .

I43. Если плоская фигура S ограничена отрезком $[a, b]$ числовой оси, графиком положительной непрерывной функции $f(x)$, определённой на этом отрезке, и вертикальными прямыми, проходящими через точки a и b , то эта фигура квадратуема, и её площадь равна интегралу функции $f(x)$ в пределах от a до b .

Для вычисления объёмов необходимо определить интеграл от функции двух переменных $z=f(x,y)$ по области S . Это определение можно строить так:

Пусть область S как-то разбита на конечное число квадратуемых частей $ch, ch_2, \dots, ch_k$ (площади этих частей обозначим соответственно через $ch, ch_2, \dots, ch_k$). Функция, которая на каждой такой части постоянна, и её значение P_i на ней не больше тнг значения $f(x,y)$ на этой (и-той) части, называется нижней функцией. Интегралом от нижней функции называется число $P_1 \cdot ch_1 + P_2 \cdot ch_2 + \dots + P_k \cdot ch_k$. Тнг интегралов всех нижних функций при всевозможных разбиениях S называется нижним интегралом функции $f(x,y)$. Аналогично определяется верхний интеграл. Если нижний и верхний интеграл совпадают, то функция называется интегрируемой, а её нижний (он же верхний) интеграл называется интегралом от этой функции по области S . Обозначение: $\int_S f(x,y) dS$.

I44. Доказать, что пространственная фигура, ограниченная квадратуемой областью S плоскости, непрерывной положительной функцией, заданной на S , и вертикальной цилиндрической поверхностью, состоящей из вертикальных прямых, проходящих через границу S , кубатуема, и её объём равен $\int_S f(x,y) dS$.

I45. Вывести формулу для объёма прямого кругового конуса с основанием, площадь которого равна S и высотой H .

I46. Доказать, что объём полушара радиуса R равен

$$\int_0^R 2\pi \sqrt{R^2 - r^2} dr. \quad (\text{Указание: сравнить определение}$$

интеграла функции двух переменных и интеграла функции одного переменного).

I47. Доказать, что объём шара равен $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r - радиус).

Одобрено методическим
объединением учителей математики
школы №179 ЧР ун-з р-на Аурокский