Исследовательские туры Всесоюзной математической олимпиады

А. О. Аллеманд, А. Я. Канель-Белов,
А. А. Оноприенко, А. Л. Семёнов

Введение

Математическое образование школьников, шедшее в кружках, олимпиадах, матклассах и т. п. в СССР и России, является важнейшим образовательным и общецивилизационным явлением, значение которого шире, чем математика. Мы уверены, что его история ещё многое даст нам в будущем. Поэтому важны и попытки эту историю собрать и зафиксировать (см., например, [1]). Возможности для этого сокращаются: к примеру, воспоминания о знаменитых кружках Давида Шклярского (например, [2]) скудны и разрознены, все участники его кружков уже умерли. Ещё не поздно собрать воспоминания о Вечерней математической школе, дополняющие рассказ её создателя — Е. Б. Дынкина [3]. Мы обращаемся к читателям с просьбой присылать свои воспоминания, пусть неполные и обрывочные.

Исследовательская деятельность школьников

В настоящей работе мы рассматриваем феномен исследовательского тура Всесоюзной математической олимпиады (ВМО) как одной из успешных попыток введения исследовательской математической деятельности в образование школьников. При этом в последней части статьи мы приводим все задачи этого тура. Тур в своей полной реализации проводился на ВМО трижды в 1970-е гг. и считался успешным, но больше к нему Олимпиада не возвращалась.

Прежде чем переходить к основной теме статьи, обратимся к истокам олимпиадного движения в СССР.

Начнём с того, что само появление олимпиад и кружков в нашей стране в середине 1930-х гг. было вызвано желанием сильнейших математиков — представителей Санкт-Петербургской (Ленинградской) и Московской математических школ — организовать поиск талантливых школьников, их поддержку, в дальнейшем — продолжение учёбы в университете и выбор профессии. Для этого нужно было найти учащихся, которые могут, а главное — хотят решать не «школьные» задачи, где ход решения уже задан учителем и учебником, а задачи, которые неизвестно, как решать — нестандартные, неожиданные (в современной англоязычной терминологии — challenging, см. [4]). Кружковая модель, а тем самым и исследовательская модель деятельности, затем легли в основу работы математических школ и классов (см. [5]).

Об атмосфере первых московских математических олимпиад можно узнать из предисловия к книге [6], советуем сравнить с современностью.

Исследовательская задача зачастую требует нескольких месяцев размышлений, в то время как на олимпиаду даётся несколько часов. При этом для решения трудных задач в условиях олимпиады требуется опыт их решения в течение долгого времени. Приобретению такого опыта может помочь задачник «Математического просвещения». По мотивам задачника был напечатан ряд статей. В частности, первая публикация Петера Шольце [7] (ныне филдсовский лауреат и директор института Макса Планка), с которым один из авторов статьи познакомился при подготовке команды Германии на международную олимпиаду школьников, была опубликована в нашем сборнике «по мотивам задачника» [8] и представляет собой вполне качественное исследование. Хорошее приближение к глобальной теме исследовательской деятельности школьников можно найти в книге [9].

Мы видим, что между решением олимпиадной задачи и решением открытой математической проблемы может и не быть чёткой границы. А. Н. Колмогоров говорит об этом так: «…вовсе не существует непроходимой стены между самими новыми и трудными оригинальными математическими исследованиями и решением задач, доступных способному и достаточно упорному начинающему математику» [10]. Специфика состоит скорее в условиях, в которых работает учащийся на олимпиаде, и его психологических установках. Эти вопросы рассматриваются в работе [11]. Формат проектно-исследовательской деятельности учащихся и её публичного представления и признания, в том числе как содержательной альтернативы олимпиадам, рассматривается в работах [12, 13].

Разного рода негативные тенденции на олимпиадах, их спортивный перекос делают другие формы исследовательской деятельности школьников всё более актуальными. Мы рассматриваем именно попытку преодолеть известные недостатки олимпиад, «сдвинуть» олимпиады в «исследовательское направление». Замечательно, что осмысленность такой попытки была осознана уже при самом зарождении олимпиад. В предисловии к книге Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго [14] говорится о первой Московской математической олимпиаде: «Любопытен был выбор задач второго тура первой олимпиады (1935 год). Были предложены три серии задач A, B, и C. Как сказал нам А. Н. Колмогоров, это было сделано по его инициативе, чтобы дать возможность проявить себя ученикам с разным складом математического мышления: вычислительным (или „алгоритмическим“), геометрическим, комбинаторно-логическим» [14, с. 6]. Заметим, что идею о разных типах математического мышления А. Н. Колмогоров высказывал неоднократно, см., например [10]. Таким образом, Колмогоров предусмотрел для участников возможность выбора одного из трёх «потоков» заданий.

В последующих Московских математических олимпиадах эта идея не получила продолжения. Однако к ней вернулись руководители Всесоюзной математической олимпиады, предложив в 1971 году провести во второй день олимпиады «исследовательский тур». Вот каковы были особенности этого тура.

- Одна задача разбивается на последовательность подзадач, обычно соответствующих повышению количественной сложности и общности рассматриваемого утверждения. Это соответствует работе математика, который пытается найти наиболее общую и сильную формулировку решаемой проблемы, получаемого результата.
- Участник тура имеет возможность выбора двух из трёх задач или может остановиться на одной. Это соответствует, в частности, положению Колмогорова о разных видах математического интеллекта.
- Время для обдумывания и записи решения на исследовательском туре больше, участник записывает своё продвижение всего в одном или двух направлениях.

Обсуждаемое сближение олимпиадной и исследовательской деятельности представлялось далеко не пустой затеей. Дело в том, что у многих математиков, причастных к математическим соревнованиям, справедливо возникало представление о слабой корреляции олимпиадных успехов и результативности дальнейшей работы математика-исследователя. Безусловно, абсолютное большинство победителей и призёров Всероссийской олимпиады было достойно продолжения образования в лучших университетах страны. Но опасение состояло в том, что учащиеся, более перспективные в смысле продолжения научной работы в области математики, могли участвовать в олимпиадах менее успешно, оказаться за границей приоритетного поступления в вузы и потерять уверенность в своих силах. Поэтому дополнительное сближение олимпиадной деятельности с исследовательской и представлялось важным.

Инициаторами исследовательского тура стали руководители жюри Пятой ВМО в 1971 г. Я. М. Барздинь (ученик А. Н. Колмогорова) и М. И. Башмаков (ученик З. И. Боревича), сыгравший ключевую роль в создании ленинградских матшкол. Исследовательский тур был организован для учащихся выпускного 10 класса. Элементы исследовательского тура были и в задачах 8-го, тоже выпускного для основной школы, после которого учащиеся, в частности, выбирали путь поступления в математический класс, интернат и т. п. В следующий раз частичный аналог исследовательского тура прошёл в 1975 г., там задача разбивалась на последовательность этапов и, насколько нам известно, участникам не предлагалось выбрать для решения только одну задачу из нескольких. В 1976 г. схема исследовательского тура 1971 года была повторена для 8, 9 и 10 классов. В 1977 г. исследовательский тур был только в 10 классе. Сегодня трудно сказать, почему исследовательский тур не получил дальнейшего развития в олимпиадах.

Представленность исследовательской математики в олимпиадах определялась в частности тем, что в жюри ВМО под председательством А. Н. Колмогорова входили математики высокой квалификации, некоторые из них — с мировым именем, большинство — со значительным опытом работы со школьниками. Среди них: В. Б. Алексеев, В. М. Алексеев, Я. М. Бардзинь, М. И. Башмаков, А. Д. Бендукидзе, А. А. Берзиньш, И. Н. Бернштейн, Н. Б. Васильев, Г. А. Гальперин, А. Г. Гейн, М. Л. Гервер, В. Л. Гутенмахер, М. С. Дубсон, А. А. Егоров, А. Н. Земляков, Б. М. Ивлев, Ю. И. Ионин, И. Н. Клумова, Н. Н. Константинов, А. В. Кочергин, А. Г. Кушниренко, Ю. П. Лысов, С. А. Мазуров, Е. А. Морозова, А. И. Плоткин, Ж. М. Раббот, Н. Х. Розов, А. П. Савин, М. И. Серов, В. А. Скворцов, А. Б. Сосинский, А. К. Толпыго, Г. А. Тоноян, С. А. Тресков, С. В. Фомин, Г. Ш. Фридман, Д. Б. Фукс, В. М. Харламов, Г. Н. Яковлев. Сам А. Н. Колмогоров исполнял свои обязанности председателя жюри лично, приезжая на заключительный тур.

Традиция участия сильных математиков в составлении задач, организации проверки работ и выделения победителей в ВМО была свёрнута по инициативе Министерства образования СССР в 1979 г. В частности, от руководства Олимпиадой был отстранён А. Н. Колмогоров. Из жюри был исключён лидер всего движения олимпиад, кружков и матклассов Н. Н. Константинов и т. д.

Это подтолкнуло Н. Н. Константинова к выдвижению и реализации идеи соревнования, которое бы в максимально возможной степени соответствовало главной цели Олимпиады — привлечению учащихся, которым интересна математика, но при этом было бы, по возможности, свободно от «спортивных» недостатков Олимпиады [15, 16]. Это новое соревнование было даже названо не олимпиадой, а турниром — Турниром городов. Слово «город» тоже появилось не случайно: участники Турнира боролись не за своё личное достижение, а обеспечивали своему городу место в рейтинге Турнира.

В Турнире также была реализована идея выбора учащимся того, какие задачи он будет решать, «в зачёт» шло ограниченное их количество.

Следующим шагом стала Летняя конференция Турнира городов — научный семинар или школа, где реализованы и усилены достоинства исследовательского тура (см. [17]). Здесь участнику-школьнику предоставляется уже существенный выбор: Летняя конференция начинается с вводных лекций для каждого из проектов школы. Ограничение по времени с часов заменяется на дни. Есть возможность коллективной работы, приветствуется обсуждение своего исследования с руководителями проекта. В каждом проекте присутствует последовательность задач, возможно, доходящая и до открытых проблем «взрослой» математики. Основными отличиями работы школьника от реальной научной работы студента или профессионального математика являются необходимый объём специальных математических знаний по данному проекту и продолжительность проекта. И в том, и в другом отношении проект обычно находится «где-то между» олимпиадной задачей и «взрослой» математической проблемой.

Традиция Летней конференции в последние годы была поддержана проектными сменами в «Сириусе» [18–21], обсуждение см., например, в [22]. Инициатором проектных смен был С. К. Смирнов (он также руководил проектом 1 «Как вода точит камень» `https://sochisirius.ru/uploads/2021/06/math_iikt_0521_Kak_voda_kamen'_tochit_tasks.pdf`). Большой вклад в их организацию внёс В. А. Тиморин (также он был руководителем программы на первой смене 2021 года). Но все эти реализации парадигмы исследовательской деятельности учащихся заслуживают отдельной публикации.

В заключение этого беглого обзора заметим, что благодаря цифровым технологиям сама по себе исследовательская модель работы школьника может быть распространена с деятельности «одарённого», высоко мотивированного учащегося на массовую школу. Более того, сегодня эта модель приобретает первостепенное значение для всего образования и жизни учащегося за пределами математики (см. [23]).

Авторы задач, для которых нам удалось выяснить авторство, указаны в скобках после номера задачи. Некоторым задачам посвящены отдельные статьи в журнале «Квант», в таких случаях ссылки приведены после номера задачи. Исследовательский тур, или тур с исследовательскими задачами, всегда проводился во второй день олимпиады, мы это далее специально не отмечаем.

Задачи

1971 год

В 1971 году на втором туре председатель жюри Я. М. Барздинь и его заместитель М. И. Башмаков предложили устроить в 10 классе исследовательский тур: участник должен был выбрать из трёх задач одну, наиболее ему интересную, и в этой задаче постараться получить возможно более сильный результат, посвятив все пять часов её решению [24]. Этот эксперимент, одобренный А. Н. Колмогоровым, прошёл весьма успешно. Интересно, что в двух задачах 8 класса также прослеживались элементы исследовательского тура, однако, насколько нам известно, там не предлагалось решать задачу «на выбор», см. также замечание о 9 классе в конце задачи № 6 10 класса.

8 класс, № 5

а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

8 класс, № 7

а) В вершине A_1 правильного 12-угольника $A_1A_2\ldots A_{12}$ стоит минус, а в остальных — плюсы. Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине A_2 оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырёх последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трёх последовательных вершинах многоугольника.

Сделаем любопытное замечание. Доказав все три утверждения, можно подумать, какое естественное обобщение здесь возможно (конечно, от участников олимпиады придумывать это обобщение не требовалось). Ответ см. в сборнике задач всесоюзных олимпиад [25].

10 класс, № 6, [26]

Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведём через центр каждого из них три прямые, параллельные рёбрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведённые через них прямые перечеркнули все кубики?

а) Укажите ответ для маленьких значений n: для $n = 2, 3, 4$.

б) Попробуйте найти ответ при $n = 10$.

в) Решите общую задачу. Если Вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так.

Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3), где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашёлся такой, который отличается от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти ответ для более общей задачи, когда рассматриваются наборы не из трёх, а из четырёх или большего числа букв.

Пункты а)–в) также предлагались в 9 классе (задача № 6).

10 класс, № 7 (М. И. Башмаков)

а) Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$. Докажите, что для любой точки (x, y) найдутся такие целые числа (m, n), что

$$f(x-m, y-n) = (x-m)^2 + (x-m)(y-n) + (y-n)^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

б) Обозначим через $\bar{f}(x, y)$ наименьшее из чисел $f(x-m, y-n)$ при всех целых m и n. Утверждение задачи а) состояло в том, что для всех x, y выполнено неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant 1/2$.

Докажите, что на самом деле верно более сильное неравенство $\bar{f}(x, y) \leqslant 1/3$. Найдите все точки, для которых достигается равенство $\bar{f}(x, y) = 1/3$.

в) Рассмотрим функцию $f_a(x, y) = x^2 + axy + y^2$ $(0 \leqslant a \leqslant 2)$. Найдите какое-либо число c, зависящее от a так, чтобы для всех x, y выполнялось неравенство $|\bar{f}_a(x, y)| \leqslant c$. Постарайтесь найти точную оценку.

В статье [24] было обещано «о задачах 6–8 будет рассказано в отдельных статьях в первых номерах „Кванта“ в следующем году», однако статью, посвящённую задаче 7, мы не нашли.

10 класс, № 8 (А. Н. Колмогоров, Ю. П. Офман), [27]

Переключатель (рис. 1 *а*) с двумя входами и двумя выходами может находиться в двух различных состояниях. На рис. 1 *б* изображена схема телефонной связи с тремя входами и тремя выходами, которая обладает свойством «универсальности»: меняя состояния переключателей, можно осуществить любое из шести соединений трёх входов

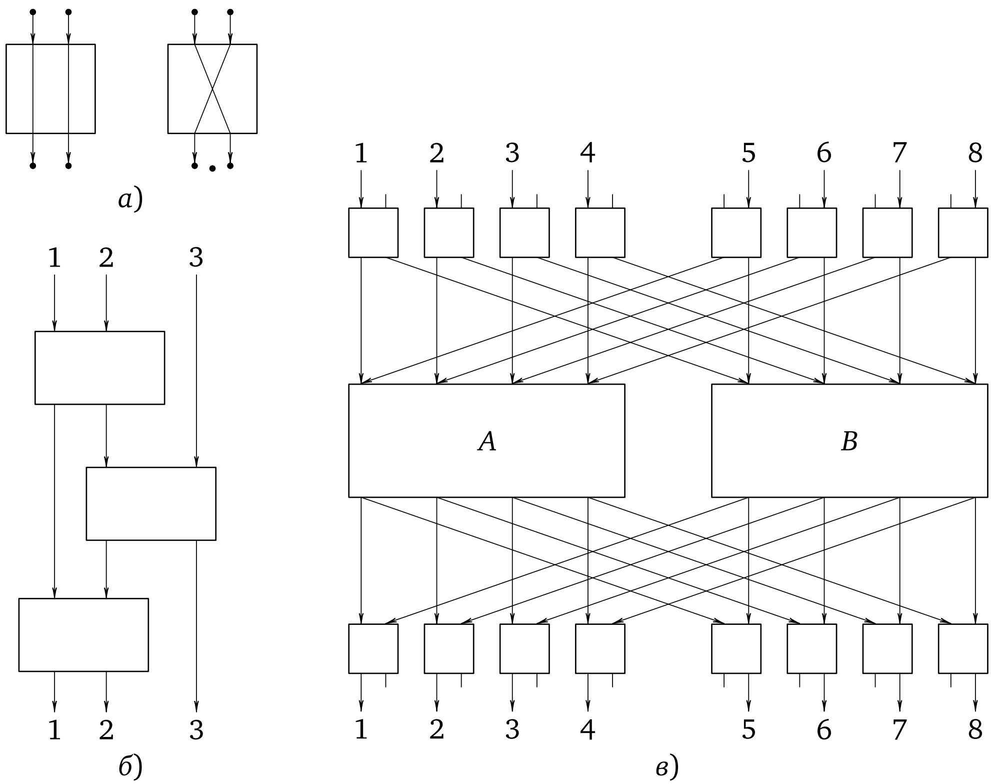


Рис. 1

с тремя различными выходами, т. е.

$$\begin{array}{cccccc} 123 & 123 & 123 & 123 & 123 & 123 \\ \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow \\ 123, & 312, & 231, & 213, & 321, & 132. \end{array}$$

(Проверьте это. Заметьте, что общее число различных состояний этой схемы равно $2^3 = 8$, поскольку каждый из переключателей может находиться в двух состояниях.)

а) Постройте схему с четырьмя входами и четырьмя выходами, которая была бы «универсальной», т. е. осуществляла бы любое из 24 возможных соединений входов и выходов.

б) Какое минимальное число переключателей нужно для такой схемы?

в) Назовём схему с n входами и n выходами n-универсальной, если она осуществляет любое из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ возможных соединений n входов с n различными выходами. На рис. 1 *в* изображена схема с восемью входами и восемью выходами, где A и B — 4-универсальные схемы. Докажите, что она является 8-универсальной.

Оцените сверху и снизу число переключателей в минимальной n-универсальной схеме (рис. 1).

1975 год

В 1975 году не было официально объявлено об исследовательских задачах. В статье «Кванта», сообщающей о Всесоюзной олимпиаде [28], про исследовательский тур также не упоминается. Тем не менее, в этом году во всех трёх классах встречались многопунктовые задачи, которые по своей сути представляют собой мини-исследование.

8 класс, № 7; 9 класс, № 6 (А. В. Карзанов)

В 8 классе предлагались вопросы а), б) г), причём для $n = 20$; в 9 классе вопросы б), в), г) для общего случая n прямых.

Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой — параллельные прямые, и n прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих прямых пересекаются внутри полосы и никакие три из них не имеют общей точки. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке полосы,

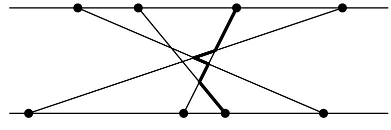


Рис. 2

обладающие таким свойством: идя по такому пути, мы всё время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны переходить на другую прямую (рис. 2).

Докажите, что среди таких путей

а) есть не менее $n/2$ путей без общих точек;

б) есть путь, состоящий не менее чем из n отрезков;

в) есть путь, проходящий не более чем по $\frac{n}{2}+1$ прямым;

г) есть путь, проходящий по всем n прямым.

9 класс, № 7

Дан многочлен $P(x)$ с

а) натуральными коэффициентами;

б) целыми коэффициентами.

Обозначим через a_n сумму цифр в десятичной записи числа $P(n)$. Докажите, что найдётся число, которое встречается в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ бесконечно много раз.

10 класс, № 6 (И. Н. Бернштейн)

В чемпионате мира и Европы участвуют 20 команд. Среди них имеется k европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачёт чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг.

При каком наибольшем k может оказаться, что команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберёт строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это:

а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи)?

б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)?

10 класс, № 7 (В. С. Гринберг)

а) Даны вещественные числа a_1, a_2, b_1, b_2 и положительные числа p_1, p_2, q_1, q_2. Докажите, что в следующей таблице 2×2

$$\begin{pmatrix} \dfrac{a_1+b_1}{p_1+q_1} & \dfrac{a_1+b_2}{p_1+q_2} \\[2ex] \dfrac{a_2+b_1}{p_2+q_1} & \dfrac{a_2+b_2}{p_2+q_2} \end{pmatrix}$$

найдётся число, которое не меньше числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше числа, стоящего с ним в одном столбце.

б) Даны вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ и положительные числа $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Составлена таблица $m \times n$, в которой на пересечении i-й строки ($i = 1, 2, \ldots, m$) и j-го столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$) стоит число

$$\frac{a_i + b_j}{p_i + q_j}.$$

Докажите, что в этой таблице найдётся число, которое не меньше любого числа, стоящего с ним в одной строке, и не больше любого числа, стоящего с ним в одном столбце.

1976 год

В 1976 году во второй день олимпиады была повторена схема 1971 года. Участникам каждого класса (а не только десятого, как пять лет назад) было предложено по три сложных задачи, каждая из которых была разбита на несколько пунктов, расположенных в порядке возрастания трудности. В предисловии к задачам отмечалось, что полное решение каждой из этих задач представляет собой небольшое математическое исследование и что жюри рекомендует, чтобы в одной (максимум в двух) из них (по своему выбору) каждый участник продвинулся как можно дальше.

В статье [29] отмечается, что задачи такого исследовательского плана желательны на самых различных этапах работы со школьниками. Отметим, что ряд задач исследовательских туров были составлены членом жюри в 1975–1979 годах С. В. Фоминым, студентом Ленинградского университета.

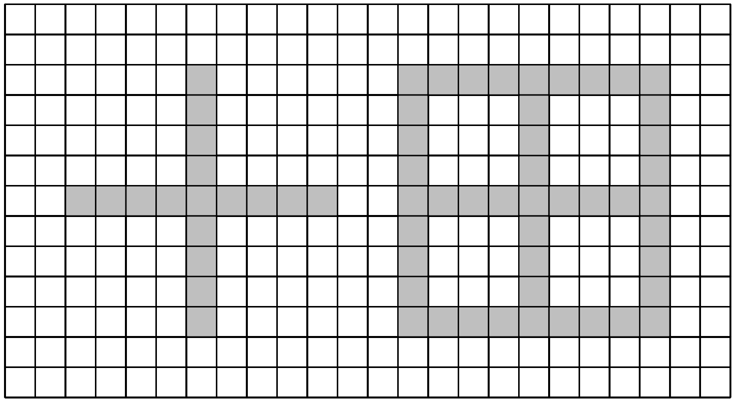
8 класс, № 5 (В. В. Произволов)

На шахматной доске размера 99×99 отмечена фигура (эта фигура будет разной в пунктах а), б), в)). В каждой клетке фигуры Ф сидит по жуку. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Ф; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелёта любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседние называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

а) Пусть фигура Ф — это «центральный крест», т. е. объединение средней вертикали и средней горизонтали (рис. 3 *а*). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетел в соседнюю клетку.

б) Верно ли утверждение, если фигура — это «оконная рама», т. е. объединение центрального креста и всех граничных клеток доски (рис. 3 *б*)?

в) Верно ли утверждение, если фигура — это вся доска?



а) *б*)

Рис. 3

Эта задача — один из дискретных вариантов знаменитой теоремы Брауэра о том, что непрерывное отображение выпуклого множества в себя имеет неподвижную точку.

8 класс, № 6; 9 класс, № 5 (С. В. Фомин)

Будем называть треугольник «большим», если длины всех его сторон больше 1. Дан правильный треугольник ABC со стороной длины 5. Докажите, что:

а) из треугольника ABC можно вырезать 100 «больших» треугольников;

б) треугольник ABC можно целиком разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников;

в) треугольник ABC можно разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников, соблюдая следующее условие: любые два «больших» треугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо сторона одного из них является стороной другого. (Такое разрезание называется триангуляцией.)

г) Решите задачи б) и в) для правильного треугольника со стороной длины 3.

8–9 класс, № 7; 10 класс, № 8 (Г. А. Гуревич), [30]

Дано натуральное число n. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(k \geqslant n)$ назовём универсальной для данного n, если из неё можно получить вычёркиванием части членов любую перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$ (т. е. любую последовательность из n чисел, в которое каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ входит по одному разу). Например, последовательность $(1, 2, 3, 1, 2, 1, 3)$ является универсальной для $n = 3$, а последовательность $(1, 2, 3, 2, 1, 3, 1)$ не универсальна, так как из неё никаким вычёркиванием нельзя получить перестановку $(3, 1, 2)$. Цель этой задачи — получить оценку числа членов самой короткой универсальной последовательности (для данного n).

а) Приведите пример универсальной последовательности из n^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из n^2-n+1 членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $n(n+1)/2$ членов.

г) Докажите, что при $n=4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти для данного n как можно более короткую универсальную последовательность. (Жюри умеет строить универсальную последовательность из n^2-2n+4 членов.)

Интересно отметить, что эта задача с олимпиады далёкого 1976 года идейно близка к «Задаче Харухи Судзумии», по своей постановке восходящей к Р. М. Карпу и Д. Кнуту. В эпизодах аниме «Меланхолия Харухи Судзумии» показаны путешествия во времени, а сюжет имеет сложную хронологическую структуру. Помимо этого, первые 14 серий этого аниме изначально транслировались в нелинейном порядке. В 2011 году анонимный пользователь спросил на форуме 4chan, сколько серий нужно посмотреть, чтобы увидеть всевозможные перестановки этих серий? В отличие от задачи олимпиады, перестановка серий должна идти непрерывным куском. Спустя некоторое время один из пользователей привёл нижнюю оценку этого количества. Доказательство этого анонимного пользователя было опубликовано в работе [31].

9 класс, № 6, [32]

На окружности расположены n действительных чисел, сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г) Докажите, что для $n = 30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $2/113$. Приведите пример набора из 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на $2/113$.

10 класс, № 6 (С. В. Фомин)

В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1). За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1), что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:

а) $n = 15$; б) $n = 30$; в) n — любое число, большее 2.

г) Попробуйте пояснить для произвольного n, чему равно наибольшее число $K(n)$ различных расстановок $(+1)$ и (-1), среди которых ни одну нельзя получить из другой за несколько шагов. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

10 класс, № 7 (А. А. Лодкин), [33]

На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f, ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

$$\text{если } M_1, M_2, M_3 \text{ — концы трёх взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то } f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1. \qquad (*)$$

Во всех следующих пунктах f — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством $(*)$.

б) Пусть M и N — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N, то $f(M) > f(N)$.

в) Пусть M и N — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N, то $f(M) > f(N)$.

г) Докажите, что если точки M и N лежат на одной параллели, то $f(M =) f(N)$.

д) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

1977 год

В 1977 году во второй день в десятом классе был исследовательский тур [34] (в предшествующем 1976 году такой тур был в каждом классе).

10 класс, № 6 (Э. Г. Туркевич), [35]

Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного x со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (т. е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трёх, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.

б) Пусть P — многочлен степени 2, k — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k, коммутирующего с P.

в) Найдите многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены R и Q коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_k, \ldots$, где P_k — многочлен степени k, в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x) = x^2 - 2$.

10 класс, № 7

Будем называть $2n$-значное число особым, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами (при этом второе n-значное число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю, а первое не может начинаться с нуля).

а) Найдите все двузначные и четырёхзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

10 класс, № 8 (С. В. Фомин), [36]

Имеется тысяча билетов с номерами $000, 001, \ldots, 999$ и сто ящиков с номерами $00, 01, \ldots, 99$. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычёркиванием одной из цифр. Докажите, что:

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

г) Пусть билеты имеют четырёхзначные номера (от 0000 до 9999) и билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера билета вычёркиванием каких-либо двух цифр. Докажите, что все четырёхзначные билеты можно разложить в 34 ящика.

д) Какой минимальный набор ящиков потребуется для k-значных билетов ($k = 4, 5, 6, \ldots$)?

Список литературы

[1] Острова утопии. Педагогическое и социальное проектирование послевоенной школы (1940–1980-е) // Коллективная монография. Серия: Библиотека журнала «Неприкосновенный запас». М.: Изд. дом «Новое литературное обозрение», 2015.

[2] Портал math.ru. История математики. Шклярский Давид Оскарович `https://math.ru/history/people/shklyarskiy`.

[3] *Дынкин Е. Б.* Вечерняя математическая школа // Сб. «Обучение в математических школах» / Сост. С. И. Шварцбурд, В. М. Монахов, В. Г. Ашкинузе. М.: Просвещение, 1965. С. 151–169. `https://www.mathedu.ru/text/obuchenie_v_matematicheskih_shkolah_1965/p151`.

[4] *Barbeau E. J., Taylor P. J.* (*eds.*) Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom // The 16th ICMI Study. Springer Science + Business Media, LLC, 2009. (New ICMI Study Series; Vol. 12). 336 p. DOI: 10.1007/978-0-387-09603-2.

[5] *Константинов Н. Н., Семенов А. Л.* Результативное образование в математической школе // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 1(77). С. 413–446. DOI: 10.22405/2226-8383-2021-22-1-413-446.

[6] Сборник задач московских математических олимпиад / Сост. А. А. Леман, ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. 384 с.

[7] *Шольце П.* О неотрицательных гармонических функциях на решётке // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 10. М.: МЦНМО, 2006. С. 236–242.

[8] Указатель условий, решений и статей по мотивам задач из «Математического просвещения». https://old.mccme.ru/free-books/ukazatel.xhtml.

[9] Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. М.: МЦНМО, 2009.

[10] *Колмогоров А. Н.* О профессии математика / 3-е изд. М.: Изд-во Моск. университета, 1959. 31 с. https://djvu.online/file/acfUT63JwzS8a.

[11] *Белов А. Я.* Олимпиады: дверь в математику или спорт? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 15. М.: МЦНМО, 2011. С. 187–203.

[12] *Белов А. Я.* Об организации конференций школьников // *Сгибнев А. И.* Исследовательские задачи для начинающих / 2-е изд. М.: МЦНМО, 2015. С. 121–125.

[13] *Белов А. Я.* Научное творчество школьников: где миф и где реальность? // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18. М.: МЦНМО. 2014. С. 231–247.

[14] *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986. 303 с.

[15] Международный математический турнир городов. Международная олимпиада по математике для школьников. Официальный сайт: https://turgor.ru/.

[16] *Дориченко С.* Интервью с Н. Н. Константиновым // Квант. 2010. № 1. С. 19–23. https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/431023.

[17] Летние конференции Турнира городов: избранные материалы. Вып. 1 / Под общ. ред. Н. Н. Константинова. Сост. Б. Р. Френкин. М.: МЦНМО, 2009. 264 с.

[18] Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 7–30 мая 2021. Образовательный центр «Сириус». https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena880/4772.

[19] Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 1–24 мая 2022. Образовательный центр «Сириус». https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1170/6254.

[20] Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 7–30 мая 2023. Образовательный центр «Сириус». https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1488/7576.

[21] Майская проектная программа по математике и теоретической информатике, 29 апреля – 22 мая 2024. Образовательный центр «Сириус». https://sochisirius.ru/obuchenie/nauka/smena1783/8255.

[22] *Семенов А. Л., Сопрунов С. Ф., Иванов-Погодаев И. А.* Создание новой математики школьниками // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 511, № 1. С. 138–143. DOI: 10.31857/S2686954323700224.

[23] *Семенов А. Л.* О продолжении российского математического образования в XXI веке // Вестник Московского университета. 20 серия. Педагогическое образование. 2023. Т. 21, № 2. С. 7–45. DOI: 10.55959/MSU2073-2635-2023-21-2-7-45.

[24] *Гутенмахер В.* V Всесоюзная математическая олимпиада // Квант. 1971. № 11. С. 35–42.

[25] *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, Физматлит, 1988. (Библиотека математического кружка; Вып. 18).

[26] *Васильев Н.* Расстановка кубиков // Квант. 1972. № 4. С. 4–9.

[27] *Фрейвалд Р.* Переключательные схемы // Квант. 1972. № 2. С. 16–19, 27.

[28] IX Всесоюзная олимпиада школьников // Квант. 1975. № 11. С. 59–67, 81.

[29] X Всесоюзная олимпиада школьников // Квант. 1976. № 11. С. 56–67.

[30] *Чванов В.* Нет линии прямей кольца… // Квант. 1991. № 7. С. 18–25.

[31] *Engen M., Vatter V.* Containing all permutations // The American Mathematical Monthly. 2020. Vol. 128, № 1. P. 4–24.

[32] *Васильев Н., Толпыго А.* Плавные последовательности // Квант. 1977. № 6. С. 30–34.

[33] *Лодкин А.* Функциональное уравнение на сфере // Квант. 1977. № 6. С. 57–60.

[34] XI Всесоюзная олимпиада школьников // Квант. 1977. № 11. С. 58–73.

[35] *Янтаров И.* Коммутирующие многочлены // Квант. 1979. № 4. С. 19–23.

[36] *Фомин С.* Билеты и ящики // Квант. 1978. № 8. С. 44–47.

Аллан Олегович Аллеманд, мехмат МГУ

`allan.suleykin@math.msu.ru`

Алексей Яковлевич Канель-Белов, МФТИ, университет Бар-Илана

`kanelster@gmail.com`

Анастасия Александровна Оноприенко, мехмат МГУ

`ansidiana@yandex.ru`

Алексей Львович Семёнов, мехмат МГУ

`alsemno@ya.ru`