
Математический мир

Рассказ о Владимире Игоревиче Арнольде

Ю. С. Ильяшенко

На летней школе «Динамические системы» в июле 2010 г. участники попросили автора рассказать им о В. И. Арнольде. В застеклённой гостиной у подножья Высоких Татр при свете камина состоялся этот рассказ. Он был записан и расшифрован И. В. Щуровым, которому автор приносит свою глубокую благодарность. Конечно, этот рассказ далеко не полон. В нём нет ни слова ни о теории катастроф, ни о вещественной алгебраической геометрии. Это всего лишь маленький фрагмент ещё не созданного полотна¹⁾.

Владимир Игоревич Арнольд был одним из тех людей, появление которых составляет счастье для своего поколения и вообще для их современников. Он всегда казался мне человеком гораздо более широким, чем просто математик. Он вносил дух художества и поэзии в математику. И взгляд его на математику был взглядом не только математика-профессионала, но и художника. Красота была присуща всему, что он придумывал сам или интерпретировал.

Он родился в потомственной интеллигентной семье. Был старшим из трёх детей. У него был младший брат, близкий ему по возрасту, и сестра, на 10 лет моложе. Мама его — из семейства Мандельштамов. Великий физик Леонид Исаакович Мандельштам и замечательный биолог Александр

¹⁾ Автор благодарит А. Б. Сосинского, прочитавшего статью в рукописи и сделавшего много полезных замечаний. Автор признателен также [В. Д. Арнольду], сообщившему ряд ценных сведений. Много биографической информации содержится в интервью В. И. Арнольда в книге В. Демидовича «К истории мехмата МГУ», М.: МГУ, 2013, с. 137–171.



Владимир Игоревич Арнольд

Гаврилович Гурвич — его родственники. Предположительно есть родство и с великим поэтом Осипом Эмилевичем Мандельштамом.

На Арнольда сильно повлияли люди уровня Л. И. Мандельштама, в частности физик Игорь Евгеньевич Тамм. С другим абсолютно выдающимся математиком своего поколения, Сергеем Петровичем Новиковым, он был знаком с детства. Алексей Андреевич Ляпунов, один из учеников Лузина, устроил детскую академию на даче в посёлке Ямщины близ Голицына, и подростки Новиков и Арнольд были членами этой академии²⁾.

В общем, Арнольд получил чрезвычайно мощный интеллектуальный импульс в детстве. По-видимому, он успел взять не очень много от своего отца, который умер, когда мальчику было 11 лет, и Владимир остался старшим мужчиной в семье. Думаю, он вполне сознавал свою ответственность. Во всяком случае, отношения с сестрой у него были очень тёплые и тесные.

Владимир Игоревич жил в одном из арбатских переулков — Спасо-Песковском. К началу войны ему было 4 года, он помнил немецкие бомбёжки и рассказывал, что, пытаясь разбомбить Бородинский мост, который идёт

²⁾ Ссылки на книги об А. А. Ляпунове и его деятельности см. на <http://math.ru/history/people/LyapunovAA>

к Киевскому вокзалу, немцы попали в театр Вахтангова — такая, говорит он, была в те времена точность бомбометания. В эвакуации семья была с октября 1941 по октябрь 1944 года.

Детство Арнольда и моё прошло по соседству, с 1949 по 1959 год я жил в Большом Власьевском переулке, неподалёку от Спасо-Песковского. Учились мы оба в школе № 59, которая была несомненно одной из лучших школ Москвы. Ни к нему, ни ко мне она не входила в микрорайон. Но родители — его мама и мои родители — добились того, чтобы мальчики поступили в эту прекрасную школу. В ней было много знаменитых учителей. Один из самых знаменитых, один из лучших в Москве учителей математики был Иван Васильевич Морозкин — невероятно грозный, но невероятно талантливый, способный пробудить интерес к творчеству в своих учениках. И нам он рассказывал об Арнольде. Собственно говоря, он взял нашу параллель в пятом классе, в предыдущий год выпустив параллель, где учился Арнольд. И байки, притчи о лучшем ученике параллели — Арнольде — он рассказывал нам всё время. В 1957 году он показал нам отгиск из ДАН — и сказал, что студент 3-го курса, 19-летний Дима Арнольд, решил проблему, за которую следует как минимум дать докторскую. Арнольд приходил в школу к Морозкину. Я видел такого прозрачного, худенького юношу. Шесть лет разницы — это очень много (это я сейчас с трудом отличаю 15-летнего человека от 19-летнего); тогда 19-летний казался мне невероятно взрослым. Но я помню его, такого светлого, приходящего к Ивану Васильевичу и о чём-то с ним беседующего на обширной площадке, из которой шли двери в разные кабинеты в нашей школе. Эта школа — бывшая Медведниковская³⁾ гимназия. В актовом зале — очень высоком — по углам гипсовые орлы с раскинутыми крыльями. Всё это видел и школьник Арнольд, и всё это я хорошо помню.

Арнольд побеждал в олимпиадах. Поколения в кружковой жизни (возрастные дистанции от учителя до ученика) были очень короткими. Арнольд, став студентом первого курса, вёл кружок, в котором я занимался. Одним из участников этого кружка был Павел Медведев, который стал студентом мехмата, аспирантом Шафаревича, кандидатом физико-математических наук, доктором экономических, а сейчас является политическим деятелем — с 1990-х годов он был членом Думы. А для меня Паша Медведев был руководителем кружка. Так что два коротеньких поколения кружковых отделяют меня от Арнольда. И хотя Арнольд формальным моим учителем был очень короткое время, но в математике он мой главный учитель. Моим учителем также был Евгений Михайлович Ландис —

³⁾ Её здание было построено в 1904 г. на деньги семьи Медведниковых по самым передовым технологиям. — *Прим. ред.*

у него я больше учился тому, как заботиться о своих учениках. Он был совершенно фантастически заботливый наставник.

Арнольд, будучи студентом первого курса, работал в просеминаре Витушкина. Витушкин многие годы своей жизни, поколение за поколением, учил талантливых студентов — устраивал просеминары для первокурсников.

Затем Арнольд работал у Дынкина. Евгений Борисович Дынкин был учеником сначала Гельфанда, потом Колмогорова. Дынкин, как и Арнольд, прославился чрезвычайно рано. В 20 лет студентом-четверокурсником он придумал знаменитые диаграммы Дынкина, которые сейчас являются одним из азбучных математических результатов. С Арнольдом на одном курсе учился другой выдающийся студент, Александр Александрович Кириллов. Дима Арнольд и Саша Кириллов оба работали у Дынкина какое-то время и даже сделали у него задачу, которая казалась нерешённой, но когда стали записывать, Арнольд нашёл что-то очень похожее уже опубликованное — и не стал этого писать.

На третьем курсе Арнольд сблизился с Колмогоровым. У Колмогорова был замысел атаковать 13-ю проблему Гильберта. Одна из ветвей этой проблемы — выразимость функций от большего числа переменных через функции от меньшего числа переменных. Сама проблема порождена вопросом: можно ли корни многочлена седьмой степени выразить через коэффициенты. Существенно то, что свести число коэффициентов меньше чем к трём нельзя. И вопрос: можно ли функцию от трёх переменных выразить с помощью арифметических и алгебраических действий, которые всегда вовлекают только два члена, над которыми производится операция... Этот вопрос Гильберт, в частности, свёл к вопросу, можно ли непрерывные функции большего числа переменных представить как суперпозиции функции меньшего числа переменных. Если бы ответ был отрицательный, то решилась бы и проблема про корни многочлена 7-й степени — их в принципе нельзя было бы выразить через коэффициенты. Но ответ оказался положительным, он был получен именно благодаря трудам Колмогорова и Арнольда.

Колмогоров, по-видимому, имел очень серьёзный задел, стратегические планы, как эту проблему следует атаковать. Но, когда атакуешь тяжёлую проблему, лучше об этом до времени не говорить. И Колмогоров организовал как-то очень скромно названный семинар по номографии — это такая прикладная ветвь математики. Я хотя и много общаюсь с семейством Хованских — отец Аскольда Георгиевича был одним из крупнейших специалистов по номографии, — но совсем немного могу сказать о том, что это за дисциплина. Колмогоров организовал семинар по номографии — поначалу там действительно были задачи, связанные с номографией, потом

семинар всё увереннее повернул в сторону 13-й проблемы Гильберта. Сам Колмогоров доказал, что функции четырёх переменных можно представить в виде суперпозиции функций трёх переменных, и уехал, кажется, во Францию, оставив студентам список задач. Когда он вернулся, Арнольд показал ему все задачи решёнными. «Ну вот, Дима, вы и решили 13-ю проблему Гильберта», — сказал Колмогоров. Арнольд рассказывал — я думаю, что вы это слушали или читали, — что Колмогоров считал, что начинающему математику не под силу написать кондиционную научную работу. И, получив от начинающего математика, своего ученика, текст, переписывал его целиком, вместо того, чтобы объяснять: «определения пишутся не так, теоремы пишутся не так, определения не должны включаться в теоремы» и много разных других правил. Колмогоров ничего этого не говорил, а просто показывал, как это делается. У Арнольда была, по всей видимости заимствованная от Колмогорова, своя трактовка слова «интеллигентный». «Интеллигентный» ученик (надо понимать «если не дурак») после первого показа видел, как это надо делать. И второй раз Колмогоров уже не показывал. Если интеллигентный ученик — значит поймёт. Так или иначе, Арнольд написал заметку в ДАН о решении 13-й проблемы, но, как он говорил позже, «в опубликованном тексте нет ни одного моего слова — он весь переписан Колмогоровым».

Когда проблема Гильберта была решена, Колмогоров сказал Арнольду: «Дима, теперь держитесь подальше от моей тематики — вы самостоятельный человек». Я думаю, подтекст был такой: «вам больше не нужна никакая форма руководства, вы достигли высшего уровня и должны выбирать себе область сами».

Я никогда не интересовался, на какой кафедре был Арнольд — наверное, на кафедре теории вероятностей. Надо сказать, что когда Арнольд работал над 13-й проблемой Гильберта, Колмогоров был деканом. И он тогда ввёл индивидуальные планы для студентов. Это означало, что студент по решению научного руководителя и учебной части может не ходить на занятия вообще — только сдавать экзамены. И таким образом он предоставил Арнольду возможность неограниченно заниматься наукой.

Арнольд переключился на какие-то задачи, связанные с отображениями окружности. Сначала это были многозначные отображения с многими образами — так называемые соответствия. Но постепенно логика размышлений стала приводить его к тому же сюжету, о котором Колмогоров читал спецкурс, — к теории малых знаменателей. Ему было ясно, что первым приложением этой теории должна быть теорема о приведении диффеоморфизма окружности к повороту, что методы, придуманные Колмогоровым, там работают, — и его дипломная работа была первым прорывом после Данжуа.

Задача об отображениях окружности идёт от Пуанкаре. Пуанкаре первый понял, что это вообще содержательнейший предмет математических исследований, придумал число вращения и, так сказать, открыл мир диффеоморфизмов окружности. Это действительно целый мир, который и сейчас интенсивно развивается. Но начало этой теории было очень небыстрым. Пуанкаре сделал первый прорыв, затем поставил вопрос о приведении диффеоморфизма окружности к повороту. И чуть ли не через 50 лет (работа Пуанкаре — это 1880-е годы) — только в начале 1930-х годов его ученик Данжуа доказал теорему о приведении гладкого диффеоморфизма окружности к повороту — и при этом, надо сказать, придумал лемму об искажении, которая с таким успехом теперь используется.

После Данжуа был Арнольд. В 1961 году его статья была опубликована под названием «Малые знаменатели — 1». Потом были «МЗ-2», «МЗ-3». Стало ясно, что Арнольд снова тесно работает с Колмогоровым. Собственно говоря, я думаю, что вклад Колмогорова к этому времени был уже закончен. Колмогоров придумал свой совершенно гениальный подход к задачам классической механики. Опять нужно вернуться к Пуанкаре, который понял, что дифференциальные уравнения — это не только ветвь анализа, но и ветвь геометрии. В качестве основной задачи созданной им качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре поставил вопрос: «Что происходит с вполне интегрируемой гамильтоновой системой при малом возмущении гамильтониана, когда она теряет интегрируемость?».

С начала двадцатого века были принадлежащие выдающимся математикам и физикам самые невероятные фантазии на тему возможного ответа. Предполагалось даже, что система будет эргодической. Колмогоров пытался угадать ответ, ему в начале 1950-х годов, когда он размышлял об этом, нужно было извлечь первые проблески света из абсолютной тьмы. Никто совершенно не представлял, на что будет похож ответ. Само наличие торов в интегрируемых системах было для Колмогорова неожиданностью, которую он нащупал, анализируя конкретные примеры. И понял, что эти торы — они сейчас называются колмогоровскими торами — выживают при малых возмущениях, и придумал, как это выживание можно было бы доказать.

Кто-то сравнительно недавно сказал мне, что Колмогоров говорил «я недостаточно сильный аналитик, чтобы провести доказательство подробно» — имея в виду доказательство теоремы Колмогорова о сохранении инвариантных торов. Но он целый год читал спецкурс об этом. И сейчас нет единого мнения, было у Колмогорова доказательство или не было. Но когда в 1962 году появилась статья Арнольда с доказательством теоремы Колмогорова, ни у кого не было сомнений в том, что Арнольд не записал, а дал впервые доказательство теоремы Колмогорова.

Сейчас эта теорема — именно та, которую доказывал Колмогоров, — имеет много опубликованных доказательств. Работу Арнольда очень тяжело читать, она очень формальная. Если Колмогоров говорил, что у него не хватает силы аналитика, то Арнольд проявил силу аналитика, написав крепко сработанный текст, длинный, прошитый связями, но трудно читаемый — с полным доказательством. Сейчас появились гораздо более простые доказательства той же самой теоремы. Но тогда это было что-то вроде первого восхождения на Эверест. Кстати, с Эверестом, я думаю, очень поучительная параллель. Существуют невероятно трудные решения научных проблем — за гранью возможностей предшественников, так же как восхождение на Эверест было в своём роде преодолением невозможности. А сейчас уже на Эвересте побывал и 70-летний восходитель, и слепец, и много женщин, и шерп Бабу Чири за 16 часов поднялся на вершину Эвереста с того места, с которого первовосходители шли вверх больше трёх дней — в общем, от Арнольда слышал я фразу Пуанкаре «Истина рождается парадоксом, а умирает тривиальностью»⁴⁾. Вот это, по-видимому, та эволюция, благодаря которой только и можно узнавать всё больше и больше нового. Это происходит потому, что старые достижения прессуются, укладываются и становятся доступными для восприятия начинающих, а не остаются тайной для посвящённых.

Арнольд пошёл гораздо дальше Колмогорова. Он изучал и возмущения гамильтоновых систем с малым числом степеней свободы в пространстве с большим числом степеней свободы, и там устанавливал наличие торов. Он решил плоскую задачу трёх тел. И долгое время ему казалось, что он решил и пространственную задачу трёх тел. Но в 1990-е уже годы выяснилось, что в его решении был довольно существенный пробел, который потом был заполнен Эрманом и его учеником Фежосом. У меня нет ощущения, что это пробел в какой бы то ни было степени сравним по размерам с тем, что Арнольдом было достигнуто.

Иван Георгиевич Петровский, который в те годы был ректором МГУ, взял Арнольда и Кириллова профессорами на мехмат, как только они защитили докторские. С 1965 года оба они были профессорами. Надо сказать, что в то время процедура взятия на работу была непростой. Нужно было, чтобы кандидата одобрили профком и партком, и только после этого администрация могла писать приказ о его зачислении. Петровский, на мой взгляд, был человеком, который абсолютно сознательно и очень энергично противостоял системе. Если система, которая превратилась в почти бессознательно работающий механизм, старалась прихлопнуть или

⁴⁾ Арнольду повезло: весь цикл прошёл при его жизни!

даже срезать любую голову, которая высывалась над общим уровнем, то Петровский каждого способного человека старался поставить на ноги. Петровский и Колмогоров очень сильно поддерживали друг друга, были единомышленниками. Колмогорову принадлежит фраза «надо прощать человеку его способности».

Петровский изобрёл способ, как людей, не имеющих больших общественных заслуг, и тем более с «небезупречной» национальной принадлежностью, брать работать в университет. Существовала процедура, которую Бейлинсон⁵⁾ называл работоторговлей, — я немножко при этом присутствовал, и у меня было то же ощущение, — процедура распределения. Ты — студент — получил бесплатное образование, скажи спасибо и отправляйся на два года работать туда, куда тебя пошлют. Такова была идеология этой системы. Она была не слишком жёсткой. То есть очень многие люди получали работу по своему дару или по своему вкусу. Но многим она — эта система — и попортила жизнь.

Таковую же процедуру проходили выпускники аспирантуры. И партком мог легко не взять в университет и такого замечательного человека, как Арнольд. Во всяком случае, Петровский придумал обходной путь. Он прекращал дневную аспирантуру для аспиранта, переводил его в заочную аспирантуру, а самого аспиранта брал сотрудником в университет. Забавным образом, такая процедура, как нестандартная, не была обставлена стандартными препонами. Эту вещь Петровский мог сделать в обход парткома. Что он и делал. Я точно знаю, что этим трюком он воспользовался в отношении меня. Но он воспользовался им и в отношении многих совсем замечательных математиков старшего поколения — Арнольда, Синая, Кириллова, Винберга. Во всяком случае, Арнольд был взят сотрудником на факультет раньше, чем окончил аспирантуру. Петровский заведовал кафедрой дифференциальных уравнений и взял Арнольда к себе на кафедру. А очень скоро после того, как Арнольд защитил докторскую, он стал профессором.

Докторская диссертация Арнольда называлась «Малые знаменатели и проблемы устойчивости в классической и небесной механике». Вообще, вы помните фотографии в клубной части МГУ — сейчас они цветные. Тогда они висели чёрно-белые. Я очень хорошо помню фотографию, которая называлась «аспирант становится доктором». На этой фотографии был изображён Александр Александрович Кириллов, один из любимых и известнейших учеников Гельфанда, который решил одну из задач теории представлений, предложенную ему Гельфандом, и продвинулся так сильно,

⁵⁾ А. А. Бейлинсон, один из самых знаменитых учеников Ю. И. Манина, сейчас профессор в университете Чикаго.

что ему решили дать докторскую степень. Кажется, кандидатские Арнольда и Кириллова защищались одновременно или очень близко друг к другу.

Когда Арнольд защищал свою кандидатскую — а это была 13-я проблема Гильберта — было предложение дать ему докторскую. Но решение 13-й проблемы было очень сильно поделено между Арнольдом и Колмогоровым. И Витушкин сказал, что работа, конечно, замечательная, и Колмогорову, конечно, за неё можно было бы дать докторскую степень, только непонятно, зачем она ему нужна. А вклад Арнольда не казался ему решающим. Дело осложнялось ещё тем, что после того, как Арнольд закончил решение 13-й проблемы, Колмогоров, развивая свои идеи, дал формально независимое от арнольдовского и совсем короткое решение 13-й проблемы. Действительно, это очень сильно разделённая работа между двумя исследователями. Короче, тут же был голос, что у Арнольда уже есть результаты на докторскую, и в 1963 году Арнольд докторскую уже защитил. Я на этой защите был, и на праздновании у Арнольда дома был. Был такой скромный праздник; может быть, даже на нынешних кандидатских защитах бывает не меньше народа, чем тогда было дома у Арнольда. Был, конечно, Колмогоров, и он сказал — у него был такой воркующий голос: «Я желаю, чтобы Владимир Игоревич доказывал побольше математических теорем, но не доказывал теорем о непотопляемости на море байдарок». Арнольд был всегда отчаянным человеком; физический риск доставлял ему удовольствие и был его потребностью. Я никогда не слышал от него пушкинских строк «Есть упоение в бою, и бездны мрачной на краю» — но у меня ощущение, что это были его строки.

Первый раз я увидел Арнольда на факультете, когда он принимал у меня, первокурсника, весенний экзамен во вторую сессию. У меня было ощущение, что я сдавал очень плохо. Но, по-видимому, моя цель состояла в том, чтобы давать ответы немедленно и в хорошей литературной форме, и до этой планки я не достал. Так или иначе, но совсем неожиданно для меня, довольно скоро, Арнольд сам взял со стола и принёс мне мою зачётку с пятёркой. Он был невероятно доброжелательным, и это очень ощущалось. И очень полон внутреннего света.

У Елены Николаевны⁶⁾ на втором курсе — мы учились вместе — он вёл занятия по анализу. И она вспоминает — это мне тоже очень близко и как-то естественно, — что он приходил на занятия с отпадающей подошвой одного ботинка, а чтобы она не отпала совсем, ботинок был обвязан шнурком. Елена Николаевна рассказывала, что через год его выпустили во Францию, и вдруг он явился в вельветовом костюме. Это совсем с ним не вязалось. Вообще, этот стиль, который выражался поговоркой XIX века, а может,

⁶⁾ Елена Николаевна Ильяшенко, жена рассказчика.

и более ранней, — «беден, да честен», он был очень присущ тому поколению. Как-то считалось само собой разумеющимся, что важно то, что внутри, а не то, что снаружи, и, в частности, проявлением этого принципа было пренебрежение к одежде.

Я помню, что в 1963 году на факультете был очень большой интерес к работе Петровского — Ландиса. Александр Михайлович Виноградов рассказывал её на семинаре у Арнольда. Он говорил, что существует такое французское понятие «feuilletage», которое можно переводить на русский как «листьяж», и рассказывал о понятиях, связанных с этими листьяжами, в работе Петровского — Ландиса. Арнольд очень живо реагировал — надо сказать, что «feuilletage», или foliation, теперь называется «слоением», но тогда термин ещё не устоялся. Послушав Виноградова раза два, Арнольд сказал: «Ну что нам слушать изложение, давайте обратимся к первоисточнику» — и позвал рассказывать Ландиса, которому тогда было 40 с небольшим. Ландис рассказывал, и в общем впечатление было, что вроде бы сюжет рассказан, но, по-видимому, никто, включая самого Арнольда, не мог бы сказать, что получено полное понимание. Это 16-я проблема Гильберта. Ну, дальше в работе Петровского — Ландиса нашлась ошибка, у меня это где-то написано.

Я на третьем курсе, страшно робея, попросил Арнольда быть моим научным руководителем — и был поражён тем, с какой лёгкостью он согласился. А на втором курсе я ходил на семинар Ландиса, где он в задачах излагал свою работу с Петровским по решению 16-й проблемы Гильберта. Я помню, как после какой-то лекции, вытирая руки, сполоснутые от мела, Арнольд шёл мне навстречу по коридору и спросил: «Юлик-Юлик, а что вы собираетесь сделать с Петровским — Ландисом?» Я ему ответил: «Ну, хочу найти доказательство попроще». Он сказал загадочную фразу: «Здесь хорошо бы применить теорию Галуа». Надо сказать, что Арнольд, по-видимому, не любил алгебраический вариант теории Галуа — и придумал свой, геометрический. Я не буду рассказывать, в чём он состоял (он был тесно связан с группой монодромии алгебраических функций и с неразрешимостью этой группы монодромии), но во всяком случае Арнольд хотел внести дух ветвления, дух монодромии в эту проблематику. Я понял, и эти слова были для меня в каком-то смысле импульсом в течение шести лет, по истечении которых я придумал, как надо применять абелевы интегралы к дифференциальным уравнениям, но это было уже позже.

Мне, наверное, не приходилось рассказывать на семинаре Арнольда до тех пор, пока я совсем не повзрослел. Я, заинтересованный работой Петровского — Ландиса, постепенно перешёл под руководство Ландиса, немножко неожиданно для себя и в общем с большим страхом взялся

за абелевы интегралы, ощущая, что мимо пройти в общем-то нельзя, если следовать стратегии, которая Ландисом была намечена. И в 1969 году опубликовал две работы в «Математическом сборнике», им тогда заведовал Петровский, и статьи мои вышли чрезвычайно быстро. А в 1970 году Арнольд предложил мне рассказать на семинаре эти вещи. Надо сказать, что рассказывали тогда на семинарах страшно концентрированно, и за 90 минут я сумел изложить всё, что у меня было написано, по крайней мере из двух работ сделав выжимку. И до сих пор не забуду: когда я рассказывал короткое геометрическое рассуждение, в результате которого удавалось разбросать по плоскости примерно $n^2/2$ предельных циклов, Арнольд немного подался вперёд и сказал: «Здорово!». Я это «Здорово!» слышу до сих пор, и это одно из самых радостных моих воспоминаний.

В 1962–64 годах — я возвращаюсь сильно назад — Арнольд читал спецкурс по малым знаменателям. Я помню: в 1962 году, когда Арнольд первый раз рассказывал о результатах, по мехмату прошёл слух, что Арнольд решил задачу трёх тел, которую не мог решить Пуанкаре, — и это было очень впечатляюще. В 1964 году на заседании Московского математического общества Арнольд рассказывал про новое явление, называемое теперь диффузией Арнольда. Надо сказать, что очень долго в дифференциальных уравнениях существовал, по-видимому, один механизм устойчивости, геометрически связанный со спуском в яму, а аналитически — с функцией Ляпунова. Арнольд был первым, кто понял, что в системах классической механики есть новый вид устойчивости. Когда есть колмогоровские торы, а степеней свободы только две, то поверхность уровня энергии трёхмерна, и двумерные колмогоровские торы запирают решения — они образуют щели, из которых решения выйти не могут просто по топологическим причинам. Эта причина не работает, когда степеней свободы три, поскольку в этом случае изоэнергетическая поверхность пятимерна, а торы только трёхмерны и ничего не разделяют, — но во всяком случае Арнольд придумал этот свой любимый вид устойчивости и получил, в частности, новую теорему об устойчивости для особых точек гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Эти теоремы послужили гораздо позже источником совершенно неожиданных событий, о которых я расскажу.

Обычные лекции по дифференциальным уравнениям Арнольд начал читать только в 1968 году. На лекции по малым знаменателям ходили почти все сильнейшие студенты моего курса и ближайших курсов. Но понимать Арнольда было очень трудно. Он читал очень быстро. И Арнольд, и Манин читали очень быстро, и мне было трудно слушать обоих. Я из этих лекций вынес впечатление и убеждение, что читать надо по-другому. М. А. Шубин говорил мне, что каждую из еженедельных лекций Манина он проработы-

вал последующие 3–4 дня, для того чтобы слушать и воспринимать следующую. Я с большим сожалением до сих пор об этом думаю — мне не хватало в студенческие годы терпения так работать над лекциями, — мне хотелось, к чему я привык в школе, понимать всё с ходу, на месте. И я решил по возможности стараться читать так, чтобы мои слушатели понимали всё на месте. Я этому учился всю жизнь, не знаю, в какой мере научился. Но во всяком случае, это вынесенная из юности такая линия. Забегая сильно вперёд скажу, что это и идея Независимого университета — там стараются читать так, чтобы было понятно на месте, — и это идёт совсем не от меня. Великих лекторов — ни Арнольда, ни Манина — не останавливал никто.

В 1965 году Арнольда неожиданно выпустили во Францию. Вообще, железный занавес был совершенно не шуткой. Сквозь него могли проникать очень немногие, а для большинства людей он был непроницаем. То, что Арнольда отпустили во Францию, это была большая удача. Его начали оформлять ещё как студента, но поехал он уже профессором. Однако бюрократическая машина неповоротлива, и во Франции его принимали по той программе, по которой его отправили. Научным руководителем его был Лере. И так вот Арнольд и был научно руководимым у Лере.

Вернёмся к виду устойчивости, который открыл Арнольд: двумерные торы перегораживают трёхмерные изоэнергетические поверхности. Трёхмерные торы пятимерных поверхностей уже не перегораживают. И возникает естественный вопрос: может ли даже для систем, близких к интегрируемым, решение, которое начинается где-то вблизи торов — уже нельзя сказать между торами, — пропутешествовать рядом с ними и уйти далеко-далеко? Арнольд на эту тему написал единственную заметку в «Докладах» в 1964 году, но эта заметка послужила началом целой огромной новой ветви — «диффузии Арнольда», которая является сейчас, возможно, одной из самых популярных тем в классической механике. Основная проблема: «типична ли диффузия Арнольда?», и, кстати, участник этого же семинара Вадим Калошин сейчас один из ведущих в мире специалистов в этой области. У него есть масса примеров, которые движут наши знания в сторону положительного ответа на вопрос о типичности диффузии Арнольда⁷⁾.

Это был стиль Арнольда — если угодно, взгляд гения, удар молнии. Он открывает новую область, туда затем устремляются последователи, а Арнольд идёт дальше.

Статья про диффузию Арнольда — это были 4 странички. Очень содержательные, очень концентрированные, но на четырёх страничках вы

⁷⁾ В 2012 году типичность диффузии Арнольда была доказана Калошиным вместе с двумя его аспирантами.

много деталей не упишете. Мозер, который эту заметку реферировал, сказал, что если вписывать всё, пропущенное между строк, то получится страниц 20. Но для того, чтобы образовалась брешь, в которую хлынули последователи, этого было достаточно. И по диффузии Арнольда пишутся книги, и это один из знаменитых сюжетов. Арнольд предположил также, что, хотя диффузия возможна, она не может быть слишком быстрой. Он предложил эту задачу своему ученику Нехорошеву с небольшим наброском того, как это можно было делать: по его мнению, скорость диффузии должна быть — опять-таки при возмущении интегрируемой системы — обратна некоторой степени возмущающего параметра, а Нехорошев доказал, что она экспоненциально мала по возмущающему параметру. Для Арнольда это была неожиданность. Вообще, первая же серьёзная работа Нехорошева — его кандидатская диссертация — тоже породила целую теорию, которая так и называется «теория Нехорошева». К сожалению, это осталось главным достижением покойного уже теперь Николая Николаевича Нехорошева.

Надо сказать, что у Арнольда было невероятно много завистников. Тем более, что он привлекал, притягивал к себе людей со всех сторон. На него слетались математики, как бабочки на огонь. Каждый хотел его одобрения, ободрения, мнения о своих работах, и Арнольд с самой юности вынужден был поставить вокруг себя защиту, иначе бы его разорвали на части. Но в результате и завистников, и ненавистников у него было немало. Кроме того, он, конечно, абсолютно не вписывался в коммунистическую систему. Когда в 1968 году он начал читать курс дифференциальных уравнений и впервые в мехматский обиход вошли слова «диффеоморфизм», «фазовый поток», «симметрии» — в обиход во всяком случае обязательных курсов младшекурсников, — в деканате мнение было об этом курсе весьма скептическим, а студентам приходилось очень трудно. На учёном совете мехмата, кажется, секретарь парткома факультета сказал, что это не тот курс, который нам нужен.

Возвращаемся к Лере. Лере имел много замечательных работ и, в частности, работы по уравнению Навье — Стокса, по гидродинамике. Арнольд придерживался противоположного по отношению к Лере взгляда на природу турбулентности. И Арнольд является одним из авторов эвристической концепции того, что такое хаос в динамических системах вообще и турбулентность в частности. В то время он считал, что типичные динамические системы имеют гиперболические аттракторы. А на гиперболических аттракторах есть экспоненциальное разбегание траекторий и все симптомы хаоса. И эту концепцию он всячески проповедовал во Франции. Лере считал, что турбулентность происходит из-за того, что решения уравнений

Навье — Стокса с начальными условиями сколь угодно высокой гладкости в ходе эволюции теряют гладкость, становятся только непрерывными, и для них нарушается единственность. Вот это нарушение единственности является выражением турбулентности и невоспроизводимости экспериментов. Арнольд же считал, что уравнение Навье — Стокса ведёт себя как гладкая динамическая система, никакой гладкости решения не теряют, но зато выходят на гиперболический аттрактор, на котором происходит экспоненциальное разбегание траекторий, и это является моделью турбулентности. То, что типичная динамическая система хаотична, оттого что у неё достаточно сложный аттрактор, — это была пионерская идея, высказанная в середине 60-х годов Арнольдом. А кроме того, он тогда же, во Франции, понял, что решения уравнения идеальной жидкости, уравнения Эйлера — это просто геодезические на бесконечномерной группе диффеоморфизмов, и внёс ещё одну совершенно новую геометрическую точку зрения в задачу, которая раньше считалась чисто аналитической.

В 1970 году на конгрессе в Ницце друг детства Арнольда Сергей Петрович Новиков получил Филдсовскую медаль — первую Филдсовскую медаль российского математика. Филдсовскую медаль не дают человеку старше 40 лет, и 1974 год, когда Арнольду было 37, был последним годом, когда он мог получить медаль Филдса. Мы с напряжением ждали — получит или нет. Очень надеялись, что да. Но, когда конгресс прошёл и медали не дали, пронёсся слух, что глава советской математической делегации Понтрягин при обсуждении Филдсовской медали для Арнольда сказал, что «мне не известны работы такого математика». Позже говорили, что Понтрягин предупредил Филдсовский комитет, что советская делегация покинет конгресс, если Арнольду будет присуждена Филдсовская премия.

В 1968 году — я возвращаюсь на несколько лет назад — многие математики подписали письмо в защиту математика А. С. Есенина-Вольпина, который был помещён в психбольницу в качестве наказания за его правозащитную деятельность. После этого резко ухудшилось положение в университете и на мехмате в частности. У меня об этом написано⁸⁾ в тексте «„Чёрное 20-летие“ мехмата МГУ», который, наверное, многие из вас читали. Арнольд был один из тех, кто подписал это письмо, и все подписавшие попали в немилость. Вообще, конечно, можно только удивляться такой безрассудной государственной политике, когда государство предпочитает, чтобы гражданин его не имел престижной премии, если этот человек независим и неуправляем. Но с Арнольдом было именно так. Подобно

⁸⁾ <http://www.pravmir.ru/19385/>

Пушкину Арнольд был гениален и подобно Пушкину гоним. Его учеников не брали работать на мехмате. К нему шли лучшие студенты поколения за поколением. Их не брали работать на мехмат, просто потому, что они были не из той команды. У Арнольда было много замечательных учеников, некоторые достигли хорошего уровня, но многие абсолютно выдающегося. Белага, Леонтович, какое-то время был я, хотя Арнольд в список своих формальных учеников меня не включал, Хованский, Нехорошев, Пяртли, Смилка-Здравковска, Варченко, Гусейн-Заде, Закалюкин, позже В. Васильев, Казарян, Гивенталь, Ландо — всего, я думаю, человек около пятидесяти.

Только Нехорошева из тех, кого я перечислил, взяли на кафедру дифференциальных уравнений. Хованского не взяли даже в аспирантуру мехмата, просто из-за княжеского происхождения, его кандидатуру отвели на уровне парткома кафедры. Арнольд взял его в аспирантуру Стекловки, хотя сам там не работал в то время. Варченко взяли в лабораторный корпус, Гусейн-Заде взяли на географический факультет. Лучшие студенты мехмата шли к Арнольду и Ю. Манину, судьба учеников Манина была такой же: времена власти Петровского прошли, и на мехмат их не брали. Меня Петровский взял в 1968 году на мехмат, в 1969 году у него случился тяжёлый инфаркт — Тихонов настаивал на создании факультета прикладной математики, а Петровский говорил, что для обучения математиков достаточно мехмата. Как говорил Ландис, в конце концов «Тихонов получил факультет, а Петровский — инфаркт». Было непонятно, вернётся он к исполнению обязанностей ректора или нет. Он вернулся, но уже в 1968 году, как я о том писал, началось чёрное 20-летие мехмата, власть Петровского была резко подорвана. В 1973 году он умер.

Мы, на самом деле, люди очень уязвимые. Человек нашего круга может умереть после резкого разговора. Насколько я понимаю, у Петровского с его недугами это и произошло. Он, как говорили, подготовил доклад на совещание ректоров — очень, по-видимому, острый. Принёс его заведующему отделом науки и вузов ЦК КПСС С. П. Трапезникову. Доклад был отвергнут. Петровский вышел с приёма и умер у входа.

На мехмате наступили совсем другие времена. И больше никого из учеников Арнольда, кроме перечисленных, в университет не взяли — несмотря на то, что он вырастил совершенно золотую когорту математиков. И это послужило причиной того, что образовался Независимый московский университет. Потому что были люди, прекрасно обученные, были прекрасные математики, были прекрасные потенциальные преподаватели. Традиция создания научной школы шла непрерывно: Лузин, Колмогоров, Арнольд. А подавляющему большинству учеников Арнольда собственную школу

создать в России не дали. Но этот заряд в них был, и как только наступили первые проблески свободы, они создали Независимый московский университет.

Арнольд говорил мне, что предвидел путч и конец перестройки, причём, предвидя путч, он вовсе не был уверен в его исходе. И, на случай несостоявшегося исхода, он заранее договорился о трёх годах подряд визитов на Запад. И 1991–1993 годы Арнольда в России не было вовсе. Вернувшись в Россию в 1994 году, он по моему предложению читал курс уравнений с частными производными в Независимом московском университете. Надо сказать — это тоже характеризует обстановку на мехмате, — что Арнольд в 1980-е годы предлагал прочесть курс уравнений с частными производными. «Ах, что Вы, Владимир Игоревич, — говорила наша начальница Ольга Арсеньевна Олейник⁹⁾, — это будет что-то совсем экзотическое?» — и не согласилась, чтобы такой курс был прочтён на мехмате.

В 1984 году против Арнольда была организована очень грамотная травля, которая привела к тяжёлому гипертоническому кризу у него. Я повторяю, что такие вещи делаются умелыми людьми и с серьёзными результатами. Это был очень сильный удар для него. И в 1986 году он ушёл с мехмата и перешёл в институт Стеклова. Он хотел остаться на мехмате на полставки, но мехматское начальство очень не торопилось это делать, и только после каких-то усилий снизу — всё-таки на мехмате были почитатели Арнольда, — поскольку всё-таки уж очень трудно было возразить против того, чтобы такого звёздного человека взять на полставки на мехмат, — его взяли. В 1994 году он ушёл с мехмата совсем.

Как говорил Гивенталь¹⁰⁾, приехавший из Америки на похороны Арнольда, расцвет школы Арнольда пришёлся на время, когда ему было лет 50, — тогда действительно в силу вошли те лучшие из его молодых учеников, которых я назвал. В 1987 году ему было 50.

Стиль общения Арнольда стал жёстче с возрастом. Может быть, он стал более непредсказуемым. У него, особенно в последние годы, была какая-то совершенно фантастическая производительность. Виталий Арнольд слышал от Владимира Игоревича следующий рассказ. Как-то Гельфанд предложил Арнольду написать книгу об уже обсуждавшемся между ними сюжете. Гельфанд тогда уже был в Америке, дело было, по-видимому, в 1990-е годы или в 2000-е, и Арнольд сказал: «Я послезавтра утром улетаю». Гельфанд сказал: «Ну у вас же ещё 40 часов впереди!» Арнольд сел и написал среднего размера книгу (сразу в Т_ЕX-е). Закончил Владимир

⁹⁾ О. А. Олейник — зав. кафедрой дифференциальных уравнений МГУ в 1973 — 2001 гг.

¹⁰⁾ А. Б. Гивенталь — один из самых ярких учеников Арнольда.

Игоревич этот рассказ со своей характерной чуть ироничной улыбкой фразой: «Не худшая из моих книг получилась».

Я помню фразу моего отца: «Гений — это прежде всего количество», — к Арнольду это имеет полное отношение. Я помню, как он попросил меня написать параграф в книгу «Дополнительные главы к теории обыкновенных дифференциальных уравнений». Это был параграф с отрывом вперёд по ходу книги — и я помню, что он приносил мне каждый день написанный новый текст, и у меня было впечатление приближающегося ко мне поезда. Мы писали с ним — как вы, может быть, знаете — совместный обзор по дифференциальным уравнениям для первого тома математической энциклопедии, это зелёная серия, и называется она «Фундаментальные направления», а на Западе — «Springer mathematical encyclopedia» — это жёлтая серия. Это было очень нелёгкое соавторство. Когда мы заканчивали работу над первым томом, вышло третье издание «Обыкновенных дифференциальных уравнений» Арнольда, и он подарил мне эту книгу с надписью «Дорогому терпеливому соавтору Юлику».

В 1965 году Арнольда выбирали в членкоры, и ему не хватило одного голоса. А затем Академия начала очень быстро набирать членов, замечательных своими общественными, а не математическими достижениями, и была пройдена отрицательная критическая масса — создался коллектив, который мог воспроизводиться только за счёт себе подобных. И было ощущение, что абсолютно безнадежно, чтобы выбрали Арнольда в членкоры или Гельфанда в академики. Я очень горжусь, что мне пришёл в голову выход из этой ситуации. Какой выход вы бы предложили? — Разделить отделение математики на отделения чистой и прикладной математики. Это было сделано. Отрицательное равновесие, уже установившееся, нарушилось, и сразу избрали Арнольда в членкоры и Гельфанда в академики. Гельфанд, кстати сказать, был членкором почти 40 лет — с 1946 до 1984 года. Кто-то из академиков, говорят, после своего избрания сказал: «Долго же я засиделся в этом предбаннике». В 1984 году на факультете, как я уже сказал, была жестокая травля Арнольда. В то время как шло голосование на выборах в Академию, он, как это обычно делал, в одних плавках отправился бегать на лыжах. И когда он вернулся домой, ему сообщили, что голосование прошло благополучно и его избрали. Когда его избрали в членкоры, это прекратило травлю, просто одним этим фактом.

Ещё одну баечку расскажу. У Арнольда был очень сильный враг на мехмате — профессор нашей же кафедры Станислав Николаевич Кружков, — и он вместе с Брюно повёл атаку на работу Арнольда по теории КАМ. Он утверждал, что у Арнольда теорема об устойчивости особых точек гамильтоновой системы с двумя степенями свободы (конечно, надо налагать

условия) не доказана. Как я уже сказал, Арнольд позволял себе небрежные тексты — это была самодозволенная небрежность гения, который знал, что по его следам пройдут люди более аккуратно. Теорема эта была написана небрежно. Брюно извлёк из текста некое законченное утверждение, привёл к нему контрпример, и вокруг этого раздувался и раскручивался скандал, и в 1989 году этот скандал возобновился. Я принял в этом небольшое участие. Мой коллега Станислав Николаевич расклеивал по факультету письма, в которых он писал о «мошенничестве» Арнольда. Я помню, как мы входили на кафедру с Татьяной Дмитриевной Вентцель — с моей очень уже пожилой сослуживицей, очень симпатичной, дочкой Е. С. Вентцель¹¹⁾ — мы входили на кафедру, я увидел эту записку и смял её рукой. «Вас Кружков убьёт», — сказала Татьяна Дмитриевна. Но это отдельная история.

А слухи шли, что у Арнольда что-то неладно в его работах по теории КАМ. И мне друзья и доброжелатели Арнольда, ученики Колмогорова, говорили, что «нет дыма без огня — Юлик, разберитесь». И закончив писать доказательство теоремы конечности для предельных циклов, я решил попробовать разобраться. Я, конечно, не читал подробное доказательство, но я сделал маленькое открытие, о котором сейчас расскажу.

Во время полемики по поводу доказательства Арнольда детали формулировки и доказательства навязли в зубах. Много раз переговаривалось и перелопачивалось, в том ли порядке эти детали написаны. Если в том порядке написать, то будет верно, а если не в том, то неверно, и Арнольд написал не в том, а значит, не понимал доказательства. Напомню, что у Арнольда были три части «Малых знаменателей». Первая про окружность, вторая — теорема Колмогорова, когда число степеней свободы у возмущённого и невозмущённого уравнения совпадают, а третья — когда у невозмущённого уравнения меньше степеней свободы. Критикуемая теорема была в третьей части. Я понял, что этот признак устойчивости — двумерные торы, разделяющие трёхмерную поверхность, — был Арнольду очень дорог. Новый, совершенно непохожий на всё предыдущее признак. Было понятно, что Арнольд не должен был его пропустить в любом контексте, где он возникал. И что такая теорема об устойчивости должна была возникнуть как следствие теоремы Колмогорова. И тем самым надо её искать во второй части. Я взял в руки вторую часть и как приложение теоремы Колмогорова нашёл теорему об устойчивости волчка. Она была близнецом и двойником той теоремы, которая критиковалась: те же параллельные условия надо было сформулировать, те же самые рассуждения в доказательстве надо

¹¹⁾ Елена Сергеевна Вентцель — математик, известна также как писательница И. Грекова.

было применить, но только там всё было написано в идеальном порядке. После этого спорить о том, понимал ли Арнольд теорему, о которой он писал в третьей части, было уже смешно. Я рассказал об этом исследовании тем друзьям Арнольда, которые говорили «нет дыма без огня», и они были вполне удовлетворены. Но сам Арнольд не захотел, чтобы я публиковал своё исследование в «Математических заметках». Вскоре после этого я поехал во Францию и решил, что я сам себе страбургский профессор — правда, я был им всего два месяца, — что хочу, то и публикую, — и опубликовал это исследование в препринте Страсбургского университета.

Было у Арнольда в 1999 году очень страшное падение с велосипеда. Он прекрасно ездил на велосипеде — его физическая форма была фантастической. Во Франции он упал с велосипеда, и в Москве шли какие-то очень оптимистические слухи — как будто его поставили на искусственное дыхание и на другие аппараты, для того чтобы дать ему возможность легче оправиться, — но я как-то этим слухам не верил, потому что зря человека на аппараты не поставят. На пятый день его должны были вернуть на своё дыхание, его не вернули, и мне стало совсем страшно. А по Москве ходила фраза «опасности для жизни нет». Жена его, Эля, с которой я разговаривал по телефону, просила меня: «Юлик, молитесь». Через две недели его сняли с аппаратов, и он выжил. А в предисловии к книжечке «Истории давние и недавние», которая была издана несколько лет спустя, Арнольд рассказывал о том, как он лежал в больнице, — и там не без юмора он писал, что французские врачи, когда он приходил в себя, говорили ему: «Ну, ты несколько дней протянешь». А когда он вышел из больницы, ему говорили: «Ну, ничего, умрёшь не позже чем через полгода». Арнольд в своём предисловии к этой книжечке цитирует слова из справочника об опасных и смертельных дозах алкоголя, данные там довольно подробные, и не очень большие указываются дозы. Весь этот абзац заканчивается примечанием: к людям русской национальности эти данные не относятся. По-видимому, пишет Арнольд, западные данные о выживании после черепной травмы тоже не относятся к людям русской национальности. Во всяком случае, он все французские нормы выживания тогда, в 1999 году, перекрыл.

Когда праздновалось его 50-летие, за столом шёл разговор о рекордах разного рода. Мне приходилось, хотя и не часто, пробегать с ним на лыжах 60 километров, но это было почти за пределами моих возможностей. Сам Арнольд рассказывал, что бегал 100 километров, но это занимало у него до 13 часов. Он как-то раз совершенно неожиданно для меня показал мне возможность купания в ледяной воде. В 1978 году мы бежали на лыжах, нам встретилась открытая река. Арнольд спросил: «Будем купаться?». И я вдруг обнаружил, что никаких особых возражений у меня нет, хотя

ничего, кроме регулярного холодного душа, я тогда не принимал. Вообще, традиция холодных купаний идёт, по-видимому, от Павла Сергеевича Александрова, который своего младшего друга Колмогорова в это дело втянул. Александров в своих воспоминаниях пишет, как они с Колмогоровым на спор пошли и выкупались под редкими снежинками, при этом изумив всё старшее поколение Лузитании — Лузина и своих сверстников, учеников Лузина. От Колмогорова это перешло к Арнольду, а от Арнольда — к его ученикам. На 50-летию Арнольда шла речь о рекордах, и его рекорд — минимальная температура воздуха при купании зимой — был минус 27 градусов.